

3347/83  
**ZESZYTY  
NAUKOWE  
POLITECHNIKI  
ŚLĄSKIEJ**

**ELEKTRYKA**

**Z. 83  
GLIWICE  
1983**

P 33.47 | 83  
**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**

**ZESZYTY NAUKOWE**

**Nr 739**

**MAREK BRODZKI**

**PEWNE ZASTOSOWANIA  
TEORII WIĄZEK W DZIEDZINIE  
SIECI ELEKTRYCZNYCH**

**PRACE INSTYTUTU PODSTAWOWYCH  
PROBLEMÓW ELEKTROTECHNIKI  
I ENERGOELEKTRONIKI**

OPINIODAWCY

*Prof. dr hab. inż. Zygmunt Nowomiejski*

*Prof. dr hab. Włodzimierz Waliszewski*

KOLEGIUM REDAKCYJNE

*Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), Zofia Cichowska (redaktor działu),*

*Elżbieta Stinzing (sekretarz redakcji)*

REDAKCJA

*Roma Łoś*

REDAKCJA TECHNICZNA

*Alicja Nowacka*

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4668

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej

ul. Kujańska 3, 44-100 Gliwice

---

Nakł. 150+55    Ark. wyd. 1,5    Ark. druk. 3,0    Papier druk. kl. V. 70x100, 70 g  
Oddano do druku 4.10.1982    Podpis do druku 21.12.1982    Druk ukończ. w styczniu 1983  
Zam. 1020/82 B-24    Cena zł 15,-

---

Skład, fotokopie, druk i oprawę  
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Przedmowa .....	5
2. Określenie wiązek włóknistych .....	7
3. Pewna metoda konstrukcji wiązek .....	10
4. Przykłady wprowadzonych wiązek .....	13
5. Konstrukcja pewnego morfizmu wiązki $W$ w wiązkę $'W$ .....	29
6. Sposób opisu pracy sieci w wiązkach $W, 'W$ .....	34
7. Wnioski końcowe .....	38
Wykaz cytowanej literatury .....	44
Literatura podstawowa .....	45
Streszczenia .....	46

## 1. PRZEDMOWA

Pojęcie wiązki wprowadzili C. Ehresmann, J. Feldbau i B. Eckmann w 1941 r., następnie do rozwoju teorii wiązek przyczynił się głównie N. Steenrod. Zwięzły zarys historii tego pojęcia, jak i pewnych podstawowych pojęć współczesnej geometrii różniczkowej Czytelnik może znaleźć w pracy [11], ss. (9-14). Tam też oraz np. w książkach [1], [19] znajduje się obszerniejsza bibliografia dotycząca teorii wiązek oraz różniczkowych. W bibliografii niniejszej pracy zamieszczone są pozycje, na które powołuję się w tekście. Osobno wymienionych jest kilka pozycji podstawowych, dotyczących geometrii różniczkowej i teorii wiązek.

Teoria wiązek znalazła zastosowania w rozmaitych działach fizyki, np. w mechanice - artykuł [21], przede wszystkim zaś w teorii względności.

W elektrotechnice spotkałem się z nimi w artykule [18], gdzie chodzi jednakże tylko o wiązki styczne. Przedstawiając czytelnikowi tę pracę, chciałbym przyczynić się do dalszych zastosowań w elektrotechnice wspomnianego pojęcia (jak i związanej z nim problematyki geometrycznej) oraz do wskazania niektórych korzyści stąd płynących. Posłużę się tu pewnym, możliwie prostym, przykładem poprzedzonym krótkim przypomnieniem aksjomatyki wiązek oraz pewnej metody ich konstrukcji.

Jednocześnie chciałbym wyrazić podziękowanie Panu Prof. dr hab. Mieczysławowi Kucharzewskiemu za przeczytanie rękopisu oraz poczynione uwagi. Dziękuję również Panom Prof. dr hab. inż. Zygmuntowi Nowomiejskiemu oraz Prof. dr hab. Włodzimierzowi Waliszewskiemu za poświęcony mi czas oraz sporządzenie recenzji niniejszej pracy.

Gliwice, 1981 r.

Marek Brodzki



## 2. OKREŚLENIE WIĄZEK WŁÓKNISTYCH

Wiązkę włóknistą nazywamy ciąg  $(B, Y, F, G, \circ, p, \Psi)$  spełniający poniższe warunki.

1. Elementy  $B, Y, F$  są rozmaitościami różniczkowymi, "B" nazywamy rozmaitością wiązki, "Y" - rozmaitością bazową, "F" - włóknem wzorcowym. Jednocześnie wymiar ( $\dim B$ ) rozmaitości B jest równy sumie wymiarów rozmaitości Y oraz F. (Cudzysłowy używane są tu oraz w podobnych sytuacjach w dalszej części tekstu, dla odróżnienia wyrażen od ich nazw ([12], R. XII, § 2; [4], s. 10).)

2. Element  $p$  jest odwzorowaniem różniczkowalnym rozmaitości B na rozmaitość Y

$$p: /B/ \longrightarrow /Y/. \quad (1)$$

Element ten nazywamy rzutem wiązki włóknistej.

3. Uporządkowane trójka  $(G, F, \circ)$  stanowi grupę Liego przekształceń (lewostronnych). Element  $\circ$  jest działaniem grupy Liego G we włóknie wzorcowym F

$$\circ: /G/ \times /F/ \longrightarrow /F/. \quad (2)$$

4. Element  $\Psi$  jest atlasem wiązki złożonym z map  $\psi_\alpha$ , tzn.  $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$

$$\psi_\alpha: \overline{p^{-1}(U_\alpha)} \longrightarrow U_\alpha \times /F/, \quad (3)$$

gdzie " $U_\alpha$ ",  $\alpha \in I$  są zbiorami otwartymi rozmaitości bazowej Y<sup>f</sup> pokrywającymi ją. " $\psi_\alpha$ " są dyfeomorfizmami " $p^{-1}(U_\alpha)$ " na " $U_\alpha \times /F/$ ". Zbiory  $p^{-1}(U_\alpha)$  oraz  $U_\alpha \times /F/$  zaopatrzone są oczywiście w odpowiednie topologie i atlasy - indukowane z "B" i iloczynowe. "I" jest zbiorem indeksów map. Czyli mamy tu bijekcję zbioru map na zbiór indeksów.

5. Dla każdego elementu  $\alpha \in I$  zachodzi związek:

$$p|_{U_\alpha} \circ \psi_\alpha = p|_{\overline{p^{-1}(U_\alpha)}}. \quad (4)$$

oznaczający, że włókna  $\overline{\rho^{-1}(\{y\})}$ ,  $y \in U_\alpha$  odwzorowywane są przez " $\psi_\alpha$ " na produkt  $\{y\} \times /F/$ . " $\text{pr}_{U_\alpha}$ " jest rzutem produktu  $U_\alpha \times /F/$  na jego pierwszy czynnik.

6. Dla dowolnych wskaźników  $\alpha, \beta \in I$ , dla których spełniony jest związek  $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$  oraz dla dowolnego elementu  $y \in U_\beta \cap U_\alpha$  definiujemy dyfeomorfizm:

$$\psi_{\beta y} \circ \psi_{\alpha y}^{-1} \tag{5}$$

gdzie

$$\psi_{\alpha y}^{-1}(\tilde{w}) = \psi_\alpha^{-1}(y, \tilde{w}), \quad \tilde{w} \in /F/, \quad y \in U_\alpha.$$

(Uważamy, że złożenie odwzorowań zawsze dokonywane jest dla wspólnej części przeciwdziedziny pierwszego i dziedziny drugiego.) Można również traktować odwzorowania  $\psi_{\alpha y}$  jako dyfeomorfizmy, definiując dla " $\overline{\rho^{-1}(\{y\})}$ " topologię i atlas przeniesiony przez odwzorowania  $\psi_{\alpha y}$  z " $F$ " ([8], s. 19, 20). Z powyższej możliwości wprowadzenia atlasu dla włókien skorzystamy również później, definiując pewne ich dyfeomorfizmy. Z drugiej strony, dla dowolnych poprzednio wymienionych wskaźników  $\alpha, \beta$ , istnieje takie odwzorowanie przejścia  $g_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow /G/$ , że poniżej określone odwzorowanie  $l_{g_{\beta\alpha}}(y) : /F/ \rightarrow /F/$  spełnia dla każdego elementu  $\tilde{w} \in /F/$  warunek:

$$l_{g_{\beta\alpha}}(y)(\tilde{w}) = g_{\beta\alpha}(y) \circ \tilde{w} = \psi_{\beta y} \circ \psi_{\alpha y}^{-1}(\tilde{w}). \tag{6}$$

7. Odwzorowania przejścia

$$g_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow /G/ \tag{7}$$

są różniczkowalne.

Uwaga 1. Wzorując się na umowie wprowadzonej w pracy [17], s. 80 dla przestrzeni różniczkowych, odróżniamy w przypadku rozmaitości różniczkowej samą rozmaitość, to jest parę uporządkowaną: (przestrzeń topologiczna, atlas maksymalny), np.  $B$ , od zbioru rozmaitości oznaczonego przez  $/B/$  i nazwanego nośnikiem rozmaitości. To samo dotyczy rozmaitości różniczkowych  $Y, F$ . W przypadku grupy Liego  $G$  zastosowana symbolika  $(/G/)$  oznacza dodatkowo pominięcie działania grupowego, czyli utworzenie podkładu grupy ([15], s. 20). Dla uproszczenia wypowiedzi będziemy oznaczali i nazywali tak samo odwzorowania homeomorficzne (dyfeomorficzne) nośników przestrzeni topologicznych (rozmaitości różniczkowych) jak i przekształcenia homeomorficzne (dyfeomorficzne) przestrzeni topologicznych (rozmaitości różniczkowych), tzn. uporządkowane trójki (odwzorowanie, obie przestrze-

nie lub rozmaitości) używane jako morfizmy w kategoriach przestrzeni topologicznych czy też rozmaitości różniczkowych ([15], s. 21). Również dla skrócenia zapisu pomijamy często w określeniu rozmaitość różniczkowa, słowo różniczkowa. Poza tym nazwa rozmaitość różniczkowa wydaje się poprawniejsza niż rozmaitość różniczkowalna. W ślad za pracą (17) (w szczególności s. 10) posługujemy się tą pierwszą.

Uwaga 2. Ze względu na przykłady wiązek, które podamy, przyjmujemy dla uproszczenia, że rozmaitości różniczkowe  $B, Y, F$  są klasy  $C_\infty$ , odwzorowania  $p$  oraz  $g$  i działanie  $\circ$  są też klasy  $C_\infty$ . Podobnie zakładamy, że mapy  $\psi_\alpha$  (oraz odwzorowania  $l_g$ ) są dyfeomorfizmami klasy  $C_\infty$ . To samo można powtórzyć dla klasy  $C_k, k \geq 1$ .

Uwaga 3. W książce [1] przyjmuje się dodatkowo, że grupa Liego  $G$  działa we włóknie wzorcowym  $F$  efektywnie. Wprawdzie obie wiązki, które zdefiniujemy będą spełniać taki warunek, lecz przy wskazanej poniżej konstrukcji wiązki przyjęcie go nie jest konieczne. Wypada jednak zaznaczyć, że w przypadku braku efektywności działania  $\circ$  dobrze byłoby wzbogacić ciąg definicyjny wiązki włóknistej o rodzinę niepustych odwzorowań ze zbioru  $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha, \beta \in I}$ , ponieważ wówczas mapy atlasu wiązki nie wyznaczają jednoznacznie dla danych wskaźników  $\alpha, \beta$  tych odwzorowań. Jednocześnie przyjmujemy spełnienie warunku (8) i wynikających z niego warunków  $g_{\alpha\alpha}(y) = e$  ("e" - element jednostkowy grupy  $G$ ),  $g_{\alpha\beta}(y) = (g_{\beta\alpha}(y))^{-1}$ , ([19], s. 80). W przypadku efektywności działania  $\circ$  można wykazać spełnienie tych warunków ([20], ss. 76, 77).

Z podanym określeniem wiązek Czytelnik może zapoznać się w książkach [1], s. 216, [19], ss. (79-81); z definicją grup Liego przekształceń np. - [19], s. 39.



### 3. PEWNA METODA KONSTRUKCJI WIĄZEK

Istnieje metoda konstrukcji wiązek, którą wykorzystamy w naszym przykładzie. Metoda ta opisana jest w książkach [1], ss. (217-220), [19], ss. 87, 88. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie.

Zakładamy (porównaj uwagę 2 w punkcie 2 dotyczące kwestii gładkości), że dane są: rozmierność różniczkowa bazowa  $Y$ , grupa Liego przekształceń lewostronnych  $(G, F, \circ)$ , otwarte pokrycie  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  rozmierności  $Y$ , odwzorowania  $g_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G/\cdot, \alpha, \beta \in I, U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ , spełniające warunki:

$$g_{\gamma\alpha}(y) = g_{\gamma\beta}(y) g_{\beta\alpha}(y), \text{ dla dowolnej zmiennej } y \in U_\gamma \cap U_\beta \cap U_\alpha. \quad (8)$$

(nie występuje tu sumowanie podług wskaźnika  $\beta$  oraz:  $\alpha, \beta, \gamma \in I$ ). Wówczas istnieje wiązka włókniasta  $(B, Y, F, G, \circ, p, \Psi)$  (spełniająca definicyjne warunki (1-7)).

Szkic dowodu. Rozmierność wiązki  $B$  otrzymana jest jako pewien zbiór ilorazowy, zaopatrzony w topologię i atlas w sposób opisany poniżej. Tworzymy zbiory  $U_\alpha \times F/\times \{\alpha\}$  przyjmując w zbiorze  $I$  topologię dyskretną ([7], s. 27), a w wymienionym zbiorze topologię Tichonowa ([7], ss. 105, 106). Następnie tworzymy sumę  $H$  tych zbiorów, gdy wskaźnik należy do zbioru  $I$ , wprowadzając topologię sumy ([7], s. 102). W zbiorze  $H$  budujemy relację równoważności  $\sim$ :

$$((y, \bar{w}, \alpha) \sim (y', \bar{w}', \beta)) \equiv ((y = y') \wedge (\bar{w}' = g_{\beta\alpha}(y) \circ \bar{w})). \quad (9)$$

Wówczas:  $B = H/\sim$ . Zbiór  $B$  zaopatrujemy w topologię ilorazową ([7], ss. 122, 123). Definiujemy odwzorowania (bijekcje - wzór (3))  $\phi_\alpha, \alpha \in I$  w następujący sposób:

$$\phi_\alpha^{-1}(y, \bar{w}) = \Theta(y, \bar{w}, \alpha), \quad y \in U_\alpha, \quad \bar{w} \in F/\cdot, \quad (10)$$

gdzie odwzorowanie  $\Theta : H \rightarrow B$  jest zdefiniowane

$$\Theta(y, \bar{w}, \alpha) = z \in B/\cdot, \quad (11)$$

ozn. "0" przyporządkowuje elementowi  $(y, \bar{w}, \alpha)$  zbioru  $H$  klasę równoważności z relacji  $\sim$ , do której on należy. Określamy jednocześnie odwzorowanie suriektywne (rzut wiązki włókniastej)  $p: B \rightarrow Y$  przyjmując  $p(z) = y$ ,

$(y, \bar{w}, \alpha) \in z$  i stwierdzając, że przyporządkowanie to nie zależy od wyboru reprezentanta klasy abstrakcji  $z$ . Wzór (4) jest wówczas spełniony. Można wykazać, że odwzorowania  $\psi_\alpha$  są homeomorfizmami ([1], s. 218), uważamy je za mapy atlasu wiązki  $\Psi$ . Dziedziny (otwarte) tych map pokrywają zbiór  $/B/$  i z ich pomocą zdefiniujemy atlas  $\Phi_B$  rozmaiłości wiązki  $B$  rozumiany jako zbiór map

$$u_{\alpha_B} : U_{\alpha_B} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim B}, \quad U_{\alpha_B} \subset /B/, \quad \alpha_B \in I_B. \quad (12)$$

Mianowicie, jeśli homeomorfizmy

$$u_{\alpha_Y} : U_{\alpha_Y} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim Y}, \quad U_{\alpha_Y} \subset /Y/, \quad \alpha_Y \in I_Y \quad (13)$$

oraz

$$u_{\alpha_F} : U_{\alpha_F} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim F}, \quad U_{\alpha_F} \subset /F/, \quad \alpha_F \in I_F \quad (14)$$

są mapami odpowiednio rozmaiłości bazowej i włókna wzorcowego, to definiujemy:

$$u_{\alpha_B}(z) = (u_{\alpha_Y}(\phi_{1\alpha}(z)), u_{\alpha_F}(\psi_{2\alpha}(z))) \in \mathbb{R}^{\dim B}, \quad \dim B = \dim Y + \dim F,$$

gdzie

$$\phi_{1\alpha} = p_{r_Y} \circ \psi_\alpha, \quad \psi_{2\alpha} = p_{r_F} \circ \psi_\alpha$$

i zachodzi

$$D(u_{\alpha_Y}) \cap D(\phi_{1\alpha}) \neq \emptyset, \quad D(u_{\alpha_F}) \cap D(\psi_{2\alpha}) \neq \emptyset,$$

czyli

$$u_{\alpha_B} = (u_{\alpha_Y} \times u_{\alpha_F}) \circ \psi_\alpha. \quad (15)$$

(Znak  $\times$  stosujemy tu dla iloczynu kartezjańskiego odwzorowań) Mamy więc przyporządkowanie wskaźników  $(\alpha, \alpha_Y, \alpha_F) \rightarrow \alpha_B$ . Dla wygody w oznaczaniu konkretnych map możemy założyć, że zbiory  $I, I_Y, I_F, I_B$  są parami rozłączne. Stwierdzamy teraz, że mapy  $u_{\alpha_B}$  są zgodne i otrzymujemy atlas  $\Phi_B$  klasy  $C_\infty$  (zobacz: [1], s. 219, 220 oraz uwagę 2 p. 2). Następnie atlas ten uzupełniamy do maksymalnego klasy  $C_\infty$ , łatwo wykazać, że wówczas mapy atlasu wiązki  $\psi_\alpha, \alpha \in I$  są dyfeomorfizmami " $p^{-1}(U_{\alpha_F})$ " na " $U_{\alpha_Y} \times /F/$ ".

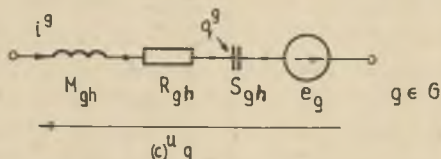
W oparciu o wzór (4) stwierdzamy, że rzut  $p$  jest odwzorowaniem klasy  $C_{\infty}$ . W ten sposób przeprowadziliśmy konstrukcję rozmaitości  $B$ , rzutu  $p$  oraz atlasu wiązki  $\Psi$  i sprawdziliśmy, że punkty (1-7) dotyczące określania wiązki są w przypadku podanej konstrukcji spełnione.

Uwaga. Jeśli atlas wiązki  $\Psi$  nie jest maksymalny, można go uzupełnić do maksymalnego, tak by warunki (1-7) definicji wiązki były spełnione. Nie zawsze w zastosowaniach jest to korzystne z punktu widzenia potrzeb opisu danego obiektu fizycznego. Również nie zawsze wygodnie jest operować atlasami maksymalnymi rozmaitości  $B, Y, F, G$ , np. ze względu na zapis w poszczególnych układach współrzędnych rozmaitości  $G$  oraz  $F$  wzoru  $g_{\beta\alpha}(y) \otimes \bar{w}$  związanego z teorią obiektów geometrycznych (zagadnienie to omówimy wraz z podaniem przykładów wiązek). W przypadku atlasu, który nie jest maksymalny, mówimy o rozmaitości współrzędnościowej zamiast różniczkowej ([1], s. 50). Przez analogię, można mówić o wiązce współrzędnościowej, gdy atlas pewnej spośród rozmaitości różniczkowych  $B, Y, F, G$  nie jest maksymalny.

#### 4. PRZYKŁADY WPROWADZONYCH WIĄZEK

W myśl twierdzenia podanego w punkcie 3 konstrukcję wiązki należy rozpocząć od rozmaitości bazowej, grupy Liego przekształceń, otwartego pokrycia rozmaitości bazowej i odwzorowań przejścia. Z chwilą wprowadzenia tych pojęć, resztę pojęć figurujących w określeniu wiązki otrzymujemy w sposób opisany w punkcie 3.

Trzeba wobec tego podać obiekty elektryczne, do których odnosić się będą powyższe rozumowania. Są nimi sieci elektryczne złożone ze skończonej liczby gałęzi szeregowych normalnych. Budowę ich objaśnia rysunek 1.



Rys. 1

Oznaczenia (dla ustalonych wartości wskaźników  $g, h$ ):

- " $M_{gh}$ " - indukcyjność własna gałęzi  $g$  ( $g=h$ ) i wzajemna gałęzi  $g$  i  $h$  ( $g \neq h$ ).  $M_{gh} \in R$ ,
- " $R_{g_p}$ " - rezystancja gałęzi  $g$ , można użyć też oznaczenia rezystancji  $R_{gh}$  ( $R_{g_p h_p} = 0, g_p \neq h_p$ ),  $R_{g_p} \in R$ ,
- " $S_{g_p}$ " - elastancja gałęzi  $g$ , podobnie jak dla rezystancji można wprowadzić oznaczenie  $S_{gh}$ ,  $S_{g_p} \in R$ ,
- " $e_g$ " - siła elektromotoryczna gałęzi  $g$ ,  $e_g: R \rightarrow R$ ,
- " $q^g$ " - ładunek wskazanej na rys. 1 okładki kondensatora gałęzi  $g$ ,  $q^g: R \rightarrow R$ ,
- " $i^g$ " - prąd gałęzi  $g$ ,  $i^g: R \rightarrow R$ ,
- " $(c)u_g$ " - napięcie całkowite gałęzi  $g$ ,  $(c)u_g: R \rightarrow R$ , (klasy występujących tu funkcji zostaną określone później).
- " $G$ " - zbiór indeksów gałęzi sieci (istnieje bijekcja zbioru  $G$  na zbiór gałęzi).

Sens występowania wskaźników na różnych poziomach, jak i obecności wskaźnika  $p$ , będzie też wyjaśniony później. Gałęzie zorientowane są prę-



dowo. Orientacje uzyskane za pomocą napięć całkowitych są przeciwne do prądowych.

Uwaga. Poprawne zdefiniowanie gałęzi, ich orientacji, sieci (zorientowanej), jej elementów oraz pewnych innych wielkości dotyczących sieci nie stanowi treści niniejszej pracy. Czytelnik, który nie jest elektrykiem może zapoznać się z tymi zagadnieniami w rozmaitych pracach z dziedziny elektrotechniki np. [13], [4].

Budowę geometryczną sieci (nie zawierającej pętli) określają dwie rzeczywiste macierze  $a = \begin{bmatrix} a^u \\ g \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} b^k \\ k \end{bmatrix}$ ,  $g \in G$ ,  $u \in U$ ,  $k \in K$ , ("g" jest wskaźnikiem wierszowym w obu macierzach), gdzie "U" jest zbiorem indeksów tak zwanych niezależnych węzłów sieci zorientowanej, "K" - indeksów niezależnych obwodów (oczek) tejże sieci (obowiązuje tu ta sama uwaga co przy oznaczeniu gałęzi sieci). Umówimy się, że wskaźnik h będzie występować również w roli gałęziowego, czyli  $h \in G$ , "v" - węzłowego,  $v \in U$  oraz "l" - obwodowego,  $l \in K$ . Macierze transponowane  $a$  i  $b$  nazywane są odpowiednio macierzą incydencji oraz obwodową (oczkową). Ich definicje Czytelnik może znaleźć np. w pracach [13], ss. 186, 194 lub [4], ss. 26, 27.

Aby wprowadzić teraz rozmaiteść bazową trzeba obrać jakieś wielkości elektrycznej natury, które mają być w niej "rejestrowane". Dla sieci złożonej z  $n$ ,  $n \in N$  gałęzi szeregowych normalnych rozsądnie uważać za takie wielkości ładunki kondensatorów kolejnych jej gałęzi, w pewnych momentach czasu opisane za pomocą ciągów  $\vec{q} = (q^1, \dots, q^n) \in R^n$ . Za tym wyborem przemawia możliwość łatwego uzależnienia (typu algebraiczno-różniczkowego) wszystkich pozostałych wielkości gałęziowych od funkcji ładunków  $q$  zmiennej czasu.

Uwaga. Aby rozróżnić funkcję (odwzorowanie) np. zmiennej  $t$  (czasu) od jej wartości w punkcie, wprowadzamy następującą umowę. Zmienne należące do przeciwdziedziny danej funkcji lub do pewnego zbioru zawierającego ją, oznaczamy literami zaopatrzonymi wężykiem np.:  $\vec{q}$  ( $\vec{q} \in R^n$ ), same zaś funkcje - literami bez wężyka np.:  $q$ . Czyli przykładowo mamy wyrażenie:  $\vec{q} = q(t)$ . Umowę tę przyjmujemy dla zmiennych będących współrzędnymi map rozmaitości  $X^n$ ,  $Y^f$  oraz włókien wzorcowych i rozmaitości obu konstruowanych wiązek. Umowa powyższa spowodowana jest chęcią zachowania tej samej litery w przypadku funkcji oraz jej wartości w punkcie dla ustalonej wielkości fizycznej, z którą dana litera jest tradycyjnie skojarzona.

Najprościej będzie więc przyjąć za zbiór (związany z ładunkami gałęziowymi), na którym zdefiniujemy atlas, zbiór  $R^n$ . Topologia jego jest naturalna wyznaczona np. przez metrykę euklidesową ([7], s. 304). Praukładem współrzędnych  $u_{p_x}$  jest odwzorowanie tożsamościowe (homeomorfizm) przestrzeni (topologicznej)  $R^n$  na nią samą. Atlas otrzymamy składając wymieniony praukład z transformacjami (odwzorowaniami) " $R^n$ " na " $R^n$ " należącymi do grupy centrosficznej (tzn.  $u_{q_x} = t_{q_x p_x} \circ u_{p_x}$ )



$$\begin{aligned} \tilde{q}^{g'} &= c_g^{g'} \tilde{q}^g, & c_g^{g'} &\in \mathbb{R}, \\ \det \begin{bmatrix} c_g^{g'} \end{bmatrix} &\neq 0, & g &\in \{1, \dots, n\}, \\ & & g' &\in \{1', \dots, n'\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Uwaga. Kreskę przy wskaźniku  $g$  lub jej brak należy interpretować jako zmienną dotyczącą układów współrzędnych, lecz ze względów na wygodę zapisu wielu wzorów traktujemy znak  $g'$  jako całość. Przypominamy również, że obowiązuje umowa sumacyjna dla wskaźników powtarzających się w iloczynie - tutaj dla wskaźnika  $g$  w zakresie zaznaczonym we wzorze (16). Górny wskaźnik traktujemy jako wierszowy - tu dla macierzy  $c$ .

Atlas otrzymany w ten sposób nazywa się strukturą F. Kleina ([11], s. 32). Nie jest on atlasem maksymalnym klasy  $C_\infty$ , lecz okaże się, że właśnie opisany atlas nam wystarczy. Uporządkowaną parę (przestrzeń topologiczna  $\mathbb{R}^n$ , jej atlas) nazwiemy rozmaiłością współrzędnościową  $X^n$ .

Uwaga. Wprowadzenie nowych współrzędnych kreskowanych można interpretować fizycznie poprzez zastosowanie układu przekształcającego stare współrzędne  $\tilde{q}$  na nowe " $\tilde{q}'$ ", realizującego macierz  $\begin{bmatrix} c_g^{g'} \end{bmatrix}$  transformacją (16). Czyli danemu stanowi sieci przyporządkowujemy rozmaite pomiary  $\tilde{q}, \tilde{q}'$  itd. związane z rozmaitymi układami współrzędnych.

Punkty tak otrzymanej rozmaiłości odzwierciedlają pracę, w pewnych chwilach czasu, dowolnych sieci "próbnych" składających się z  $n$  gałęzi szeregowych normalnych odseparowanych galwanicznie jedna od drugiej (tak, by ich ładunki mogły być dowolne). "Na tle" takich sieci będziemy obserwować pracę (na razie pod względem ładunków kondensatorów) dowolnej wybranej sieci o  $n$  gałęziach,  $f$  obwodach niezależnych ( $n, f \in \mathbb{N}$ ) oraz  $n-f$  węzłach niezależnych. W ten sposób ustalamy, że zbiór  $G$  jest  $n$  elementowy, " $K$ " -  $f$  elementowy oraz " $U$ " -  $(n-f)$  elementowy. Rozmaiłość  $X^n$  nie jest jeszcze naszą rozmaiłością bazową ze względu na to, że w rozpatrywanych sieciach zachodzi nierówność:  $n-f > 0$ , a ładunki w węzłach niezależnych związane są zasadą zachowania. Czyli nie każdy punkt rozmaiłości  $X^n$  będzie przez taką sieć "osiągalny" i właśnie prawo zachowania ładunku elektrycznego pozwoli nam dopiero zdefiniować rozmaiłość bazową jako zenurzoną w " $X^n$ " oraz spełniającą wspomniany warunek osiągalności.

Prawo to można w praktyce zapisać następująco:

$$\begin{aligned} u_{g_p} \tilde{q}^{g_p} &= \sum_{g_p} \tilde{q}^{g_p}, & g_p &\in \{1_p, \dots, n_p\}, \\ & & u &\in \{1, \dots, n-f\}. \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie  $\begin{matrix} \bar{u} \\ 0 \end{matrix}$  oznacza ładunek węzła niezależnego  $u$ . Związek (17) obowiązuje dla dowolnego stanu sieci określonego ciągiem ładunków  $\begin{matrix} \bar{u} \\ 0 \end{matrix} \in R^{n-f}$ . (Dla uproszczenia zapisu pomijamy indeks  $x$  przy indeksie  $p$ ). Przyporządkowawszy obwodom niezależnym ładunki obwodowe oznaczone  $\bar{Q}^k_r$  ( $\bar{Q}^k_r \in R^f$ ), mamy zamiast równania (17) definiującego w rozmiarowości  $x^n$   $f$  - wymiarową hiperpłaszczyznę, jej równanie parametryczne (przypominamy, że punkty  $\begin{matrix} \bar{u} \\ 0 \end{matrix}$ ) są tu jednocześnie punktami przestrzeni punktowej  $/X^n/$  i analitycznej  $R^n$ )

$$\bar{q}^g_p = b_{k_r}^g \bar{Q}^k_r + \bar{q}^g_p, \quad k_r \in \{1, \dots, f\}, \quad (18)$$

$$\begin{matrix} \bar{u} \\ 0 \end{matrix} = a_{g_p} \bar{q}^g_p, \quad \bar{q}^g_p \in R.$$

Uwaga. Ponieważ rząd macierzy  $\begin{bmatrix} u \\ a_{g_p} \end{bmatrix}$  wynosi  $n-f$ , a macierzy  $\begin{bmatrix} b_{k_r}^g \\ k_r \end{bmatrix}$  -  $f$  oraz zachodzi zależność:

$$a_{g_p} b_{k_r}^g = 0, \quad (19)$$

więc stąd wnioskujemy, że rzeczywiście dla dowolnego ciągu  $\bar{Q}^k_r \in R^f$  punkt  $\begin{matrix} \bar{u} \\ 0 \end{matrix}$  określony równaniem (18) leży na hiperpłaszczyźnie określonej równaniem (17) oraz każdy punkt tej hiperpłaszczyzny może być osiągnięty przez odpowiedni wybór punktu  $\bar{Q}^k_r$ . Czyli równania (17) i (18) dotyczą tej samej hiperpłaszczyzny.

Hiperpłaszczyznę tę zaopatrujemy w topologię indukowaną przez topologię przestrzeni  $R^n$  ([7], s. 92). Wówczas równanie (18) definiuje homeomorfizm przestrzeni topologicznej  $R^f$  na przestrzeń topologiczną utworzoną dla omawianej hiperpłaszczyzny, czyli odwrotność praukładu współrzędnych  $u_{rY}$ . Praukład ten poddajemy transformacjom centroafinicznym " $R^f$ " na " $R^f$ "

$$\bar{Q}^k_k' = d_k^{k'} \bar{Q}^k, \quad d_k^{k'} \in R, \quad (20)$$

$$\det [d_k^{k'}] \neq 0, \quad k \in \{1, \dots, f\},$$

$$k' \in \{1', \dots, f'\}.$$

W ten sposób otrzymujemy na naszej hiperpłaszczyźnie strukturę  $F$ , Kleina i czynimy z niej podobnie jak w przypadku " $X^n$ " rozmaiłość współrzędnoś-

ciową  $Y^f$  klasy  $C_\infty$ . Rozmaitość  $Y^f$  jest podrozmaitością rozmaitości  $X^n$  ([19], s. 32), włożenie " $Y^f$ " jest odwzorowaniem regularnym (rząd macierzy  $\begin{bmatrix} b^g_p \\ k_r \end{bmatrix}$  jest równy  $f$ ) klasy  $C_\infty$ .

Postępując w powyższy sposób uzyskalibyśmy różne hiperpłaszczyzny rozmaitości bazowej dla różnych ciągów ładunków węzłów niezależnych  $(Q)$  i tych samych macierzy  $\begin{bmatrix} u \\ a_{g_p} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} b^g_p \\ k_r \end{bmatrix}$ . Byłoby to niewygodne. Będziemy operować jedną rozmaitością bazową  $Y^f$ , dla której hiperpłaszczyzna  $Y^f$  przechodzi przez początek układów współrzędnych rozmaitości  $X^n$  (oraz początki układów współrzędnych rozmaitości  $Y^f$  pokrywają się z początkami układów współrzędnych rozmaitości  $X^n$ ) i powiązemy ją z pozostałymi hiperpłaszczyznami translacjami wyznaczonymi przez wektor o składowych  $(q^g_p)$  w układzie  $u_{p_x}$ . Są to oczywiście homeomorfizmy odpowiednich rozmaitości mające tę własność, że punkty hiperpłaszczyzn, które są nimi powiązane, mają te same współrzędne  $\vec{O}$  w odpowiadających sobie układach współrzędnych, powstałych przez jednoczesne transformowanie ich układów za pomocą tych samych transformacji.

Rolę przestrzeni punktowej przy konstruowaniu rozmaitości  $X^n$  odgrywała przestrzeń  $R^n$ . Można znaleźć inne wyjście, bardziej zadowolające zwoleńników opisu wielkości fizycznych z uwzględnieniem ich wymiarów. Mianowicie budujemy zbiór złożony z następujących ciągów:

$$((\xi^1_p, C), \dots, (\xi^n_p, C)), \quad \xi^g_p \in R,$$

gdzie "C" symbolizuje jednostkowy ładunek elektryczny - kulomb. Wprowadzamy działanie dodawania elementów tego zbioru, polegające na dodawaniu kolejnych liczb rzeczywistych  $\xi^g_p + \xi^g_p$  dla ciągów 1 oraz 2. Wprowadzamy działanie mnożenia elementów naszego zbioru przez liczby rzeczywiste  $\alpha \in R$ , polegające na mnożeniu:  $\alpha \xi^g_p$ . Łatwo stwierdzić, że uporządkowana czwórka (wymieniony zbiór, ciało liczb rzeczywistych, działanie dodawania, działanie mnożenia) stanowi przestrzeń liniową. W oczywisty sposób zachodzi bijekcja tego zbioru na zbiór  $R^n: ((\xi^1_p, C), \dots, (\xi^n_p, C)) \rightarrow (\xi^1_p, \dots, \xi^n_p)$ . Bijekcja ta posłuży do przeniesienia topologii z przestrzeni topologicznej  $R^n$  do utworzonego zbioru wielkości fizycznych oraz jako odwzorowanie przestrzeni topologicznych na siebie będzie stanowić homeomorfizm, czyli globalny układ współrzędnych. Następnie w pokazany już sposób tworzymy strukturę F. Kleina i rozmaitość współrzędnościową.

Mankamentem podobnej metody (przypisującej wymiar fizyczny punktom przestrzeni punktowej) zastosowanej odnośnie do dowolnych rozmaitości, jest fakt polegający na tym, że w przypadku transformacji nieliniowych o postaci  $u_{2_x} \circ u_{1_x}^{-1}$  wiążących układy współrzędnych, dodawanie elementów prze-

strzeni punktowej rozmaitości, o ile w ogóle jest zdefiniowane, nie polega na dodawaniu ich współrzędnych w poszczególnych układach współrzędnych. To samo dotyczy mnożenia tych elementów przez liczby rzeczywiste. Z kolei operowanie przestrzeniami analitycznymi jako przestrzeniami wielkości fizycznych ma tę słabą stronę, że wymiary fizyczne współrzędnych o danym numerze nie muszą być identyczne we wszystkich układach współrzędnych, co przeczy samej definicji rozmaitości. Dodatkowo zachodzi konieczność różniczkowania i całkowania odwzorowań pomiędzy tak rozumianymi przestrzeniami analitycznymi (trzeba wówczas uczynić z nich uprzednio przestrzenie Banacha). Rzecz jasna, prościej robić to dla odpowiednich odwzorowań " $R^n$ " w " $R^n$ ".

Pewnym kompromisowym wyjściem byłoby przyporządkowanie każdemu układowi współrzędnych (zbudowanemu bez uwzględnienia wymiarów fizycznych) odpowiedniej przestrzeni liniowej wielkości opatrzonej tymi wymiarami, następnie rachowanie z użyciem zwykłego układu współrzędnych i "tłumaczenie wyników na język przestrzeni opatrzonej wymiarami". W oparciu o takie pary uporządkowane (układ współrzędnych, odpowiednia przestrzeń liniowa) można utworzyć atlas rozmaitości, którą nazwalibyśmy rozmaitością fizyczną. Skomplikowałoby to jednak opis rozmaitości oraz w następstwie i tak już złożony opis wiązki włóknistej. Z powyższych powodów wolimy operować wartościami bezwymiarowymi wielkości fizycznych, pamiętając, aby dotyczyły one konkretnie ustalonego układu jednostek.

W dalszym ciągu zdefiniujemy odpowiednio grupę Liego oraz grupę Liego przekształceń. Zbiory nieosobliwych macierzy kwadratowych  $c'$  (wzór (16)) oraz  $d'$  (wzór (20)) zaopatrzone w atlasy składające się z pojedynczych map będących odwzorowaniami:  $c' \rightarrow (c_1^{1'}, \dots, c_n^{1'}, \dots, c_1^{n'}, \dots, c_n^{n'})$  oraz  $d' \rightarrow (d_1^{1'}, \dots, d_f^{1'}, \dots, d_1^{f'}, \dots, d_f^{f'})$  (oczywiście możemy mówić tu, w wiadomy sposób, o homeomorfizmach zbiorów otwartych) oraz działania mnożenia macierzowego, stanowią grupy Liego oznaczone przez  $GL(n, R)$  oraz  $GL(f, R)$ .

Uwaga. Nie żądamy spójności dziedzin (oraz przeciwdziedzin) map rozmaitości.

Tworzymy iloczyn kartezjański ww. grup Liego  $G^r = GL(n, R) \times GL(f, R)$ , tworząc iloczyn prosty grup i zaopatrując go w atlas złożony z mapy iloczynowej powstałej z poprzednio wymienionych map. Czyli mamy tu do czynienia z grupą Liego  $G^r$  ( $r = n^2 + f^2$ ), dla której rozmaitość powstaje z iloczynu kartezjańskiego rozmaitości współrzędnościowych występujących w definicjach grup Liego  $GL(n, R)$  i  $GL(f, R)$ . Wprawdzie w definicji grup Liego ([19], s. 36, 37) występują rozmaitości różniczkowe (zaopatrzone w atlasy maksymalne), a nie rozmaitości współrzędnościowe, ale uzupełniając w razie potrzeby atlas do maksymalnego spełniamy wymóg tej definicji.

Zdefiniujemy teraz rozmaitość współrzędnościową  $F^m$ . Definicja ta będzie skonstruowana tak, by grupa Liego przekształceń kojarzyła się z obiektami abstrakcyjnymi specjalnymi ([10], [11], s. 60) użytymi do opisu wielkości fizycznych dotyczących sieci elektrycznych. Wymienimy wobec te-



go najpierw te sieciowe wielkości, których znaczenie fizyczne objaśnione zostało pod rys. 1.  $\vec{q} = (\vec{q}^g) \in R^n$ ,  $\vec{q} = (\vec{q}^g) \in R^n$ ,  $(c)\vec{u} = ((c)\vec{u}^g) \in R^n$ ,  $\vec{e} = (\vec{e}^g) \in R^n$ ,  $\vec{a} = (\vec{a}^g) \in R^n$  (dla każdego ustalonego wskaźnika  $u \in \{1, \dots, n-f\}$ ).  $\vec{M} = (\vec{M}^{gh}) \in R^{n^2}$ ,  $\vec{R} = (\vec{R}^{gh}) \in R^{n^2}$ ,  $\vec{S} = (\vec{S}^{gh}) \in R^{n^2}$ ,  $\vec{b} = (\vec{b}^{gk}) \in R^{nf}$ ,  $\vec{b} = (\vec{b}^{kg}) \in R^{nf}$  (potrzebę wprowadzenia ostatniej wielkości i sposób jej powiązania z "b" wskażemy nieco później). Przy okazji podamy wielkości, które potrzebne będą w konstrukcji następnej wiązki.

- $\vec{Q} = (\vec{Q}^k) \in R^f$  - prądy obwodów niezależnych,  
 $\vec{Q} = (\vec{Q}^k) \in R^f$  - pochodne prądów obwodów niezależnych,  
 $(c)\vec{U} = ((c)\vec{U}_k) \in R^f$  - całkowite napięcia obwodów niezależnych (w każdej sieci równe zeru na mocy drugiego prawa Kirchhoffa),  
 $\vec{E} = (\vec{E}_k) \in R^f$  - siły elektromotoryczne obwodów niezależnych,  
 $\vec{A} = (\vec{a}_g \vec{b}_k^g) \in R^f$ ,  
 $u \in \{1, \dots, n-f\}$  - dla dowolnej sieci wielkości te są zawsze zerowe (wzór (19)),  
 $\vec{M} = (\vec{M}_{k1}) \in R^{f^2}$  - obwodowe indukcyjności,  
 $\vec{R} = (\vec{R}_{k1}) \in R^{f^2}$  - obwodowe rezystancje,  
 $\vec{S} = (\vec{S}_{k1}) \in R^{f^2}$  - obwodowe elastancje.

Uwaga. Pod względem matematycznym konstruujemy teraz grupę Liego przekształceń zupełnie niezależnie od map rozmaitości bazowej. Skojarzenie z tymi mapami występuje dopiero podczas budowy wiązki. Dla lepszego zrozumienia fizycznego możemy tu zaznaczyć, że wymienione wielkości fizyczne opisujemy składowymi odpowiednich obiektów specjalnych szczególnych ([1], s. 61) dla dowolnego punktu rozmaitości bazowej i dowolnej mapy tej rozmaitości, względnie mapy rozmaitości  $X^n$ . Zazwyczaj składowe tych wielkości podajemy dla sieci w praktykach o indeksach  $p_x$  oraz  $r_y$ .

Zbiory  $R^n, R^{n^2}, R^{nf}$  zaopatrujemy w topologie naturalne i następnie mnożymy je kartezjańsko. W iloczynie tym występuje: " $R^n$ " -  $4 \cdot (n-f)$  razy, " $R^{n^2}$ " - 3 razy, " $R^{nf}$ " - 2 razy. Utożsamiamy ww. iloczyn kartezjański ze zbiorem  $R^m$ . Upřednio, dla występujących tu ciągów podwójnych tworzymy pojedyncze, tak jak dla macierzy  $c'$  oraz  $d'$ . Elementami " $R^m$ " są więc ciągi opisujące omawiane wielkości elektryczne występujące we wskazanej poprzednio kolejności, tzn. zachodzi:  $(\vec{q}, \vec{q}, (c)\vec{u}, \vec{e}, \vec{u}, \vec{M}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{b}, \vec{b}) \in R^m$ . Zaopatrujemy wynik, tzn. " $R^m$ " ( $m = 4n + (n-f)n + 3n^2 + 2nf$ ) w topologię Tichonowa. Dla przestrzeni topologicznej  $R^m$  definiujemy atlas złożony z jednej mapy stanowiącej odwzorowanie tożsamościowe (homeomorfizm) " $R^m$ " na " $R^m$ ". W ten sposób otrzymujemy rozmaitość współrzędnościową  $F^m (/F^m/ = R^m)$  (klasy  $C_\infty$ ) stanowiącą nasze włókno wzorcowe.



Uwaga. Rozmaite spośród wymienionych wielkości fizycznych, dotyczących dowolnych sieci elektrycznych, mogą podlegać pewnym ograniczeniom, np. forma kwadratowa zmiennych prądowych oparte na macierzy  $\tilde{M}$  (symetrycznej) jest istotnie dodatnio określona, macierze  $\tilde{R}$  i  $\tilde{S}$  są również symetryczne i odpowiednie formy kwadratowe oparte na nich są dodatnio określone. Analogiczne wnioski obowiązują dla macierzy  $\tilde{M}, \tilde{R}, \tilde{S}$ . Podobne ograniczenia (np. wzór (19); pozostaje też kwestia ewentualnych obcięć włókien dla wielkości  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  w oparciu o ich definicje) sugerują, że włókno wzorcowe wiązki jest zbyt "szeroko zakrojone". Zacieśnienie go wiązałoby się z wyznaczeniem włókna podobiektu abstrakcyjnego złożonego ([11], ss. 62,66) obiektu związanego z włóknem wzorcowym  $F^m$ . Powstaje też pytanie, czy takie obcięte włókno da się przedstawić jako rozmaitość różniczkowa będąca podrozmaitością " $F^m$ " (z topologią indukowaną). Jak widać obcięcie włókna byłoby procederem bardzo skomplikowanym i dlatego pominiemy go.

Posiadając już grupę Liego  $G^r$  i włókno wzorcowe  $F^m$  trzeba zdefiniować działanie  $\circ$  i zarazem grupę Liego przekształceń  $(G^r, F^m, \circ)$ . W tym celu scharakteryzujemy najpierw wymienione wielkości fizyczne jako pewne obiekty abstrakcyjne specjalne podając ich prawa transformacji. Kwestie pewnego wyboru tych praw oraz ich weryfikacji eksperymentalnej omówimy później.

$$\tilde{q}^{g'} = c_{g'}^{gh} \tilde{q}^h. \quad (21)$$

Jest to prawo transformacji wektora kontrawariantnego. Podobne prawo obowiązuje dla wielkości o składowych  $(\tilde{q}^g)$ . Matematyczne uzasadnienie tych praw polega w pierwszym przypadku na spostrzeżeniu, że wektor o składowych  $(\tilde{q}^g)$  może być stycznym do nośnika ([16], s. 451) gładkiej krzywej parametrycznej  $q$  w pewnym jego punkcie oraz w drugim, że transformacje wiążące układy współrzędnych rozmaitości  $X^n$  są liniowe.

$$(c) \tilde{u}_{g'} = c_{g'}^g (c) \tilde{u}_g. \quad (22)$$

Jest to prawo transformacji wektora kowariantnego. Podobne prawo mamy dla wielkości o składowych  $\tilde{e}, \tilde{a}$ . Wielkości o składowych  $\tilde{M}, \tilde{R}, \tilde{S}$  transformują się jak tensory o walencji (0,2). Przykładowo:

$$\tilde{M}_{g' h'} = c_{g'}^g c_{h'}^h \tilde{M}_{gh}. \quad (23)$$

Spostrzegamy, że wymienione reguły transformacji nie zależą od elementów  $d'$  grupy  $GL(f, R)$ . Reguły transformacji dla wielkości o składowych  $\tilde{Q}, \tilde{\tilde{Q}}$ , dotyczących drugiej wiązki są następujące:

$$\tilde{Q}^{k'} = d_k^{k'} \tilde{Q}^k, \quad (24)$$

zaś dla wielkości o składowych (c)  $\tilde{U}, \tilde{E}, \tilde{A}$

$$(c) \tilde{U}_{k'} = d_k^{k'} (c) \tilde{U}_k. \quad (25)$$

Dla " $\tilde{M}$ ", " $\tilde{R}$ ", " $\tilde{S}$ " mamy:

$$\tilde{M}_{k' l'} = d_k^{k'} d_l^{l'} \tilde{M}_{kl}. \quad (26)$$

Z kolei teraz reguły (24), (25), (26) nie zależą od elementów  $c'$  grupy  $GL(n, R)$ . Pozostaje podać reguły transformacji dla wielkości o składowych  $\underline{b}$  i  $\underline{b}$  oraz sposób ich powiązania dla rozmaitości  $\gamma^f$ .

$$\tilde{b}_{k'}^{g'} = c_g^{g'} d_k^{k'} \tilde{b}_k^g. \quad (27)$$

$$\underline{b}_{g'}^{k'} = d_k^{k'} c_g^{g'} \underline{b}_g^k. \quad (28)$$

Są to reguły obowiązujące dla wielkości rozdwojonych ([9], s. 152).

Wprowadźmy teraz najeżenie rozmaitości  $\gamma^f$  ([9], ss. 154, 155):

$$\begin{array}{l} 0, \quad g \in \{1, \dots, f\}, \quad w \in \{f+1, \dots, n\}, \\ \delta_w^g = \begin{cases} 1 & g = w, \\ 0 & g \neq w, \end{cases} \quad g, w \in \{f+1, \dots, n\}. \end{array} \quad (29)$$

Następnie, w stosunku do macierzy utworzonej z wyrazów  $b_k^g$  oraz  $b_w^g$  (wskaźnik  $g$  uważamy za wierszowy), zdefiniujemy macierz odwrotną o wyrazach  $\underline{b}_h^k$ ,  $\underline{b}_h^w$  (wskaźnik  $h$  - kolumnowy). Jest to możliwe, bowiem jeśli dla pierwszych  $f$  spośród wskaźników  $g$  możemy z założenia zbudować podmacierz nieosobliwą macierzy  $b$ , to na skutek przedstawionego doboru najeżenia rząd odwracanej macierzy równy jest  $n$ . Mamy więc:

$$b_k^g \underline{b}_h^k + b_w^g \underline{b}_h^w = \delta_h^g, \quad (30)$$

$$g, h \in \{1, \dots, n\},$$

$$k \in \{1, \dots, f\}, \quad w \in \{f+1, \dots, n\}.$$

Wzór (30) zachowuje swoją postać po dokonaniu transformacji (27), (28), jeśli założymy, że wielkości o składowych  $\underline{b}$ ,  $\underline{b}^w$  transformują się kolejno jak wektory kontrawariantne oraz kowariantne - wskaźniki  $w$  są martwe ([9], s. 36). Czyli wzór ten jest współmienniczy (kowariantny). Dla zaznaczenia faktu, że po dokonaniu transformacji wzór (29) nie musi obowiązywać, stosujemy gwiazdkę nad znakiem równości (porównaj np.: [9], s. 62). Odwracając wprowadzoną macierz kwadratową typu  $(n,n)$  po dokonaniu transformacji (27), (28) i porównując ze współmienniczym wzorem (30) widzimy, że wyrazy macierzy odwrotnej transformują się kolejno jak wielkości o składowych  $(\underline{b}^k_h)$  oraz  $(\underline{b}^w_h)$ . Można poza tym przekonać się, że zachodzą następujące wzory:

$$\underline{b}^k_h \stackrel{*}{=} 0, \quad \begin{matrix} k \in \{1, \dots, f\}, \\ h \in \{f+1, \dots, n\}. \end{matrix} \quad (31)$$

$$\underline{b}^w_h \stackrel{*}{=} \delta^w_h, \quad w, h \in \{f+1, \dots, n\}. \quad (32)$$

Wielkość  $\underline{b}$  potrzebna jest np. do obliczenia " $\underline{Q}$ " z następującego wzoru:

$$\underline{Q}^g = \underline{b}^g_k \underline{Q}^k, \quad (33)$$

dla " $\underline{Q}$ " wziętego z przeciwdziedziny występującego tu odwzorowania. Wówczas:

$$\underline{Q}^k = \underline{b}^k_g \underline{Q}^g. \quad (34)$$

Oczywiście macierz  $\underline{b}$  nie jest jedyną pozwalającą odwrócić wzór (33). Spostrzegamy jednocześnie, że za pomocą wielkości  $\underline{b}$  jesteśmy w stanie dokonać rzutowania wielkości kontrawariantnych na rozmierność  $Y^f$  (nie tylko w przypadku wektorów kontrawariantnych i nie tylko, gdy jak we wzorach (33), (34), wektor ten jest styczny do " $Y^f$ "). Obserwując obecność składowych wielkości  $\underline{b}$  we wzorze (18) stwierdzamy, że odgrywa ona rolę tensora pośredniczącego dla rozmierności  $Y^f$ ,  $X^n$  ([9], s. 153). Oprócz tego widzimy, że wzory (17), (18), (19) są współmiennicze.

Uwaga. Przyjmujemy dodatkowo, że wielkość o składowych  $\underline{Q}^g$  posiada regułę transformacji wektora kontrawariantnego względem struktury rozmierności  $X^n$ , a wielkości o składowych  $\underline{Q}^g$  - skalarów. Oprócz tego siły elektromotoryczne obwodów niezależnych pochodzące od ładunków początkowych oraz całkowite siły elektromotoryczne tych obwodów opisywane są składowymi  $\underline{E}$ ,  $(c)\underline{E}$  wektorów kowariantnych względem struktury rozmierności  $Y^f$ . Dla

uproszczenia konstrukcji wiązki nie umieszczamy ich we włóknie wzorcowym.

Układając składowe wymienionych obiektów abstrakcyjnych w ciąg w kolejności wymienionej poprzednio oraz uwzględniając podane reguły transformacyjne otrzymujemy obiekt abstrakcyjny złożony o składowych  $\tilde{W} \in R^m = /F^m/$  oraz regule transformacji zapisanej następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{W}' &= l_{(c,d)}(\tilde{W}) = (c,d) \circ \tilde{W}, \\ (c,d) &\in /G^r/, \quad \tilde{W} \in /F^m/. \end{aligned} \quad (35)$$

Ponieważ reguły transformacji obiektów składających się na nasz obiekt złożony spełniają równanie fundamentalne i warunek identyczności ([11], s. 61) (kontrola tego faktu jest prosta), więc reguła dla obiektu złożonego (zupełnie przywiedlnego) też podobne równania spełnia. Jest to obiekt liniowy jednorodny ([11], s. 65). Nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie  $l_{(c,d)}$  jest bijekcją " $R^m$ " na " $R^m$ ". W dalszym ciągu stwierdzamy, że działanie (określone wzorem (35))  $\circ : /G^r/ \times /F^m/ \rightarrow /F^m/$  jest odwzorowaniem klasy  $C_\infty$  oraz odwzorowanie  $l_{(c,d)}$  jest dla każdego elementu  $(c,d)$  defeomorfizmem klasy  $C_\infty$ . Następnie dla dowolnych elementów  $(c_1, d_1), (c_2, d_2) \in /G^r/$  zachodzą związki:

$$l_{(c_2, d_2)} \circ (c_1, d_1) = l_{(c_2, d_2)} \circ l_{(c_1, d_1)}. \quad (36)$$

(kropka jest działaniem mnożenia w grupie  $G^r$ ) oraz

$$l_e = id_{R^m}. \quad (37)$$

gdzie "e" jest elementem neutralnym grupy  $G^r$ . Związki (36), (37) są właśnie odpowiednio równaniem fundamentalnym naszego obiektu złożonego oraz warunkiem identyczności zapisanymi w terminologii algebraicznej wzorowanej na pracy [19], s. 39. Mamy zatem spełnioną aksjomatykę grupy Liego przekształceń (lewostronnych)  $(G^r, F^m, \circ)$ .

Uwaga. Wprowadzony obiekt złożony jest obiektem efektywnym ([10]; [19], s. 39), między innymi ze względu na obecność obiektów składowych będących wektorami kontrawariantnymi względem grupy  $GL(n, R)$  oraz obiektów  $b, \underline{b}$ . Nie wszystkie jednak poszczególne obiekty składające się na niego są obiektami efektywnymi względem grupy  $G^r$ , np. nie są nimi wszystkie o regule transformacyjnej zdefiniowanej w oparciu o jedną tylko grupę  $GL(n, R)$ . Skutek tego jest taki, że istnieją elementy  $d_1 \neq d_2$ , takie że zachodzi równość:  $l_{(c_1, d_1)} = l_{(c_2, d_2)}$ . Wydaje się, że ze względu na prostotę oraz szeroko znane zastosowania używanych tu obiektów geometrycznych, lepiej zde-



cydować się na ich nieefektywność, niż na zastosowanie takiej procedury jak opisana w twierdzeniu 4 na str. 124 książki [19] doprowadzającej do obiektu efektywnego i efektywnej grupy Liego przekształceń.

Zgodnie z naszkicowanym programem postępowania podamy teraz otwarte pokrycie rozmaitości bazowej  $Y^f$ . Jako zbiór indeksów  $I$  dla tego pokrycia przyjmiemy zbiór par uporządkowanych indeksów numerujących kolejno mapy atlasu rozmaitości  $X^n$  oraz  $Y^f$ . Czyli zachodzi:  $(\alpha_x, \alpha_y) \in I$ . Dla uproszczenia pisowni zamiast  $\alpha_x$  stosujemy oznaczenie  $\alpha$ , zamiast  $\alpha_y$  -  $\beta$ . Każdy ze zbiorów pokrycia jest identyczny z  $"/Y^f/"$  ( $U_{(\alpha, \beta)} = /Y^f/$ ).

Zdefiniujemy następnie pojęcie kielków dla dowolnych dyfeomorfizmów (co najmniej klasy  $C_1$ ) zbiorów otwartych " $R^n$ " oraz zbiorów otwartych " $R^r$ " ([20], s. 68). Są nimi odpowiednio klasy równoważnych (w sensie równoważności logicznej) uporządkowanych par  $(\tilde{q}, t)$  oraz  $(\tilde{Q}, T)$  ( $\tilde{q} \in D(t)$ ,  $\tilde{Q} \in D(T)$ ). Pary  $(\tilde{q}, t)$  oraz  $(\tilde{q}_1, t_1)$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:  $\tilde{q} = \tilde{q}_1$  oraz istnieje taki zbiór otwarty  $U$  w przestrzeni  $R^n$ , dla którego mamy  $t|U = t_1|U$ . Podobne rozumowanie przeprowadzamy dla " $(\tilde{Q}, T)$ ". Tworzymy pary uporządkowane kielków  $[\tilde{q}, t]$  i  $[\tilde{Q}, T]$ , tzn.:  $([\tilde{q}, t], [\tilde{Q}, T])$ . W zbiorze tak otrzymanych par kielków wprowadzamy złożenie oznaczone  $\square$ :

$$([\tilde{q}, t], [\tilde{Q}, T]) = ([\tilde{q}', t'], [\tilde{Q}', T']) \square ([\tilde{q}, t], [\tilde{Q}, T]), \quad (38)$$

odzie

$$\tilde{q}' = t'(\tilde{q}), \quad \tilde{Q}' = T'(\tilde{Q}),$$

$$t'' = t' \circ t, \quad T'' = T' \circ T$$

łatwo zauważyć, że nie wszystkie pary kielków są składalne, a dla tych, które są - złożenie nie zależy od wyboru ich reprezentantów. Wspomniany zbiór par kielków wraz ze złożeniem  $\square$  tworzy grupoid Brandta ([11], ss. 41, 42). Oznaczmy go GB.

• Odwzorujemy przedstawiony powyżej grupoid Brandta (jego podkład /GB/) na zbiór par uporządkowanych złożonych kolejno z macierzy pochodnych cząstkowych transformacji  $t'$  w punkcie  $\tilde{q}$  oraz  $T'$  w punkcie  $\tilde{Q}$ , czyli na  $"/G^r/"$

$$([\tilde{q}, t'], [\tilde{Q}, T']) \mapsto (A'(\tilde{q}), B'(\tilde{Q})),$$

gdzie

$$\begin{aligned} A'(\tilde{q}) &= [A_g^g(\tilde{q})], & A_g^g(\tilde{q}) &= \frac{\partial t^g}{\partial \tilde{q}^g}(\tilde{q}), \\ B'(\tilde{Q}) &= [B_k^k(\tilde{Q})], & B_k^k(\tilde{Q}) &= \frac{\partial T^k}{\partial \tilde{Q}^k}(\tilde{Q}). \end{aligned} \quad (39)$$



Powyższe odwzorowanie jest suriekcją, lecz nie jest injekcją. Stosując twierdzenie o różniczkowaniu złożenia odwzorowań oraz wzór (38) łatwo zauważyć, że mamy tu do czynienia z homomorfizmem, dokładniej - epimorfizmem grupoidu GB na grupę  $G^r$ , powstałą przez pominięcie struktury różniczkowej grupy Liego  $G^r$  (porównaj: [20], s. 69).

Uwaga. Wprowadzenie grupoidu Brandta kielków nie jest niezbędne do przeprowadzenia żądanej konstrukcji wiązki. Został on podany, aby uwypuklić możliwość określenia pewnych struktur algebraicznych w zbiorze klas dyfeomorfizmów pozwalających na wyznaczenie elementów grupy  $G^r$ . Innym pojęciem, które również mogłoby tu być zastosowane jest grupoid Brandta żetów ([11], s. 54).

Powiązemy następnie transformacje uzyskiwane za pomocą map różniczkowości  $X^n$  oraz  $Y^f$  z dyfeomorfizmami występującymi w definicji naszego grupoidu Brandta oraz zdefiniujemy odwzorowania

$$g(\beta'/\beta)(\alpha'/\alpha) : U(\beta'/\beta) \cap U(\alpha'/\alpha) \longrightarrow /G^r/, (\alpha'/\alpha), (\beta'/\beta) \in I \quad (40)$$

występujące w przytoczonym twierdzeniu o konstrukcji wiązki.

$$\begin{aligned} t' &= \tau_{\beta'\alpha'} = u_{\beta'} \circ u_{\alpha'}^{-1}, & T' &= T_{\beta'\alpha'} = u_{\beta'} \circ u_{\alpha'}^{-1}, \\ t'' &= \tau_{\alpha'\beta} = u_{\alpha'} \circ u_{\beta}^{-1}, & T'' &= T_{\alpha'\beta} = u_{\alpha'} \circ u_{\beta}^{-1}, \\ t''' &= \tau_{\alpha'\alpha} = u_{\alpha'} \circ u_{\alpha'}^{-1}, & T''' &= T_{\alpha'\alpha} = u_{\alpha'} \circ u_{\alpha'}^{-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Naśladując definicje macierzy  $A'(\vec{q})$ ,  $B'(\vec{Q})$  ze wzoru (39) oraz posługując się wzorami (16), (20) mamy:

$$\begin{aligned} A'(\vec{q}) &= c', & B'(\vec{Q}) &= (c', d'), \\ A''(\vec{q}) &= c'', & B''(\vec{Q}) &= (c'', d''), \\ A'''(\vec{q}) &= c''', & B'''(\vec{Q}) &= (c''', d'''). \end{aligned} \quad (42)$$

oraz

$$\begin{aligned} g(\beta'/\beta)(\alpha'/\alpha)(y) &= A'(\vec{q}), & B'(\vec{Q}) &= (c', d'), \\ g(\alpha'/\beta)(\beta'/\beta)(y) &= (A''(\vec{q}), B''(\vec{Q})) = (c'', d''), \\ g(\alpha'/\alpha)(\alpha'/\alpha)(y) &= (A'''(\vec{q}), B'''(\vec{Q})) = (c''', d'''). \end{aligned} \quad (43)$$

dla

$$\begin{aligned} \bar{q} &= u_{\alpha'}(y), & \bar{Q} &= u_{\alpha}(y), \\ \bar{q}' &= u_{\beta'}(y), & \bar{Q}' &= u_{\beta}(y), \quad y \in /Y^f/. \end{aligned}$$

Stąd też wynika:

$$g_{(\eta' \eta)}(\alpha' \beta)(y) = g_{(\eta' \eta)}(\beta' \beta)(y) \cdot g_{(\beta' \beta)}(\alpha' \alpha)(y), \quad (44)$$

dla dowolnych elementów  $y \in /Y^f/$ ,  $(\alpha' \alpha)$ ,  $(\beta' \beta)$ ,  $(\eta' \eta) \in I$ .

Widzimy jednocześnie, że odwzorowania (40) są klasy  $C_{\infty}$ .

Zaznaczmy jeszcze sposób powiązania map atlasu wiązki oraz map rozmaitości bazowej  $Y^f$  i rozmaitości wiązki  $B^N$ . Czyli zapiszmy w naszym przypadku wzór (15):

$$u_{(\alpha' \alpha)} = (u'_{\alpha'} \times id_{R^m}) \circ \psi_{(\alpha' \alpha)}. \quad (45)$$

Zaden z atlasów rozmaitości  $B^N$ ,  $Y^f$ ,  $F^m$ ,  $G^r$ , ani też atlas wiązki  $\Psi$  nie są tutaj maksymalne.

Uwaga. Moglibyśmy dla rozmaitości  $G^r$ ,  $F^m$  wprowadzić atlasy maksymalne i działanie zapisane we wzorze (35) traktować jako przeprowadzane tylko na punktach należących do  $/G^r/$  i  $/F^m/$ , nie pytając jak go zapisać w poszczególnych układach współrzędnych rozmaitości  $G^r$  i  $F^m$ . Dzięki wprowadzeniu jednej mapy dla  $"F^m"$  mamy jednak bardzo proste powiązanie map rozmaitości  $B^N$  z mapami rozmaitości  $Y^f$ ,  $F^m$  i atlasu wiązki  $\Psi$ . Moglibyśmy również operować atlasem maksymalnym rozmaitości bazowej, lecz wówczas rozpatrywane obiekty geometryczne byłyby określone wyłącznie dla map rozmaitości  $Y^f$  wprowadzonych przy pomocy wzoru (20).

W ten sposób zakończyliśmy konstrukcję pierwszej z wiązek oznaczonej literą  $W$ ,  $W = (B^N, Y^f, F^m, G^r, \circ, \rho, \Psi)$ . Ponieważ przeciwobrazy map atlasu tej wiązki są iloczynami kartezjańskimi  $/Y^f/ \times /F^m/$ , więc jest ona trywialna (porównaj: [19], s. 97).

Uwaga. Zauważmy, że w przypadku operowania rozmaitościami  $Y^f$  i  $X^N$  klasy  $C_k$  oraz obiektami abstrakcyjnymi specjalnymi klasy  $s$  ([11], s. 58), (ze względu na struktury obu rozmaitości), klasa odwzorowań przejścia  $g_{(\beta' \beta)}(\alpha' \alpha)$  byłoby  $C_{k-s}$  (zakładamy:  $k-s > 0$ ). Między innymi z tego powodu wygodnie jest używać, jak to zaznaczono w punkcie 2, wszystkich rozmaitości i odwzorowań klasy  $C_{\infty}$ .

Przedstawiona konstrukcja wiązki uprościłaby się dość znacznie, gdyby nie obecność obiektów rozdwojonych. Następną wiązką (której sposób wprowadzenia już tylko naszkicujemy) będzie pozbawiona takich obiektów, ponieważ związana będzie wyłącznie z wielkościami elektrycznymi obwodowymi.

Rolę rozmaitości bazowej dla wiązki tej spełnia również, ta sama co poprzednio, rozmaitość współrzędnościowa  $Y^f$  służąca do rejestracji łańdunków obwodowych. Grupą Liego będzie grupa  $GL(f, R) = {}^1G^r$  ( $r = f^2$ ). Zbiór  $R^m$  ( $m = 4f + (n-f)f + 3f^2$ ) tworzymy z kolei dla rejestracji wielkości obwodowych o składowych  $(\vec{Q}, \vec{O}, (c) \vec{U}, \vec{E}, \vec{A}, \vec{M}, \vec{R}, \vec{S})$ . Posiada on naturalną topologię oraz atlas złożony z jednej mapy będącej tożsamościowym odwzorowaniem " $R^m$ " na " $R^m$ ". W ten sposób powstaje włókno wzorcowe  ${}^1F^m$ . Dla wymienionych wielkości obwodowych zachowujemy poprzednio podane reguły transformacji ich składowych, czyli charakteryzujemy je tymi samymi obiektami abstrakcyjnymi specjalnymi. Uwzględniając ww. kolejność ich składowych konstruujemy z nich obiekt abstrakcyjny złożony o regule transformacji, którą zapiszemy następująco:

$${}^1\vec{w}' = l_d({}^1\vec{w}) = d \circ {}^1\vec{w}, \quad (46)$$

$$d \in {}^1G^r, \quad {}^1\vec{w} \in {}^1F^m.$$

Podobnie też stwierdzamy, że odwzorowanie  $l_d$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C_\infty$  " ${}^1F^m$ " na " ${}^1F^m$ " oraz działanie  $\circ$  jest odwzorowaniem klasy  $C_\infty$ . Zachodzi równocześnie dla dowolnych elementów  $d_1, d_2 \in {}^1G^r$  związek:

$$l_{d_2} \circ l_{d_1} = l_{d_2} \circ l_{d_1} \quad (47)$$

oraz

$$l_e = id_{R^m} \quad (48)$$

(symbol  $\cdot$  jest działaniem mnożenia w grupie  ${}^1G^r$ , " $e$ " jest elementem neutralnym tej grupy). Czyli mamy do czynienia z grupą Liego przekształceń (lewostronnych)  $({}^1G^r, {}^1F^m, \circ)$ . Ze względu na obecność w opisanym obiekcie abstrakcyjnym złożonym wektorów kontrawariantnych, względnie kowariantnych, grupa ta jest efektywna. Za zbiór indeksów  $I$  otwartego pokrycia rozmaitości bazowej przyjmiemy tu zbiór indeksów map atlasu tej rozmaitości. Indeksy te oznaczymy symbolami  $\alpha, \beta, \gamma \in I$ . Odwzorowania przejścia klasy  $C_\infty$

$$g_{\beta\alpha} : U_{\beta n} \cap U_{\alpha} \rightarrow {}^1G^r, \quad (49)$$

$$u_{\alpha} = u_{\beta} = {}^1Y^f$$

definiujemy następująco:

$$T^{\alpha} = T_{\beta\alpha} = u_{\beta} \circ u_{\alpha}^{-1}$$

$$B'(\bar{Q}) = [B_k^{k'}(\bar{Q})], \quad B_k^{k'}(\bar{Q}) = \frac{\partial T^k}{\partial Q^k}(\bar{Q}).$$

$$g_{\beta\alpha'}(y) = B'(\bar{Q}) = d' \tag{50}$$

dla

$$\bar{Q} = u_{\alpha'}(y), \quad y \in /Y^f/.$$

Podobnie zachodzi związek:

$$g_{\gamma\alpha'}(y) = g_{\gamma'\beta'}(y) \cdot g_{\beta'\alpha'}(y),$$

dla dowolnych elementów (51)

$$y \in /Y^f/, \quad \alpha', \beta', \gamma \in I.$$

Mamy też odpowiednik wzoru (45):

$$u_{\beta'\alpha'} = (u_{\alpha'} \times id_{R^m}) \circ \psi_{\beta'}. \tag{52}$$

Symbolem  $u_{\beta'\alpha'}$  oznaczyliśmy tu mapę rozmiotności wiązki. W oparciu o twierdzenie przedstawione w punkcie 3 konstruujemy wobec tego wiązkę trywialną wielkości obwodowych  ${}^1W = (B^N, Y^f, F^m, G^r, \theta, \rho, \Psi)$ . Kreski występujące z lewej strony przy oznaczeniach pewnych elementów tej wiązki związane są zamiarem powiązania obu wiązek  $W$  oraz  ${}^1W$  za pomocą pewnego morfizmu naśladującego rzutowanie obiektów geometrycznych na podrozmiotność ([9], ss. 154, 155).



## 5. KONSTRUKCJA PEWNEGO MORFIZMU WIĄZKI W W WIĄZKĘ 'W

Morfizmem wiązki  $W$  w wiązkę  $'W$  ([19], ss. 101, 102) nazywamy następujący ciąg odwzorowań  $(\bar{h}, h, h_1, h_0, \hat{h})$  (klasy  $C_\infty$ ):

$$\begin{aligned} \bar{h}: /B^N/ &\longrightarrow /B'^N/, & h: /Y^f/ &\longrightarrow /Y'^f/, \\ h_1: /F^m/ &\longrightarrow /F'^m/, & h_0: /G^r/ &\longrightarrow /G'^r/, \\ \hat{h}: /H^M/ &\longrightarrow /H'^M/, & M = f+r, & 'M = f+r, \end{aligned} \quad (53)$$

gdzie  $"H^M"$ ,  $"H'^M"$  są odpowiednio rozmaitościami głównych wiązek włóknistych  $W, W'$ , przyporządkowanych wiązkom  $W, 'W$  ([19], ss. 82, 88). W przypadku tutaj rozważanym rozmaitości bazowe obu wiązek  $W, 'W$  są identyczne - ogólnie nie musi tak być. Odwzorowania wymienionego ciągu spełniają pewne warunki, które będziemy omawiać, budując nasz przykład morfizmu.

Odwzorowanie  $h_0$  (suriekcja klasy  $C_\infty$ ) zdefiniowane jest następująco:

$$h_0(c, d) = d, \quad (c, d) \in G^r. \quad (54)$$

Łatwo spostrzec, że odwzorowanie  $h_0$  jest epimorfizmem grupy  $G^r$  na grupę  $'G^r$ .

Odwzorowanie  $h_1$  (suriekcja klasy  $C_\infty$ ) podane jest za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^k &= \tilde{b}_g^k \tilde{q}^g, \\ \tilde{O}^k &= \tilde{b}_g^k \tilde{o}^g, \\ (c) \tilde{U}_k &= \tilde{b}_g^k (c) \tilde{u}_g, \\ \tilde{E}_k &= \tilde{b}_g^k \tilde{e}_g, \\ \tilde{A}_k &= \tilde{b}_g^k \tilde{a}_g, \\ \tilde{M}_{k1} &= \tilde{b}_g^k \tilde{M}_{gh} \tilde{b}_1^h. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{kl} &= \tilde{b}_k^g \tilde{r}_{gh} \tilde{b}_l^h, \\ \tilde{s}_{kl} &= \tilde{b}_k^g \tilde{s}_{gh} \tilde{b}_l^h. \end{aligned} \quad (55)$$

Na podstawie reguł transformacyjnych wielkości związanych z włóknami  $F^m$  i  $'F^m$  oraz wzorów (55) stwierdzamy spełnienie dla dowolnego elementu  $(c,d) \in /G^r/$ , równania:

$$l_{h_0}(c,d) \circ h_1 = h_1 \circ l(c,d), \quad (56)$$

które można zapisać w postaci przemiennej diagramu

$$\begin{array}{ccc} /F^m/ & \xrightarrow{l(c,d)} & /F^m/ \\ \left. \begin{array}{c} h_1 \\ \\ \\ \end{array} \right| & & \left| \begin{array}{c} h_1, (c,d) \in /G^r/. \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ /F^m/ & \xrightarrow{l_{h_0}(c,d)} & /F^m/ \end{array} \quad (57)$$

Jeśli uporządkowane trójki  $(G^r, F^m, \circ)$ ,  $(G^r, 'F^m, \circ)$  są grupami Liego przekształceń (lewostronnych) oraz spełnione jest równanie (56) (czy też diagram (57)), " $h_0$ " jest homomorfizmem grupy  $G^r$  w grupę  $'G^r$ , to uporządkowaną parę odwzorowań  $(h_0, h_1)$  (pewnej klasy) nazywamy współzgodną ([19], s. 43). W naszym przypadku mamy więc do czynienia z odwzorowaniami współzgodnymi  $(h_0, h_1)$ .

Zauważmy, że równanie (56) podobne jest do tego, jakie występuje w definicji komitanty dwu obiektów abstrakcyjnych specjalnych ([11], s. 88). Różnice polegają na tym, że definiując komitantę nie żądamy różniczkowości odwzorowań  $h_0, h_1$  oraz odwzorowanie  $h_0$  jest identycznością. We wzorach (55) dostrzegamy definicję rzutu wielkości kontra i kowariantnych na podrozmaitość  $Y^f$ . Na razie jednak, rzut ten dotyczy tylko samego powiązania punktów włókien wzorcowych  $F^m$  i  $'F^m$ . Celem naszym będzie teraz powiązanie obiektów geometrycznych szczególnych, czyli punktów rozmaitości wiązek  $B^N$  i  $'B^N$ .

Aby to osiągnąć zbudujemy najpierw jeszcze współzgodną parę odwzorowań  $(h_0, \hat{h})$ . Odwzorowanie  $\hat{h}$  definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} z &= \hat{h}_H(z) = r_{H^f}^{-1}(h_0(\psi_H(\sigma_H^f \circ \psi_H(z)))). \\ y &= p_H(z) = p_H(z), \quad z \in /H^M/. \end{aligned} \quad (58)$$

Wykorzystując reguły transformacji dla elementów włókien wzorcowych obu wiązek głównych (porównaj wzór (6)) oraz fakt, że odwzorowanie  $h_0$  stanowi epimorfizm grupy  $G^r$  na grupę  $'G^r$ , łatwo wykazać, że odwzorowanie  $\hat{h}$  nie zależy od wyboru map o indeksach  $\alpha, ' \alpha$ , czyli jest prawidłowo określone. (Mapy rozmaitości bazowej oraz atlasu wiązki i rozmaitości wiązki indeksowane są tak samo w przypadku wiązek  $W, W$ , jak i odpowiednio wiązek  $W, 'W$ .) Jednocześnie spostrzegamy, że odwzorowanie  $h = \text{id} / \gamma^f$  rozmaitości bazowych wiązek głównych. Działania  $\circ, \circ$  (klasy  $C_\infty$ ) oraz odwzorowania  $l_{H(c,d)} \cdot l_H d$  (dyfeomorfizmy klasy  $C_\infty$ ) definiujemy poniżej (porównaj: [19], s. 85):

$$(c,d) \circ z = l_{H(c,d)}(z) = \psi_{H(\alpha'\alpha)}^{-1} \gamma_{H(\alpha'\alpha)}(\psi_{H(\alpha'\alpha)}(z) \cdot (c,d)^{-1}),$$

$$y = p(z), \quad z \in /H^M/, \quad (c,d) \in /G^r/, \quad (59)$$

$$d \circ z = l_H d(z) = \psi_{H(\alpha'\alpha)}^{-1}(\psi_{H(\alpha'\alpha)}(z) \cdot d^{-1}),$$

$$y \in p(z), \quad z \in /H^M/, \quad d \in /G^r/. \quad (60)$$

Podobnie jak w przypadku odwzorowania  $\hat{h}$  można wykazać, że odwzorowania  $l_{H(c,d)} \cdot l_H d$  nie zależą od wyboru map  $\alpha, ' \alpha$ . Stwierdzamy następnie, że warunki podobne do określonych wzorami (36), (37), (47), (48) są spełnione, czyli mamy do czynienia z grupami Liego przekształceń (lewostronnych)  $(G^r, H^M, \circ)$ ,  $(G^r, 'H^M, \circ)$ . W dalszym ciągu można wykazać spełnienie dla dowolnego elementu  $(c,d) \in /G^r/$ , równania:

$$l_H h_0(c,d) \circ \hat{h} = \hat{h} \circ l_H(c,d). \quad (61)$$

lub też przemiennego diagramu

$$\begin{array}{ccc} /H^M/ & \xrightarrow{l_H(c,d)} & /H^M/ \\ \hat{h} \Big| & & \Big| \hat{h} \\ /H^M/ & \xrightarrow{l_H h_0(c,d)} & /H^M/, \quad (c,d) \in /G^r/. \end{array} \quad (62)$$

Wobec tego odwzorowania  $(h_o, \hat{h})$  są współzgodne oraz odwzorowanie  $h$  wyznacza z pomocą rzutów  $p$  i  $p'$  odwzorowanie  $h$ . Stanowią one tzw. homomorfizm wiązek ([19], s. 94).

Odwzorowanie  $\hat{h}$  posłuży nam teraz do konstrukcji odwzorowania  $\bar{h}$

$$\bar{h} = \left[ \begin{array}{c} \hat{h}(z) \\ H \end{array} \right] \circ h_1 \circ \left[ \begin{array}{c} z \\ H \end{array} \right]^{-1}, \quad z \in /H^M/. \quad (63)$$

gdzie dla  $z \in p^{-1}(\{y\})$  dyfeomorfizmy klasy  $C_\infty \left[ \begin{array}{c} z \\ H \end{array} \right]^{-1}$

$$\left[ \begin{array}{c} z \\ H \end{array} \right]^{-1} : p^{-1}(\{y\}) \rightarrow /F^m/ \quad \text{oraz} \quad \left[ \begin{array}{c} \hat{h}(z) \\ H \end{array} \right] : /F^m/ \rightarrow p'^{-1}(\{y\})$$

zdefiniowane są następująco (patrz: [19], s. 89):

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \left[ \begin{array}{c} z \\ H \end{array} \right]^{-1}(z) = (\psi_{H'}(\alpha' \alpha) y_H(z))^{-1} \circ \psi_{H'}(\alpha' \alpha) y_H(z), \\ y &= p(z) = p_H(z), \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} 'z &= \left[ \begin{array}{c} \hat{h}(z) \\ H \end{array} \right] (\bar{w}) = \psi_{H'}^{-1}(\psi_{H'}(\alpha' \alpha) y_H(z)) \circ 'w = \\ &= \psi_{H'}^{-1}(h_o(\psi_{H'}(\alpha' \alpha) y_H(z)) \circ 'w), \end{aligned} \quad (65)$$

$$y = 'p('z) = p_H('z).$$

Można wykazać, że odwzorowanie  $\bar{h}$  jest suriekcją klasy  $C_\infty$  oraz że nie zależy ono od wyboru indeksów  $\alpha, \alpha'$  ani od wyboru elementu  $z \in p^{-1}(\{y\})$ . Od wyboru indeksów  $\alpha, \alpha'$  nie zależą również odwzorowania  $\left[ \begin{array}{c} z \\ H \end{array} \right]^{-1}$ ,  $\left[ \begin{array}{c} \hat{h}(z) \\ H \end{array} \right]$ . Sytuację opisaną wzorem (63) przedstawiamy za pomocą przemiennego (dla każdego elementu  $z \in /H/$ ) diagramu:

$$\begin{array}{ccc} /F^m/ & \xrightarrow{h_1} & /F^m/ \\ \left[ \begin{array}{c} z \\ H \end{array} \right] \downarrow & & \downarrow \left[ \begin{array}{c} \hat{h}(z) \\ H \end{array} \right] \\ /B^N/ & \xrightarrow{\bar{h}} & /B^N/ \end{array} \quad (66)$$



Mamy w ten sposób odwzorowane włókna rozmaitości  $B^N$  na włókna rozmaitości  $'B^N$ , czyli zachodzi rzutowanie obiektów specjalnych szczególnych na rozmaitość bazową  $Y^f$ . Jeśli obrac element  $z$  oraz w konsekwencji  $z$ , tak  $'H$  by dla pewnych wskaźników  $\alpha, ' \alpha$  zachodziły związki:

$$\psi_{H(\alpha y)}^{\alpha y}(z) = e, \quad \psi_{'H(\alpha y)}^{\alpha y}(z) = 'e$$

wzory (64), (65) przybiorą szczególnie przejrzystą postać.

Powracając do definicji morfizmów zamieszczonej na początku punktu 5, podamy teraz warunki, jakie musi spełniać ciąg odwzorowań różniczkowalnych  $(\bar{h}, h, h_1, h_0, \hat{h})$ . Mianowicie para  $(h_0, \hat{h})$  ma być homomorfizmem wiązek, para  $(h_0, h_1)$  - parą odwzorowań współzgodnych oraz dla dowolnego "z"  $'H$  diagram (66) ma być przemienny. W omawianym przykładzie, jak widać, warunki te są spełnione.

Umiejętność konstruowania dowolnych morfizmów wiązek polega na doborze trójki odwzorowań  $(h_0, h_1, \hat{h})$  spełniających dwa pierwsze z wymienionych warunków. Jak można wykazać, odwzorowanie  $\bar{h}$  określone przez wzór (63) jest wówczas zawsze niezależne od wyboru elementu  $z \in p^{-1}(\{y\})$ . W omawianym przykładzie morfizm można nazwać rzutem wiązki  $W$  na wiązkę  $'W$ . Dokonując rzutowania wiązek wystarczy właściwie zbudować parę odwzorowań współzgodnych  $(h_0, h_1)$ , gdyż odwzorowanie  $\hat{h}$  określone wzorem (58) zawsze spełni warunek (61), jeśli " $h_0$ " będzie określone wzorem (54). Podaną konstrukcję rzutowania wiązek można zastosować w przypadku teorii Lagrange'a układów elektromechanicznych. Występują tam również więzy powodujące, że nie każdy punkt rozmaitości  $X^N$  służącej do określenia położenia układu jest przez taki układ "osiągalny". Więzy te definiują podrozmaitość  $Y^f$  rozmaitości  $X^N$ . Stąd też pojawi się konieczność wprowadzenia operacji rzutowania wiązek.

## 6. SPOSÓB OPISU PRACY SIECI W WIĄZKACH $W, 'W$

Sam fakt dysponowania pojęciem odpowiedniej wiązki pozwala na rejestrację punktów pracy rozmaitych sieci w kolejnych momentach czasu. W naszym przypadku ustalimy wiązki  $W, 'W$  mamy możliwość analizy pracy konkretnej sieci o  $n$  gałęziach i  $f$  obwodach niezależnych dla ustalonych liczb  $n, f (n > f)$ . Jednakże wspomnianą rejestrację pracy sieci musi poprzedzić podanie równań opisujących ją i to w formie niezależnej od wyboru indeksów  $\alpha, ' \alpha$  map rozmaitości bazowej i jednocześnie map atlasu wiązek i rozmaitości wiązki (patrz wzory (45), (52)) - tzw. formie współzmienniczej.

W równaniach sieci figurować będzie zmienna czasu  $t$ . Czas nie był reprezentowany ani w rozmaitości bazowej, ani we włóknie wzorcowym. Możliwa jest realizacja bądź pierwszej z tych koncepcji, bądź drugiej. Wystarczy w tym celu wzbogacić rozmaitości  $X^n, Y^f$  o jeden wymiar i zmienną czasu transformować niezależnie, stosując dla niej transformację tożsamościową - dalszy tok postępowania byłby analogiczny do przedstawionego w punktach 4, 5. W drugiej koncepcji wzbogacamy włókna wzorcowe  $F^m$  oraz  $'F^m$  o jeden wymiar, traktując czas jako skalar (w sensie obiektu abstrakcyjnego). Przeprowadzenie rozważań podobnych jak w punktach 4, 5 i w tym przypadku nie nastrocza trudności. Oba wyjścia są jednak dość sztuczne. Pierwsze ze względów geometrycznych (transformacje wszystkich pozostałych wielkości nie ulegają wówczas zmianie); drugie ze względów fizykalnych, ponieważ wówczas, przynajmniej formalnie, transformacje dla czasu uważa się za uzależnioną od transformacji dotyczącej ładunków elektrycznych. Niebawem stwierdzimy, iż obrazem pracy sieci w przypadku ładunków elektrycznych obwodowych będzie krzywa parametryczna, której nośnik zawarty będzie w  $"/Y^f/$ . Gdyby w oparciu o ten nośnik można zawsze utworzyć rozmaitość jednowymiarową (podrozmaitość rozmaitości  $Y^f$ ), można by traktować chwile czasu jako współrzędne map takiej rozmaitości. Niestety nie zawsze tak musi być. Do tego dochodzi jeszcze kwestia osiągnięcia współzmienniczości równań sieci przy zmianie współrzędnych czasowych, która komplikuje taką koncepcję. Wobec powyższego pozostawimy tu czas jako wielkość natury niegeometrycznej przynajmniej w sensie reprezentowania go w rozpatrywanych wiązках. Stanowi to pewną lukę, ale upraszcza i tak już dość złązony opis sieci.

Podamy teraz równania sieci wiążące ze sobą składowe obiekty geometrycznych, dla kolejnych wartości zmiennej czasu  $t$ , występujących w jej

opisie. Jest to prawo zachowania ładunku elektrycznego dla rozpatrywanej sieci zapisane w zwyczajnej postaci

$$\sum_{g} a_{g} q^{g} = \sum_{o} Q, \quad (67)$$

lub też w formie parametrycznej

$$q^{g} = b_{k}^{g} Q^{k} + q_{o}^{g}, \quad (68)$$

gdzie

$$\sum_{o} Q = \sum_{g} a_{g} q^{g}, \quad (69)$$

drugie prawo Kirchhoffa dla naszej sieci

$$(c) U_{k} = b_{k}^{g} (c) u_{g} = 0 \quad (70)$$

oraz równania definicyjne gałęzi (rys. 1)

$$(c) u_{g} = M_{gh} \bar{q}^{h} + R_{gh} \dot{q}^{g} + S_{gh} q^{h} - e_{g}, \quad (71)$$

W świetle wzorów (16), (20), (22), (27), (25), (21), (23) oraz zamieszczonych uwag o wektorowym charakterze transformacji składowych  $\bar{q}_{o}^{g}$  i skalarnym  $\sum_{o} Q$  współzmienniczość równań (67) - (71) jest oczywista. We wzorach (67), (69) porównujemy dla poszczególnych wartości zmiennej  $t$  składowe skalarów, we wzorze (68) - wektorów kontrawariantnych (względem struktury rozmaitości  $x^{n}$ ), we wzorze (71) - wektorów kowariantnych (też względem struktury rozmaitości  $x^{n}$ ), we wzorze (70) występują składowe zerowego wektora kowariantnego (względem struktury rozmaitości  $Y^{f}$ ).

Równania te nie są zbyt wygodne do analizy, bowiem mamy  $n$  równań różniczkowych (wzór (71)) i również  $n$  algebraicznych (wzory (67), (70)). Podstawiając prawe strony zależności (68) do (71) i mnożąc te ostatnie przez " $b_{k}^{g}$ " otrzymujemy, po wykorzystaniu wzoru (70), równania obwodowe (oczkowe):

$$M_{kl} \ddot{Q}^{l} + R_{kl} \dot{Q}^{l} + S_{kl} Q^{l} = (c) E_{k}, \quad (72)$$

gdzie

$$'M_{k1} = b_k^g M_{gh} b_1^h, \quad (73)$$

$$'R_{k1} = b_k^g R_{gh} b_1^h, \quad (74)$$

$$'S_{k1} = b_k^g S_{gh} b_1^h. \quad (75)$$

$$(c)E_k = E_k + E_{\circ k}, \quad (76)$$

$$E_k = b_k^g e_g, \quad (77)$$

$$E_{\circ k} = -b_k^g S_{gh} q_o^h. \quad (78)$$

Na podstawie wzorów (20), (24), (25), (26), (23), (27), (22) stwierdzamy współzmienniczość wzorów (72) - (78).

Na ogół za wielkości zadane pewnej sieci można uważać, dla obranych układów współrzędnych o wskaźnikach  $\alpha$ ,  $\alpha'$  (zazwyczaj praukładów  $u_{p_x}$ ,  $u_{r_y}$ ), macierze  $a$ ,  $b$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $e$ ,  $q$ . W oparciu o nie obliczamy wielkości obwodowe  $'M$ ,  $'R$ ,  $'S$ ,  $E$ ,  $E_{\circ}$ ,  $(c)E$ . Zakładamy, że funkcja  $e$  i w ślad za nimi  $"E"$ ,  $(c)E$  są co najmniej klasy  $C_0$ . Następnie zakładając warunki początkowe  $Q(t_0) = 0$ ,  $\dot{Q}(t_0) = \overset{\circ}{I}$  rozwiązujemy równania (72) (jak wiadomo równania takie mają jednoznacznie określone rozwiązanie klasy  $C_2$  w zbiorze  $R$ , spełniające podane warunki początkowe). Założenie  $Q(t_0) = 0$  uczynione jest po to, by można interpretować na podstawie związku (68) stałe  $\overset{\circ}{q}^g$  (równe wartościom funkcji stałych  $q^g$ ) jako  $"q^g(t_0)"$ . Przyjmując dowolne wartości  $\overset{\circ}{I}$ , zakładamy milcząco, że rząd macierzy  $'M$  jest równy  $f$  (czyli, że równania (72) sprowadzalne są do postaci normalnej). Jeśli nie poczynimy żadnych uproszczeń odnośnie do indukcyjności, można wykazać, że tak jest rzeczywiście ([4], s. 35). Znając funkcję  $Q$  (co najmniej klasy  $C_2$ ) spełniającą równania (72), na podstawie równań (68) i (71) obliczamy funkcje  $q$  oraz  $(c)u$ . Łatwo przekonać się, że równania (70) będą wówczas spełnione. Odwrotnie jeśli funkcje  $q$ ,  $(c)u$  spełniają równanie (67), (70), (71), to wprowadzając funkcję  $Q$  za pomocą równań (68) stwierdzamy spełnienie przez nią równań (72).

Pracę sieci interpretujemy w łańcuchu  $W$ , podając krzywe parametryczne  $Q$ ,  $w$  (określone np. na całym zbiorze  $R$ ). Na podstawie wzoru (45) widać, że przy znajomości obu tych krzywych możemy skonstruować krzywą parametryczną, której nośnik zawarty będzie w  $"/B^N/"$ . Fizycznie oznacza to, że w danej chwili czasu  $t$  obserwujemy obiekt geometryczny złożony (szcze-



gólny) związany z naszą siecią elektryczną. Obiekt ten należy do wiązki nad punktem rozmaitości  $Y^f$  osiągniętym w tymże momencie  $t$ . Rzutując ten nośnik za pomocą "p" otrzymujemy wspomniany poprzednio nośnik zawarty w  $"/Y^f/"$  opisujący sam tylko przebieg ładunków obwodowych. Zupełnie podobny rezultat otrzymamy dla wiązki 'W, operując krzywymi parametrycznymi Q.'w. Wiązka ta, jak widać, dostosowana jest do operowania wyłącznie wielkościami obwodowymi.

## 7. WNIOSKI KOŃCOWE

Czytelnik, który zna zastosowania teorii wiązek w teorii pola elektromagnetycznego zastanawia się z pewnością nad motywacją wyboru wielkości fizycznych rejestrowanych w rozmaitości bazowej oraz we włóknach rozmaitości wiązki. Podobnie powstaje pytanie czemu reguły transformacyjne współrzędnych rozmaitości bazowej są takie, a nie inne; czemu też poszczególne wielkości fizyczne zostały opisane takimi, a nie innymi, obiektami geometrycznymi. Odpowiedź na te pytania musi być poprzedzona stwierdzeniem, co w przedstawionej teorii powinno być weryfikowane na drodze eksperymentalnej oraz na ile w tej materii teoria ta jest podobna, np. do teorii pola elektromagnetycznego. Rzecz jasna, chodzi tu jedynie o wskazanie, co powinno być zmierzone, bez komentowania jak to należy zrobić. W tym celu trzeba prześledzić definicje wiązek związanych z występowaniem obiektów geometrycznych specjalnych.

A więc, ogólnie rzecz biorąc, należy po pierwsze sprawdzić, czy "położenia" opisywanych układów fizycznych, które chcemy rejestrować w rozmaitości bazowej, rzeczywiście dadzą się "zorganizować" w taką rozmaitość różniczkową (bądź też tylko współrzędnościową). Oczywiście sam proces tej organizacji jest już procesem natury geometrycznej - musimy po prostu wybrać taki zbiór, by między jego elementami i położeniami układów zachodziła wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość. Natomiast procesem pomiarowym jest rejestracja współrzędnych tych położen za pomocą odpowiednio dobranych i przyporządkowanych tym położeniom mierników. Jeśli teraz na podstawie pomiarów stwierdzimy, że pewne podzbiory zbioru położen układów powiązane są wzajemnie jednoznacznie z pewnymi podzbiorami otwartymi przestrzeni arytmetycznej  $R^n$  (o ustalonej wymiarze  $n$ ), to tym samym kontrolujemy pomiarowo układy współrzędnych naszej rozmaitości bazowej, bowiem w zbiorze położen układów można wprowadzić topologię, przy której układy współrzędnych są rzeczywiście homeomorfizmami, jak tego wymaga ich definicja (porównaj: [8], s. 19, [5], ss. 11, 12; gdzie też podane są założenia, jakie spełniają wspomniane odwzorowania, by topologia była jednoznacznie określona oraz by były one homeomorfizmami zbiorów otwartych). W niektórych przypadkach kontrolujemy pomiarowo tylko pewne mapy rozmaitości bazowej oraz transformacje prowadzące od nich do pozostałych map jej atlasu. Trzeba pamiętać, że od strony pomiarowej można uważać, że sprawdzamy tu dla map i transformacji tylko wzajemną jednoznaczność danego odwzorowania (z pewną określoną dokładnością oczywiście) w skończonej liczbie punktów jego dziedziny. Wobec tego z pomiarowego punktu widzenia

przedłużamy odwzorowanie dyskretne do ciągłego, czy też nawet gładkiego pewnej klasy określonego, np. na podzbiorze otwartym " $R^n$ ". Sposób dokonania takiego przedłużenia wiąże się właściwie tylko z chęcią późniejszego stosowania twierdzeń wymagających odpowiednich założeń dotyczących omawianych odwzorowań.

Po drugie, należy dokonać pomiarów składowych obiektów geometrycznych szczególnych, opisujących wielkości fizyczne rejestrowane w różnorodności wiązek, w pomiarowych układach odniesienia (realizowanych za pomocą odpowiedniego przyporządkowania mierników mierzonym wielkościom fizycznym) związanych z poszczególnymi mapami różnorodności bazowej. Tym samym kontrolujemy mapy atlasu wiązki. Czasem robimy to tylko dla pewnych map, ale za to sprawdzamy pomiarowo reguły transformacyjne obiektów geometrycznych obowiązujące przy przejściu od tych map do pozostałych. Pamiętajmy jednak, obserwując przykład wiązki budowanej dla sieci elektrycznych, że nie raz trudno jest uzyskać różnorodność wiązki w oparciu o odpowiednio zbudowane włókno wzorcowa, tak by każdy jej punkt odpowiadał jakiejś wielkości fizycznej pewnej sieci. Często ze względu na prostotę rozumowań wygodnie jest operować różnorodnością wiązki posiadającą punkty bez interpretacji fizycznej.

Po trzecie wreszcie, należy dokonać weryfikacji eksperymentalnej wzorów opisujących konkretne "ruchy" konkretnych układów obserwowanych na "tle" danej wiązki. We wzorach tych (formułowanych współzmiennie) występują składowe używanych w wiązce obiektów geometrycznych lub też pewne ich pola. Weryfikacji tej dokonujemy w oparciu o dowolne mapy pokrywające swymi dziedzinami różnorodność bazową (oraz skojarzone z nimi mapy atlasu wiązki). Trzeba sobie zdawać sprawę, że w zależności od rodzaju takich wzorów, pomiary mogą stanowić sprawdzenie pewnych wniosków wyprowadzonych na podstawie tych wzorów. Z tymi eksperymentami wiąże się też podział opisywanych wielkości fizycznych na wymuszenia i odpowiedzi. Trudno jednak rozpatrywać bliżej tę sprawę nie konkretyzując teorii.

Realizacja wymienionych pomiarów może być bardzo różnaita w przypadku różnych układów fizycznych i różnych wiązek tworzonych dla nich. Wskażemy więc przynajmniej bardzo pobieżnie jakie są podobieństwa i różnice występujące pod tym względem w teorii pola elektromagnetycznego i omawianej teorii sieci elektrycznych. Dla uproszczenia przypuścimy, że rozpatrujemy teorię pola w próżni. Przez utworzenie układów inercjalnych z przyrządów służących do pomiarów odległości przestrzennej i czasu weryfikujemy poszczególne układy współrzędnych czasoprzestrzeni, które interpretowana jest w teorii pola jako różnorodność bazowa. Następnie w każdym punkcie czasoprzestrzeni mierzymy dla każdego z inercjalnych układów odniesienia składowe tensorów rozmaitych możliwych pól elektromagnetycznych. (Tak szeroko pomyślane pomiary są oczywiście idealizacją, jeśli chodzi o obserwację wszystkich pól w całej czasoprzestrzeni.) Jeśli w wiązce o wymienionej bazie i włóknie wzorcowym, w którym rejestrujemy składowe tensorów pola

chcemy obserwować jakieś konkretne pole (w formie cięcia wiązki ([19], s. 81)), to trzeba też pomierzyć w poszczególnych punktach czasoprzestrzeni dla danego układu inercyjnego składowe jego tensora. W ten sposób sprawdzamy dla obserwowanych pól słuszność równań Maxwella. Zwróćmy uwagę, że wówczas transformacje dla współrzędnych rozmaitości bazowej będą, ogólnie rzecz biorąc, transformacjami należącymi do grupy Lorentza i prawo transformacji dla wielkości polowej będzie tensorowe o współczynnikach wyznaczonych przez grupę Lorentza. Bez wykonania powyższych doświadczeń nie wiedzielibyśmy o tym. Natomiast w przypadku teorii sieci elektrycznych weryfikacji eksperymentalnej podlega tylko jedna mapa rozmaitości bazowej i jedna atlasu wiązki. Transformacje prowadzące od tych map do pozostałych możemy realizować praktycznie, tworząc sami układy przekształcające stare współrzędne dotyczące ładunków obwodowych na nowe oraz stare składowe wielkości fizycznych rejestrowanych we włóknie wzorcowym na nowe. W ten sposób realizujemy też tzw. układy odniesienia. Częstoem rzeczywiście jest to robione, np. może dotyczyć to tzw. filtrów składowych symetrycznych przekształcających współrzędne fazowe sinusoidalnych prądów i napięć gałęzi 3-przewodowych na współrzędne symetryczne ([2], ss. 27, 28). W tym momencie widać jasno różnicę pomiędzy stosunkiem do eksperymentu teorii pola elektromagnetycznego i teorii sieci elektrycznych. Można powiedzieć, że omawiane transformacje w pierwszym przypadku są w pewnej mierze dziełem natury, w drugim - dziełem eksperymentatora. Ponieważ prawa Kirchhoffa i równania definicyjne elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $e$  stanowiące podstawę teorii sieci zostały dawno sprawdzone (w praktykach  $u_{p_x}$ ,  $u_r$ ), więc właściwie widać, że operowanie wiązkami, w których mamy wiele układów współrzędnych dla rozmaitości bazowej i atlasu wiązki nie wymaga przeprowadzenia nowych doświadczeń w porównaniu z niegeometryczną wersją teorii sieci. Powstaje wobec tego pytanie: jaki sens ma wprowadzenie do teorii sieci teorii wiązek. Podobne pytanie można zresztą postawić odnośnie do analogicznego problemu geometryzacji innych teorii, np. teorii układów elektromechanicznych, w której oprócz rozmaitych elementów natury elektrycznej opisywane są ciała sztywne. Postaram się teraz choćby częściowo odpowiedzieć na nie, jak i skomentować sposób wprowadzenia w naszym przypadku teorii wiązek.

Pierwszy, zaznaczony poniżej powód, przemawiający za tym zastosowaniem teorii wiązek wydaje się pod względem teoretycznym najważniejszy. Widzieliśmy, że w sensie eksperymentalnym mapom rozmaitości bazowej oraz atlasu wiązki odpowiadają przyporządkowania środków pomiarowych, służących do wyznaczania współrzędnych rozmaitości bazowej oraz składowych obiektów geometrycznych, mierzonym obiektom fizycznym. Nazwijmy te eksperymentalne odpowiedniki wymienionych map rozszerzonymi układami odniesienia. Jeśli teraz zdecydujemy się na współzmiennicze sformułowanie równań sieci, to stwierdzimy, że "prawa rządzące" siecią są niezależne od użytych rozszerzonych układów odniesienia; nie są rezultatem ich przypadkowego doboru. Czyli w powyższym sensie uniezależniamy się od tych układów odniesienia i



charakteryzujemy lepiej sam mierzony obiekt. Idea ta jest wspólna teorii pola elektromagnetycznego i teorii sieci, niezależnie od poprzednio wskazywanych różnic dotyczących stosunku do eksperymentu obu teorii. Przyswiewca ona wszystkim teoriom fizyki sformułowanym za pomocą teorii wiązek i kanonu współzmienniczego formułowania ich wzorów.

Gdyby nawet pominąć powyższy argument i stwierdzić, że w teorii sieci można by ograniczyć się do jednej mapy rozmaitości bazowej i jednej atlasu wiązki, to trzeba pamiętać, że teoria sieci może być uważana za fragment szerszej teorii układów elektromechanicznych. Tam na ogół nie da się pokryć rozmaitości bazowej dziedziną jednej mapy i stąd występuje wówczas konieczność stosowania wielu map. (Tego rodzaju ograniczenia spowodowałyby, że do analizy pracy sieci wystarczyłyby właściwie przestrzenie  $k^N$  lub  $R^N$ .)

Następny powód jest bardziej praktycznej natury. Mianowicie, dysponując wieloma mapami w danej wiązce można wybrać takie, w których wykonanie pewnych rachunków będzie łatwiejsze niż w innych. Na przykład w teorii sieci wybieramy mapy takie, dla których macierz  $'M$  występująca w równaniach (72) będzie diagonalna, wówczas łatwo równania te sprowadzić do postaci normalnej. Podobny motyw występuje w teorii składowych symetrycznych. W teorii układów elektromechanicznych lub teorii pola elektromagnetycznego chodzi o rzeczy znacznie istotniejsze, mianowicie o taki wybór map, dla których całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych w pierwszym przypadku, a cząstkowych w drugim jest najłatwiejsze. Przedstawiony tu motyw można uzupełnić. Zastosujmy mianowicie transformacje

$$u_{\beta}^{-1} = u_{\alpha} : /Y^{\beta} / \rightarrow /Y^{\alpha} / \quad \text{oraz} \quad u_{\beta}^{-1} = u_{\alpha} : /B^{\beta N} / \rightarrow /B^{\alpha N} /.$$

(Na skutek globalności map transformacje te są dobrze określone.) Może się zdarzyć, że transformacja taka przyporządkowując będzie sieci, której praca przedstawiona jest w " $B^N$ " za pomocą nośnika odpowiedniej krzywej parametrycznej (patrz: punkt 6) inną sieć, której rozwiązanie będzie łatwiejsze na skutek prostszej budowy macierzy występujących w równaniach (72). Analogiczne rozważania Czytelnik może znaleźć w pracy [3], ss. (117-121), gdzie w powyższy sposób dokonuje się dekompozycji  $(n+1)$  - przewodowej ( $n \in N$ ) linii długiej symetrycznej, pracującej w stanie ustalonym o sinusoidalnych przebiegach czasowych prądów i napięć, doprowadzając do rozwiązania zamiast niej  $n$  niezależnych linii dwuprzewodowych.

Wreszcie sprawa niemniej ważna. Analizując równania, opisujące jakiś obiekt fizyczny, bez pomocy teorii wiązek, nie posiadamy dla danego rozwiązania tych równań "tła" jakim jest wiązka - patrzymy na to rozwiązanie w izolacji od innych możliwych stanów tego obiektu fizycznego i innych rozwiązań jego równań. Konkretyzacja tej wypowiedzi wymagałaby, rzecz jasna, rozwoju przedstawionej teorii. Przewidując go, można posłużyć się

pewną geometryczną analogią dotyczącą mechaniki. Wystarczy mianowicie prześledzić rolę, jaką odegrały w mechanice prostsze pojęcia: przestrzenie konfiguracyjna i fazowa ([14], ss. 146, 225), aby nabrać przekonania, że zespolenie metod analitycznej i geometrycznej jest rzeczą właściwą.

Argumenty powyższe stanowią, jak się wydaje, uzasadnienie operowania teorią wiązek w prezentowanym przypadku. Pozostaje jeszcze kwestia, pobieżnego choćby, wyjaśnienia pytań postawionych na początku punktu 7, dotyczących interpretacji poszczególnych wielkości fizycznych w obu zdefiniowanych wiązkach. Otóż wobec tego, że nie trzeba weryfikować eksperymentalnie reguł transformacji współrzędnych rozmaitości bazowych oraz składowych obiektów geometrycznych, mamy znaczną dowolność w wyborze wielkości fizycznych rejestrowanych w rozmaitości bazowej i rozmaitości wiązki. Dowolność ta dotyczy również doboru obiektów geometrycznych służących do opisu wielkości fizycznych. Jest ona jednak krępowana pewnymi względami formalnymi. Zaznaczmy tu tylko pewne spośród nich, które są natury geometrycznej. Mianowicie, równania sieci powinny być wyrażone w formie współzmienniczej. Wielkości o odrębnym charakterze fizycznym powinny być opisane odrębnymi obiektami geometrycznymi. Jak to było już zaznaczone, rozmaitości bazowe i wiązki powinny być, w miarę możliwości, pozbawione punktów nie posiadających interpretacji fizycznej. Powodem wystąpienia takich punktów w rozmaitości wiązki może być nie tylko nie uwzględnienie pewnych związków zachodzących pomiędzy składowymi obiektów geometrycznych posiadających interpretację fizyczną (dotyczących wielkości mierzonych, podlegających opisowi w teorii), lecz także wystąpienie pewnych obiektów pozbawionych takiej interpretacji (patrz np.: [3], ss. (108-115)). Atlas rozmaitości bazowej powinien mieć wystarczająco dużo map dających korzyści praktyczne przy rozwiązywaniu równań sieci, lecz zbyt duża ich liczba też nie jest dobra. Przypuśćmy bowiem, że zamiast operować rozmaitością bazową jako współrzędnościową, zaopatrzyliśmy ją w atlas maksymalny, tworząc rozmaitość różniczkową, wówczas dla utrzymania współzmienniczości równań (71), (72) musielibyśmy operować pochodną absolutną, co skomplikowałoby niepotrzebnie postać tych równań, czyniąc je nieliniowymi w pewnych układach współrzędnych.

W przedstawionej teorii sieci elektrycznych charakterystyczne jest, że ujmuje ona z osobna sieci dla każdej ustalonej pary liczb  $(n, f)$ . Powstaje pytanie, czy można zbudować taką wiązkę, w której dałoby się opisywać sieci o dowolnej liczbie gałęzi i niezależnych obwodów. Nie przesądzając tutaj odpowiedzi, trzeba zdawać sobie sprawę, że rozwiązania należy szukać w teorii rozmaitości i wiązek nieskończenie wymiarowych.

Wreszcie trzeba zaznaczyć, że wybór metody obwodowej (oczkowej), jako kandydującej do geometryzacji, został dokonany ze względu na znaczne jej pokrewieństwo z teorią Lagrange'a układów elektromechanicznych. Nie jest to jednak jedyny możliwy wybór. Pewną systematykę podziału wielkości fizycznych związanych z sieciami elektrycznymi na wielkości wymuszeń, odpo-

wiedzi i stanu oraz uzyskiwanej postaci równań sieci zajmuje się metoda przestrzeni stanów (patrz np.: [6], ss. (159-182)). Teoria wiązek może stanowić podbudowę geometryczną tej metody operującej pod tym względem przestrzeniami arytmetycznymi.

## WYKAZ CYTOWANEJ LITERATURY

- [1] Ausländer L., Mac Kenzie R.E.: Rozmaitości różniczkowalne. PWN, Warszawa 1969.
- [2] Brodzki M.: O współzmienności równań i metodach rozwiązywania sieci elektrycznych o pewnych symetriach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka z. 34, Gliwice 1972.
- [3] Brodzki M.: Pewne zastosowania teorii obiektów geometrycznych w dziedzinie linii długich wieloprzewodowych. Praca zbiorowa pt.: Wybrane zagadnienia z zakresu elektrotechniki dla studiów doktoranckich i indywidualnych, z. 2, Skrypty Uczelniane AGH nr 475, Kraków 1976.
- [4] Brodzki M.: Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej nr 847, Gliwice 1979.
- [5] Cegińska K.: Geometria różniczkowa. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1978.
- [6] Director S.W., Rohrer R.A.: Podstawy teorii układów elektrycznych. PWN, Warszawa 1976.
- [7] Engelking R.: Topologia ogólna. PWN, Warszawa 1975.
- [8] Gancarzewicz J.: Geometria różniczkowa. Skrypty Uczelniane Uniwersytetu Jagiellońskiego nr 298, Kraków 1978.
- [9] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
- [10] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Podstawowe pojęcia geometrii Kleina. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1975.
- [11] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1960.
- [12] Mostowski A.: Logika matematyczna. Warszawa - Wrocław 1948.
- [13] Rajski C.: Teoria obwodów, t. I. WNT, Warszawa 1971.
- [14] Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna. PWN, Warszawa 1955.
- [15] Semadeni Z., Wiweger A.: Wstęp do teorii kategorii i funktorów. PWN, Warszawa 1978.
- [16] Sikorski R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1977.
- [17] Sikorski R.: Wstęp do geometrii różniczkowej. PWN, Warszawa 1972.
- [18] Smale S.: On the mathematical foundations of electrical circuit theory. J. Differential Geometry 7 (1972).
- [19] Sulanke R., Wintgen P.: Geometria różniczkowa i teoria wiązek. PWN, Warszawa 1977.
- [20] Waliszewski W.: Obiekty geometryczne a przestrzenie włókniste. Praca zbiorowa pt.: Geometria różniczkowa i ośrodki ciągłe. Wydawnictwo PAN, Wrocław 1974.
- [21] Woźniak Cz.: O niektórych zastosowaniach wiązek włóknistych w mechanice. Praca zbiorowa pt.: Geometria różniczkowa i ośrodki ciągłe. Wydawnictwo PAN, Wrocław 1974.



LITERATURA PODSTAWOWA

- [22] Husemoller D.: Fibre Bundles, New York, St. Louis, San Francisco, London, Toronto, Sydney 1966 (przekład rosyjski, Moskwa 1970).
- [23] Kobayashi S., Nomizu K.: Foundations of Differential Geometry, Vol. I. New York, London 1963.
- [24] Kobayashi S., Nomizu K.: Foundations of Differential Geometry, Vol. II. New York, London, Sydney 1969.
- [25] Steenrod N.: The Topology of Fibre Bundles. Princeton 1951 (przekład rosyjski, Moskwa 1953).

Wpłynęło do redakcji dnia 4.XII.1981 r.

PEWNE ZASTOSOWANIA TEORII WIĄZEK  
W DZIEDZINIE SIĘCI ELEKTRYCZNYCH

S t r e s z c z e n i e

W niniejszej pracy zbudowano dwie wiązki włókniste w ramach teorii sieci elektrycznych. Podano interpretację poszczególnych wielkości sieciowych w wymienionych wiązках. Rozważania powyższe poprzedzone są krótkim przypomnieniem definicji wiązek włóknistych i pewnej metody ich konstrukcji. Przeprowadzona jest też konstrukcja pewnego morfizmu, wiążącego obie wiązki, zwanego rzutowaniem. Podany jest sposób opisu pracy sieci w tych wiązках. Następnie objaśniona jest kwestia celowości zastosowań teorii wiązek włóknistych w teorii sieci elektrycznych, omówione są najważniejsze momenty związane z takimi zastosowaniami, jak też, w pewnej mierze, stosunek przedstawionej teorii do eksperymentu.

## НЕКОТОРОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАССЛОЕНИЙ В ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### Р е з ю м е

В настоящей работе описано создание двух расслоений в области теории электрических цепей, а также даётся интерпретация отдельных сетевых величин в указанных расслоениях. Вышеуказанным рассуждениям предшествует короткое напоминание о дефиниции расслоений и некоторого метода их конструкции. Проводится также конструкция некоторого морфизма, соединяющего оба расслоения, называемого проекцией и показан способ описания работы цепи в этих расслоениях.

Затем объясняется проблема целесообразности применения теории расслоений в теории электрических цепей, обсуждаются важнейшие моменты, связанные с данным применением, а также, в некоторой степени, отношения представленной теории к эксперименту.

CERTAINES APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FIBRATIONS  
DANS LE DOMAINE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

R é s u m é

Dans le travail présent on a construit deux fibrations dans le cadre de la théorie des circuits électriques. On a présenté une interprétation des particuliers paramètres de circuits électriques dans les fibrations mentionnées. Des considérations ci-dessus sont précédées d'un court rappel de la définition des fibrations et d'une certaine méthode de leur construction. On a aussi réalisé une construction d'un certain morphisme, liant deux fibrations, nommé une projection. On a présenté la façon de la description du travail du circuit dans ces fibrations. Ensuite on a expliqué un problème de la finalité des applications de la théorie des fibrations en théorie des circuits électriques; on a présenté des moments les plus importants liés avec ces applications, ainsi que, en quelque sorte, une relation entre la théorie présentée et une expérience.







3347/83/83

**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ  
MOŻNA NABYC W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 098, ul. Konstytucji 14 b
- 44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
- 40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Zwirki i Wigury 33
- 40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
- 41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
- 41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
- 41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
- 47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
- 44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
- 41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
- 41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
- 00-001 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —  
Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.