ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990
Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Ewa Dudek-Dyduch, Konrad Wala
Akademia Górniczo-Hutnicza

PROGRAMOWANIE ROBÓT PRZYGOTOWAWCZYCH W KOPALNI JAKO UOGÓLNIONE(*) ZAGADNIENIE CHIŃSKIEGO LISTONOSZA

Streszczenie. W pracy sformułowano zagadnienie minimalnej trasy kombajnu górniczego realizującego prace przygotowawcze w kopalni. Stwierdzono, że model zagadnienia jest uogólnieniem zagadnienia chińskiego listonosza. Pozwoliło to na opracowanie wielomianowego algorytmu wyznaczania optymalnego rozwiązania.

1. Wprowadzenie

W ramach robót przygotowawczych w kopalni, mających na celu udostępnienie pól eksploatacyjnych, należy wydrążyć sieć chodników o zadanym planie topograficznym. Drążenie odbywa się za pomocą jednego kombajnu. Ponieważ jest to ciężka maszyna, toteż jeżeli drążenie chodnika ma się rozpocząć od skrzyżowania innego niż to, w którym się skończyło drążenie chodnika poprzedniego, transport maszyny pomiędzy tymi skrzyżowaniami musi być wzięty po uwagę. Oczywiście transport ten może odbyć się tylko chodnikami uprzednio już wydrążonymi. W chwili początkowej pewna część chodników jest już wydrążona stanowiąc odcinki potencjalnych dróg transportowych. Zakłada się, że znane są zarówno czasy drążenia, jak i transportu wzdłuż chodników. Należy określić kolejność drążenia chodników oraz ewentualnie drogi transportowe tak, ażeby czas wykonania całej sieci chodników był minimalny.

Formalnie, opisane zagadnienie można przedstawić w języku teorii grafów w następujący sposób. Dany jest spójny graf (V,E) reprezentujący plan chodników kopalni. Zbiór wierzchołków V reprezentuje skrzyżowania chodników, przy czym wyróżnia się wierzchołek początkowy $v_o \in V$, w którym znajduje się kombajn przed rozpoczęciem programowanego zakresu robót oraz wierzchołek końcowy $v_r \in V$, gdzie kombajn powinien się znaleźć po zakończeniu wszystkich prac. Zbiór E jest zbiorem krawędzi grafu reprezentujących połączenia (chodniki). Na zbiorze połączeń E są zadane funkcje rzeczywiste określające czasy drążenia chodników i czasy transportu kombajnu.

(*) Praca finansowana w ramach problemu RP.I.02 w temacie 4.4.

Zauważmy,że opisany powyżej problem jest pewnym uogólnieniem zagadnienia chińskiego listonosza.Chiński listonosz musi przejść przez wszystkie krawędzie grafu przynajmniej jeden raz,przy czym w przypadku powtórnego przejścia tej samej krawędzi czas przejścia nie ulega zmianie. Natomiast kombajn musi przejść przynajmniej jeden raz tylko przez niewydrążone chodniki oraz czas drążenia chodnika jest znacznie większy niż czas transportu przez wydrążony już chodnik.

W pracy rozwiązano następujące uogólnienie zagadnienia chińskiego listonosza,przydatne do programowania trasy kombajnu górniczego.Istota uogólnienia polega na założeniu,że część chodników w chwili planowania trasy kombajnu jest już wydrążona i może być użyta dla celów transportu kombajnu.Pozostałą część chodników należy właśnie wydrążyć i to w najkrótszym czasie.Takie chodniki mogą być wykorzystane jako drogi transportu dopiero po wykonaniu czynności drążenia.Rozważa się model zagadnienia trasy kombajnu, w którym wszystkie chodniki reprezentowane są przez krawędzie,co odpowiada założeniu,że zarówno drążenie,jak i transport możliwy jest w obu kierunkach z prędkością niezależną od kierunku ruchu.

2. Model zagadnienia

Rozważane jest zagadnienie wyznaczenia najkrótszej (najtańszej) trasy kombajnu górniczego,które,w języku teorii grafów,można opisać za pomocą następującej sieci:

$$S = (V,E,F;p,t)$$

gdzie:

(V,E) - spójny i niezorientowany s-graf reprezentujący topologię chodników kopalni,

(V,F) - graf częściowy grafu (V,E),

V - zbiór wierzchołków grafu odpowiadających skrzyżowaniom chodników,

E - zbiór krawędzi grafu reprezentujących chodniki kopalni,

$F \subset E$ - zbiór krawędzi odpowiadających chodnikom,które należy wydrążyć,

$E - F$ - zbiór krawędzi odpowiadających chodnikom wydrążonym przed rozpoczęciem programowania trasy kombajnu;chodniki te mogą być wykorzystane jako drogi transportu,

p,t - funkcje rzeczywiste,dodatnie,określające wagi krawędzi grafów,

$p: F \rightarrow R^+$ - czas drążenia chodnika,tj.dla $\forall e \in F : p(e) = p_e > 0$,

$t: E \rightarrow R^+$ - czas transportu chodnikiem,tj.dla $\forall e \in E : t(e) = t_e > 0$.

Naturalne jest założenie,że czas transportu jest mniejszy od czasu drążenia :

$$t_e < p_e \, , \quad \forall e \in F$$

Problem wyznaczenia najkrótszej (optymalnej) trasy kombajnu można teraz sformalizować jako następujący problem decyzyjny.Znaleźć minimalny łańcuch ($v_o \neq v_f$) lub cykl ($v_o = v_f$) $l = \{\{v_o,i\},e_1,e_2,\dots,e,\dots,\{j,v_f\}\}$ łączący węzły v_o i v_f ($v_o,v_f \in V$, $\{v_o,i\}$, $\{j,v_f\}$ - krawędzie incydentne,odpowiednio,do wierzchołków v_o i v_f),zawierający co najmniej jeden raz każdą krawędź zbioru F ,przy czym długość (koszt) c_e poszczególnych krawędzi $e \in l$ cyklu/łańcucha l liczona jest w następujący sposób:

(i) jeżeli $e \in E - F$: $c_e = t_e$,

(ii) jeżeli $e \in F$ i krawędź e występuje po raz pierwszy w łańcuchu l (licząc od wierzchołka v_o), to $c_e = p_e$,w przeciwnym przypadku: $c_e = t_e$.

Zauważmy,że minimalny łańcuch ($v_o \neq v_f$) lub minimalny cykl ($v_o = v_f$) l sieci S jest pokryciem krawędzi grafu (V,F) ,tak więc rozważane zagadnienie jest uogólnieniem zagadnienia chińskiego listonosza.Fakt ten umożliwia rozwiązanie zagadnienia minimalnej trasy kombajnu za pomocą algorytmu zaproponowanego przez J.Edmondsa i E.J.Johnsona [1] ,po wprowadzeniu odpowiednich uzupełnień.

3. Metoda rozwiązania

Oznaczmy przez V_F ($V_F \subset V$) zbiór wierzchołków incydentnych do krawędzi zbioru F ,oraz $V^- \subset V_F$ - zbiór wierzchołków,które w grafie (V_F,F) są stopnia nieparzystego (zero uważamy za liczbę parzystą).Niech $V^+ = V_F - V^-$ jest zbiorem wierzchołków stopnia parzystego w grafie (V_F,F).Zauważmy,że suma stopni d_i wszystkich wierzchołków $i \in V_F$ jest równa podwojonej liczbie krawędzi:

$$2|F| = \sum_{i \in V_F} d_i = \sum_{i \in V^+} d_i + \sum_{i \in V^-} d_i$$

Ponieważ suma $\sum_{i \in V^+} d_i$ liczb parzystych jest parzysta,więc i suma $\sum_{i \in V^-} d_i$ jest parzysta.Dalej,wszystkie liczby d_i w ostatniej sumie są nieparzyste,więc i liczba wierzchołków $|V^-|$ stopnia nieparzystego jest parzysta.

Dalsze rozważania zostaną ograniczone do przypadku spójnego podgrafu częściowego (V_F,F) .Ograniczenie to nie wynika z żadnych trudności teoretycznych i proponowany algorytm można łatwo uogólnić,w razie potrzeby, na przypadek grafu (V_F,F) zawierającego kilka składowych.Należy wtedy tylko ustalić większą liczbę przypadków tworzenia zbioru wierzchołków $\overline{V}$ zdefiniowanej poniżej sieci pomocniczej.

Konstruujemy sieć pomocniczą $(\overline{V},Y;t^x)$,gdzie $(\overline{V},Y)$ jest grafem pełnym rozpiętym na,zdefiniowanym poniżej,zbiorze wierzchołków $\overline{V} \subset V$,a t^x jest funkcją rzeczywistą $t^x: Y \rightarrow R^+$,taką,że t^x_{ij} jest długością najkrótszego łańcucha z wierzchołka i do j w sieci $(V,E;t)$.Łańcuchy takie istnieją,ponieważ graf (V,E) jest grafem spójnym.

Zbiór $\bar{V} \subset V$ jest zbiorem wierzchołków,w których nie jest spełniony warunek konieczny i wystarczający istnienia cyklu/łańcucha Eulera,który ustala następujące twierdzenie (patrz np. [3]):

"Spójny i niezorientowany s-graf zawiera cykl (łańcuch) Eulera wtedy i tylko wtedy,kiedy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest równa 0 (0 lub 2)".

Pomiędzy wierzchołkami zbioru $\bar{V}$ należy realizować transport kombajnu,oczywiście drogami wyznaczonymi przez najkrótsze łańcuchy łączące te wierzchołki w sieci $(V,E;t)$.

W zależności od położenia w sieci wierzchołka początkowego i końcowego wyróżnia się następujące przypadki:

a) jeżeli $v_o = v_f \in V_F$, to $\bar{V} = V^-$;

b) jeżeli $v_o \neq v_f$ i $v_o, v_f \in V^+ \subset V_F$, to $\bar{V} = V^- \cup \{v_o, v_f\}$;

c) jeżeli $v_o \neq v_f$ i $v_o, v_f \in V^- \subset V_F$, to $\bar{V} = V^- - \{v_o, v_f\}$;

d) jeżeli $v_o \neq v_f$ i jeden z tych wierzchołków,oznaczmy go v, $v \in V^+$ oraz drugi,oznaczmy go v', $v' \in V^-$, to $\bar{V} = (V^- - \{v'\}) \cup \{v\}$;

e) jeżeli $v_o = v_f$ i $v_o, v_f \notin V_F$, to $\bar{V} = V^- \cup \{v_o', v_f'\}$; gdzie wierzchołek $v_o = v_f$ zastąpiono dwoma wierzchołkami sztucznymi (fikcyjnymi),które nie są połączone bezpośrednio krawędzią:

$$(v_o' \neq v_f') \wedge (v_o', v_f' \notin V_F) \wedge (\{v_o', v_f'\} \notin E),$$

natomiast są incydentne z tymi samymi krawędziami co i wierzchołek $v_o = v_f$: $(\{v_o,i\} \in E) \Longleftrightarrow (\{v_o',i\} \in E) \Longleftrightarrow (\{v_f',i\} \in E)$ oraz

$$t_{v_o i} = t_{v_o' i} = t_{v_f' i} \quad ;$$

f) jeżeli $v_o \neq v_f$ i $v_o, v_f \notin V_F$, to $\bar{V} = V^- \cup \{v_o, v_f\}$;

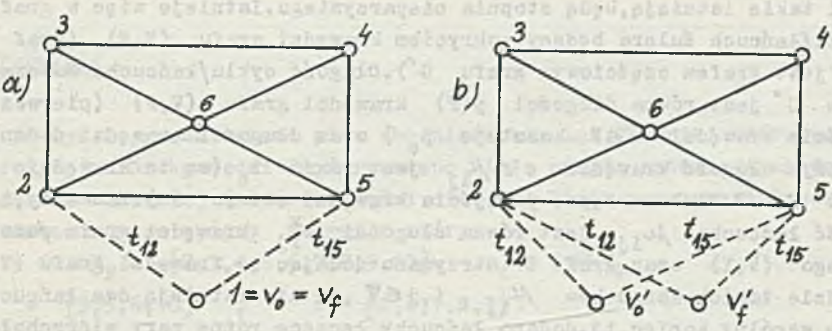
g) jeżeli $v_o \neq v_f$ i jeden z tych wierzchołków,oznaczmy go v ,$v \notin V_F$, a drugi,oznaczmy go v', $v' \in V_F$ oraz

(i) $v' \in V^-$, to $\bar{V} = (V^- - \{v'\}) \cup \{v\}$,

(ii) $v' \in V^+$, to $\bar{V} = V^- \cup \{v, v'\}$.

Z uwagi na fakt,że liczba wierzchołków $|V^-|$ jest parzysta w każdym z wyliczonych powyżej przypadków,liczba wierzchołków $|\bar{V}|$ jest także parzysta,tak więc graf $(\bar{V},Y)$ ma parzystą liczbę wierzchołków.

Na rysunku 1 a) przedstawiono przykład grafu reprezentującego plan chodników kopalni.Liniami ciągłymi zaznaczono krawędzie zbioru F ,liniami przerywanymi krawędzie zbioru E - F .Łatwo można zauważyć,że: $V = \{1,2,3,4,5,6\}$, $V^- = \{2,3,4,5\}$, $V^+ = \{6\}$ .Ponieważ $v_o = v_f$ i $v_o, v_f \notin V_F$, to $\bar{V} = V^- \cup \{v_o', v_f'\}$ - wierzchołek $v_o = v_f$ zastąpiono dwoma sztucznymi $v_o' \neq v_f'$ (rys.1 b).



Rys.1. Przykład zastąpienia wierzchołka $v_o = v_f \notin V_F$ dwoma sztucznymi $v_o' \neq v_f'$.
Fig.1. Example of node $v_o = v_f \notin V_F$ replacement on two artificial $v_o' \neq v_f'$

Można teraz powtórzyć za [1], wprowadzając wymienione powyżej rozszerzenia, następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Długość minimalnego cyklu/łańcucha l w sieci S pokrywającego zbiór krawędzi F grafu (V,F) (tj. $F \subset l$) jest równa $p(F) + \min t^x(\bar{Y})$, gdzie minimum jest wzięte po wszystkich skojarzeniach $\bar{Y} \subset Y$ grafu $(\bar{V},Y)$ sieci $(\bar{V},Y;t^x)$ otrzymanej z (V,E;t).

Dowód

Każda krawędź zbioru F należy przynajmniej jeden raz do cyklu/łańcucha l; pierwsze przejście krawędzi $e \in F$ kosztuje p_e, stąd długość minimalnego pokrycia zbioru F grafu (V,F) (przy jednokrotnym włączeniu krawędzi zbioru F do cyklu/łańcucha pokrywającego l) jest równa p(F). W przypadku gdy $\bar{V} = \emptyset$, to cykl/łańcuch pokrywający zbiór krawędzi F jest cyklem/łańcuchem Eulera o długości p(F).

Rozważmy przypadek: $\bar{V} \neq \emptyset$. Weźmy dwa różne wierzchołki $i,j \in \bar{V}$ (liczba wierzchołków zbioru $\bar{V}$ jest parzysta). Niech μ_{ij} jest minimalnym łańcuchem łączącym węzły i,j w sieci (V,E;t). Zauważmy, że dodając krawędzie łańcucha μ_{ij} do grafu (V,F) otrzymamy graf $(V,F \cup \mu_{ij})$, w którym stopień wierzchołków i,j powiększy się o 1 (wierzchołki nieparzyste zostaną parzystymi, parzyste wierzchołki końcowe - $v_o \neq v_f$ - zostaną nieparzystymi), natomiast stopień pozostałych wierzchołków grafu pozostanie bez zmiany lub powiększy się dokładnie o liczbę 2. Pozostałe wierzchołki zbioru $\bar{V}$ łączymy także parami za pomocą minimalnych łańcuchów usytuowanych w sieci (V,E;t) i krawędzie tych łańcuchów dodajemy do grafu $(V,F \cup \mu_{ij})$. Otrzymamy w ten sposób graf G', w którym wszystkie wierzchołki zbioru $\bar{V}$ stopnia nieparzystego będą stopnia parzystego, natomiast wierzchołki końcowe parzystego stopnia ($v_0 \neq v_f$ lub $v_0' \neq v_f'$), jeżeli takie istnieją, będą stopnia nieparzystego. Istnieje więc w grafie G' cykl/łańcuch Eulera będący pokryciem krawędzi grafu (V,F) (graf (V,F) jest grafem częściowym grafu G'). Długość cyklu/łańcucha Eulera w grafie G' jest równa długości $p(F)$ krawędzi grafu (V,F) (pierwsze przejście krawędzi $e \in F$ kosztuje p_e) oraz długości krawędzi dodanych, przy czym długość krawędzi $e \in \mu_{ij}$ jest równa t_e (są to krawędzie zbioru $E - F$ lub następne przejścia krawędzi zbioru F). Zauważmy, że długość łańcucha μ_{ij} jest równa długości t^x_{ij} krawędzi grafu pomocniczego $(\bar{V},Y)$ oraz graf G' otrzymano dodając do krawędzi grafu (V,F) krawędzie takich łańcuchów μ_{ij}, $i,j \in \bar{V}$, że nie istnieją dwa łańcuchy mające wspólny koniec, tj. dodano łańcuchy łączące różne pary wierzchołków z $\bar{V}$ i pokrywające wszystkie wierzchołki zbioru $\bar{V}$. Takie łańcuchy tworzą łańcuchowe skojarzenie, któremu w grafie pomocniczym $(\bar{V},Y)$ odpowiada skojarzenie $\bar{Y} \subset Y$. Tak więc długość dodanych łańcuchów jest równa długości skojarzenia $t^x(\bar{Y})$ oraz długość cyklu/łańcucha Eulera w grafie G', który pokrywa krawędzie grafu (V,F) wynosi $p(F) + t^x(\bar{Y})$. Długość cyklu/łańcucha można zmniejszyć zmniejszając długość skojarzenia $t^x(\bar{Y})$; długość minimalnego cyklu łańcucha jest równa $p(F) + \min\limits_{\bar{Y} \subset Y} t^x(\bar{Y})$.

<u>Twierdzenie 2</u>

Najkrótsze łańcuchy w sieci $(V,E;t)$ odpowiadające krawędziom minimalnego skojarzenia $\bar{Y}_{min}$ w sieci $(\bar{V},Y;t)$ są krawędziowo rozłączne.

<u>Dowód</u>

Dowód twierdzenia przebiega analogicznie jak dowód podobnego twierdzenia w pracy [1].

Na podstawie twierdzenia 1 i 2 rozwiązanie zagadnienia minimalnej trasy kombajnu otrzymujemy w następujący sposób:

(i) określić funkcję t^x, tj. określić długości minimalnych łańcuchów w sieci $(V,E;t)$ między każdą parą węzłów (np. za pomocą algorytmu Warshalla - Floyda [2]),

(ii) wyznaczyć zbiór wierzchołków $\bar{V}$ i minimalne skojarzenie $\bar{Y}_{min}$ w sieci $(\bar{V},Y;t^x)$; wtedy minimalna długość cyklu łańcucha w sieci S jest równa
$$p(F) + t^x(\bar{Y}_{min}),$$

(iii) zastąpić graf (V,F) multigrafem G' utworzonym z (V,F) przez dodanie krawędzi najkrótszych łańcuchów między tymi parami wierzchołków, które w minimalnym skojarzeniu $\bar{Y}_{min}$ połączone są krawędziami,

(iv) cykl/łańcuch Eulera w multigrafie G' jest najkrótszym cyklem/łańcuchem pokrywającym krawędzie grafu (V,F) (algorytm Hoang Tuya [3]).

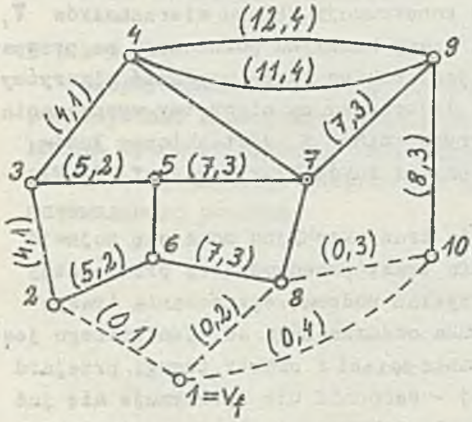
Każdy z kroków algorytmu ma wielomianową złożoność obliczeniową!

4. Przykład

Na rys.2 przedstawiono plan chodników kopalni. Chodniki, które należy wydrążyć (zbiór krawędzi F), narysowano linią ciągłą, natomiast chodniki wydrążone wcześniej (zbiór krawędzi E - F)-linią przerywaną. Rysunek przedstawia więc spójny 2-graf, w którym:

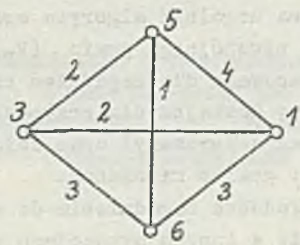
$v_o = 10 \in V_F = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $v_f = 1 \notin V_F$,

$V^- = \{3,5,6,10\}$, $V^+ = \{2,4,7,8,9\}$.



Rys.2. Przykład planu chodników kopalni.

Fig.2. Example of the mine headings diagram.



Rys.3. Sieć pomocnicza $(\bar{V};Y;t^x)$.

Fig.3. Auxiliary network $(\bar{V},Y;t^x)$.

Funkcje p i t są określone w ten sposób, że każdej krawędzi $e \in E$ przyporządkowano na rysunku 2 parę liczb (p_e,t_e). Ponieważ $v_o \neq v_f$, $v_o \in V^-$ oraz $v_f \notin V_F$, to zbiór węzłów sieci pomocniczej jest równy $\bar{V} = \{3,5,6,1\}$ (przypadek: g (i)). Sieć pomocniczą $(\bar{V},Y;t^x)$ przedstawia rysunek 3 , minimalne skojarzenie jest równe $\bar{Y}_{min} = \{\{5,6\},\{3,1\}\}$ oraz długość minimalnego łańcucha l^x wynosi 87 jednostek, gdzie $p(F) = 84$ i $t^x(\bar{Y}_{min}) = 3$. W tablicy 1 przedstawiono rozwiązanie - optymalną trasę kombajnu, gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

{10,8} - kombajn przemieszcza się wzdłuż chodnika między węzłem 10 i 8 ..

D8 - czas drążenia chodnika wynosi 8 jednostek

T2 - czas transportu chodnikiem jest równy 2 .

Tablica 1 .

{10,9}	{9,4}	{4,9}	{9,7}	{7,4}	{4,3}	{3,2}	{2,6}	{6,5}	{5,6}
D8	D12	D11	D7	D6	D4	D4	D5	D3	T1
{6,8}	{8,7}	{7,5}	{5,3}	{3,2}	{2,1}				
D8	D6	D7	D5	T1	T1				

5. Uwagi końcowe

Wprowadzając odpowiednie zasady konstrukcji zbioru wierzchołków V, można uogólnić algorytm wyznaczania trasy kombajnu górniczego na przypadek niespójnego grafu (V_F,F). Nie jest trudno także uogólnić algorytmy opracowane dla zagadnień chińskiego listonosza na algorytmy wyznaczania trasy kombajnu dla przypadków,w których zbiór E jest zbiorem łuków (graf skierowany) oraz zbiorem krawędzi i łuków,tj.kiedy graf (V,E) jest grafem mieszanym.

Podobne zagadnienia do wyznaczania trasy kombajnu mogą się pojawić także w innych sytuacjach wyznaczania trasy przechodzącej przez każdy element określonego podzbioru;na przykład podczas wyznaczania trasy: pługu śnieżnego(czas przejazdu odcinka odśnieżonego od odśnieżanego jest mniejszy),rozwożenia mleka lub zbierania śmieci i poczty (drugi przejazd tej samej ulicy trwa znacznie krócej - samochód nie zatrzymuje się już w celu pozostawienia mleka lub zabrania poczty,śmieci oraz może także wykorzystać,dla skrócenia trasy,ulice spoza jego rejonu),rozsypywania piasku na głównych ulicach (czas przejazdu zabezpieczonej przed gołoledzią jest mniejszy;do przejazdu mogą być wykorzystane ulice boczne), sprzątania korytarzy w dużych biurach i halach fabrycznych.

LITERATURA

[1] Edmonds J.,Johnson E.J.;Matchings,Euler Tours and the Chines Postaman,Math.Programming 5(1973),str.88-124.

[2] Sysło M.M.;Stosowana teoria grafów II.Problemy ekstremalnych dróg w grafach i sieciach,Archiwum Automatyki i Tel.20(1975),ss.278-300.

[3] Sysło M.M.,Skupień Z.;Stosowana teoria grafów III.Grafy Eulera i Hamiltona.Zagadnienie komiwojażera.Matematyka Stosowana X(1977), ss.5-54.

Recenzent: Doc.dr h.inż.F.Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

PROGRAMMING OF FIRST WORKING IN MINE AS A GENERALIZATION OF THE CHINESE POSTMAN PROBLEM

S u m m a r y

The problem is determination of the optimal route of heading machine which performs the first working in mine is formulated. It is found that the model of the problem is a generalization of the Chinese Postman problem. It enables us to work out the polynomial algorithm for determination of the optimal solution.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ РАБОТ В ШАХТАХ КАК ОБОБЩЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КИТАЙСКОГО ПОЧТАЛЬОНА

Р е з ю м е

Сформулировано проблему определения оптимального пути комбайна, реализующего подготовительные работы в шахте. Констатировано, что модель проблемы является обобщением проблемы китайского почтальона. Это дало возможность разработать многочленный алгоритм вычисления оптимального решения.