ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990
Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Lech Jamroż

Politechnika Krakowska

ZAGADNIENIE SZACOWANIA HEURYSTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ PROBLEMÓW KOMBINATORYCZNYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono statystyczne podejście do zagadnienia szacowania rozwiązań heurystycznych. Estymator zbudowany został na uporządkowanym ciągu statystycznym utworzonym ze zbioru rozwiązań. Za pomocą granicznego rozkładu estymatora określono wartość parametru θ,wyznaczającego w zbiorze rozwiązań tzw. punkt cięcia i będącego oceną rozwiązania optymalnego. Podano również górną granicę przedziału ufności dla tego parametru.

1. Wstęp

Wiele problemów mających duże znaczenie praktyczne jak np. problem szeregowania, komiwojażera, trójpodziału, załadunku itp. posiada strukturę kombinatoryczną. Już dla najprostszych modeli spotykanych w zastosowaniach problemy te są NP-zupełne, a wyznaczanie rozwiązań optymalnych staje się nieefektywne z punktu widzenia przydzielonych środków obliczeniowych. W takich przypadkach kompromisowym wyjściem jest uzyskiwanie rozwiązań heurystycznych, traktując programowanie heurystyczne jako podejście do rozwiązywania praktycznie użytecznych zagadnień.
Celem programowania heurystycznego jest więc konstrukcja algorytmu dającego "dobre", ze względu na kryterium długości czasu obliczeniowego i objętości pamięci rozwiązanie dopuszczalne.

Jeżeli w konkretnych zagadnieniach mających taki sam model matematyczny występują różnice w rozmiarze tego modelu czy też w narzuconych wymaganiach na czasy dostępności rozwiązań, to są one z punktu widzenia programowania heurystycznego odmiennymi zagadnieniami. Stąd tak duża liczba algorytmów heurystycznych spotykanych w optymalizacji kombinatorycznej [1,5]. Z uwagi na to, że algorytmy heurystyczne pozwalają otrzymywać tylko rozwiązania przybliżone, powstaje wówczas problem oceny tych rozwiązań [2,3,4].

2. Oszacowanie rozwiązania heurystycznego

Oznaczmy przez

$$x_{r_1},\ x_{r_2},\ x_{r_3},\ \dots,\ x_{r_n}$$

uporządkowany zbiór rozwiązań heurystycznych, natomiast przez θ nieznaną wartość parametru ocenianą jako wartość dokładną. Ciąg (1) traktować będziemy jako realizację uporządkowanego n-elementowego ciągu statystycznego (n-elementową próbę)

$$X_{r_1},\ X_{r_2},\ X_{r_3},\ \dots,X_{r_n}. \tag{2}$$

Dla uproszczenia ciąg (1) zapiszemy w postaci $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \dots,X_n$, przy czym $X_1 \le X_2 \le X_3 \dots \le X_n$. Elementy każdej realizacji próby stanowią uporządkowany ciąg wartości

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \dots \le x_n. \tag{3}$$

Parametr θ w zbiorze wartości rozwiązań wyznacza tzw. punkt cięcia. Szacowania wartości tego parametru dokonujemy za pomocą statystyki pozycyjnej. Rozważymy zagadnienie maksymalizacji identyfikując prawostronny punkt cięcia.

Oznaczmy przez $T_n(X_1,X_2,\dots,X_n)$ estymator szacujący wartość parametru θ. Wymaga się, aby estymator T_n spełniał warunek zgodności, tj. $\lim_{n\to\infty} T_n = \theta$, oraz dodatkowo, aby funkcja estymatora była rozwijalna w szereg Taylora w otoczeniu punktu θ.

Jeżeli wartość oczekiwana funkcji estymatora ma postać

$$ET_n = \theta + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots, \tag{4}$$

to wówczas estymator z wyeliminowanym obciążeniem w postaci czynnika a_1/n wyrazi się następującą zależnością [2]

$$T_n^{(1)} = n\,T_n - \frac{n-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} T_{n-1,i}\right), \tag{5}$$

gdzie

$$T_{n-1,i} = \max\,(X_1,X_2,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n) = \begin{cases} X_n & \text{jeżeli } X_i \ne X_n \\ X_{n-1} & \text{jeżeli } X_i = X_n \end{cases}, \tag{6}$$

Stąd

$$T_n^{(1)} = n\,X_n - \frac{n-1}{n}\,[(n-1)X_n + X_{n-1})], \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(1)} = 2X_n - X_{n-1}. \tag{8}$$

Ze wzoru (8) i z własności estymatora otrzymujemy szacowaną wartość parametru w postaci

$$\theta^{(1)} = 2X_n - X_{n-1} , \tag{9}$$

oraz wartość oczekiwaną estymatora $T_n^{(1)}$

$$ET_n^{(1)} = \theta + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots . \tag{10}$$

z obciążeniem rzędu $O(n^{-2})$.

W analogiczny sposób otrzymujemy

$$T_n^{(2)} = \frac{n^2 T_n^{(1)} - (n-1)^2 T_{n-1}^{(1)}}{[n^2 - (n-1)^2]} , \tag{11}$$

gdzie

$$ET_n^{(2)} = \theta + \frac{a_3}{n^3} + \frac{a_4}{n^4} + \dots ,$$

jest wartością oczekiwaną estymatora z obciążeniem rzędu $O(n^{-3})$. Wartość parametru θ oszacowana za pomocą estymatora $T_n^{(2)}$ wyniesie więc

$$\theta^{(2)} = \lim_{n\to\infty} T_n^{(2)} = 3X_n - 3X_{n-1} + X_{n-2} .$$

W ogólności dla $0 < k < n$ otrzymujemy

$$T_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k+1}{i+1} X_{n-i} . \tag{12}$$

Estymatory $T_n^{(k)}$ parametru θ, z obciążeniem odpowiednio rzędu $O(n^{-k})$ konstruowane są więc za pomocą liniowej kombinacji elementów ciągu statystycznego (1).

3. Górna granica ufności dla parametru θ

Ograniczenie od góry przedziału ufności dla parametru θ przyjmujemy w postaci [6]

$$U_\theta = X_n + c_\alpha (X_n - X_{n-1}) , \tag{13}$$

przy czym

$$P_\alpha \{ U_\theta > \theta \} = 1 - \alpha . \tag{14}$$

Na podstawie powyższego wyrażenia możemy z prawdopodobieństwem $(1-\alpha)$ powiedzieć, że wartość parametru θ ograniczona jest od góry wartością U_θ. Górna granica przedziału ufności jest zmienną losową i im wartość jej jest mniejsza, tym dokładniejsze oszacowanie.

Spróbujmy bliżej określić tę granicę. W tym celu wprowadźmy funkcję odwrotną do funkcji $Y = F_\theta(x)$, tj. $H_F = F_\theta^{-1}$, $x \in [x_1, \theta]$, $Y \in [0,1]$, gdzie $F_\theta(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej θ, $(0 \le F_\theta(x) \le 1)$ i jako funkcja ciągła jest rozwijalna w szereg Taylora w otoczeniu punktu θ.

Funkcja $H_F(Y)$ należy również do klasy funkcji rozwijalnych w szereg Taylora w otoczeniu punktu $Y = 1$. Wobec tego

$$X_n = \theta + (Y_n - 1)\, H_F^{(1)}(1) + \frac{1}{2!}(Y_n - 1)^2 H_F^{(2)}(1) + \ldots , \tag{15}$$

$$X_{n-1} = \theta + (Y_{n-1} - 1)\, H_F^{(1)}(1) + \frac{1}{2!}(Y_{n-1} - 1)^2 H_F^{(2)}(1) + \ldots . \tag{16}$$

Podstawiając X_n, X_{n-1} do wyrażenia (14) otrzymujemy

$$P_\alpha\{X_n + c_\alpha(X_n - X_{n-1}) > \theta\} = P_\alpha\{(1+c_\alpha)X_n - c_\alpha X_{n-1} > \alpha\} = P_\alpha\{(1+c_\alpha)[(Y_n - 1)H_F^{(1)}(1) +$$

$$+ \frac{1}{2!}(Y_n - 1)^2 H_F^{(2)}(1) + \ldots] > c_\alpha[(Y_{n-1} - 1)H_F^{(1)}(1) + \frac{1}{2!}(Y_{n-1} - 1)H_F^{(2)}(1) + \ldots]\} = 1 - \alpha$$

Wiedząc, że $Y_1 = 1 - Y_n$, dla dużych wartości n otrzymujemy

$$(1-\alpha) \approx P_\alpha(c_\alpha Y_2 > (c_\alpha + 1) Y_1) = \frac{c_\alpha}{c_\alpha + 1} ,$$

$$c_\alpha \approx \frac{1 - \alpha}{\alpha} . \tag{17}$$

Podstawiając otrzymane związki do (14), dostajemy oszacowanie wiarygodności na poziomie $(1-\alpha)$, tj.

$$P_\alpha\{X_n + \frac{1-\alpha}{\alpha}(X_n - X_{n-1}) > \theta\} = 1 - \alpha . \tag{18}$$

Powyższe zależności można rozszerzyć na inne rozkłady $F_\theta(x)$, dla których funkcje gęstosci $f_\theta(x) = F_\theta^{(1)}(x)$ są dodatnie, niemonotonicznie ciągłe i mające pochodne w punkcie $x=\theta$. Dla monotonicznie ciągłych funkcji poziom wiarygodności można zapisać w postaci

$$P_\alpha = \{X_n + \frac{1-\alpha}{\alpha}(X_n - X_{n-1}) > \theta\} = n \int_{-\infty}^{\theta} f_\theta(y)[F_\theta(\frac{y - \alpha\theta}{1-\alpha})]^{n-1} dy =$$

$$= n(1-\alpha) \int_{-\infty}^{\theta} f_\theta(\alpha\theta + (1-\alpha)y)[F_\theta(y)]^{n-1} dy$$

który jest odpowiednio większy lub mniejszy w zależności od tego, czy $f_\theta(x)$ jest funkcją rosnącą czy malejącą.
Dla przykładu, jeżeli $f_\theta(x) = kx^{k-1}/\theta^k$, $(0<x<\theta)$, to

$$P_\alpha = (1-\alpha)[1 + \frac{k-1}{kn-1}\alpha + \ldots + \frac{(k-1)!}{(kn-1)^{k-1}}\alpha^{k-1}] .$$

Dla jednostajnych rozkładów $F_\theta(x)$ otrzymujemy $c_\alpha = (1-\alpha)/\alpha$.

4. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda statystycznej oceny rozwiązań heurystycznych odnosi się przede wszystkim do problemów kombinatorycznych, dla których istniejące algorytmy heurystyczne pozwalają szybko uzyskać zbiór wartości rozwiązań dopuszczalnych. Do zbudowania estymatora punktu cięcia wykorzystane zostały informacje zawarte w zbiorze rozwiązań.
Otrzymane estymatory z eliminowanym obciążeniem rzędu $O(n^{-k})$ zostały skonstruowane jako kombinacje liniowe elementów uporządkowanego ciągu statystycznego rozwiązań.

LITERATURA

[1] Dannenbring D.G., An evaluation of flow shop sequencing heuristic. Management Science, Vo. 23, No.11, 1977.

[2] Dannenbring D.G., Procedures for estimating optimal solution values for large combinatorial problems. Management Science, No. 12, 1977.

[3] Fisher M.L., Worst-case analysis heuristic algorithms. Management Science, Vo. 26, No. 1, 1980.

[4] Jamroż L., Błąd obcięcia w przybliżonych rozwiązaniach zagadnień kombinatorycznych. ZN Politechniki Śląskiej, s.Automatyka z.84,1986.

[5] Lin S., Heuristic programming as an Aid to network design. Networks, No. 5, 1975.

[6] Robson D.S., Whitlock J.H., Estimation of a truncation point. Biometrica, Vo. 51, 1974.

Recenzent: Doc.dr h.inż.Jan Kałuski

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

AN EVALUATION OF HEURISTIC SOLUTIONS FOR COMBINATORIAL PROBLEMS

S u m m a r y

This paper deals with the approach to estimate the value of heuristic solutions for combinatoric problems.

Estimator considered is based on the order statistic obtained from a set of solutions. The simplest form of the problem is the estimation of unknown value parameter Θ. This value determines the truncation point in the set of solutions.

ВОПРОС ОЦЕНКИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОБЛЕМ

Р е з ю м е

В работе представлен подход к задаче оценки достоинства эвристических решений комбинаторных проблем. Эти проблемы часто просты в формулировке, а трудны в решении из-за того, что потенциальное число оптимальных решений для данной проблемы может быть очень велико и определение оптимального решения является непрактичным. Оценка построена на упорядоченных статистических расчетах, полученных из набора эвристических решений. Проблема сводится к оценке неизвестной величины параметра θ. Эта величина определяет пункт разреза в наборе решений. В проблемах максимализации определяем правосторонний пункт разреза. Определена также верхняя граница интервала уверенности для величины его париметра. Предложенные подходы могут быть использованы для оценки решений эвристических прикладных комбинаторных проблем.