ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990
Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Ignacy Kaliszewski
Instytut Badań Systemowych, PAN

ANALIZA ZBIORU PARETO W PRZESTRZENI KRYTERIALNEJ[1]

Streszczenie. Przedmiotem prezentacji są metody rozwiązywania zadań optymalizacji wektorowej, oparte na technikach separowania elementów zbiorów za pomocą stożków wypukłych. Przedstawimy także oryginalne idee oraz wyniki teoretyczne związane z tymi metodami. Dzięki przedstawionym wynikom możliwe jest wykorzystanie technik separacji nie tylko do generowania rozwiązań efektywnych, lecz również do analizy odporności rozwiązań efektywnych, analizy wrażliwości rozwiązań efektywnych względem zaburzeń struktury dominacji oraz do aproksymacji zbioru Pareto.

1. Wstęp

Rozpatrywać będziemy następujące zadanie optymalizacji wektorowej:

$$\text{(ZOP)} \qquad \underset{x \in X_0}{\mathrm{Vmax}}\ f(x) ,$$

gdzie f jest funkcją wektorową odwzorowującą przestrzeń X w k-wymiarową przestrzeń rzeczywistą, zwaną *przestrzenią kryterialną* (lub *przestrzenią ocen*), $k \geq 2$, a Vmax oznacza operator wyznaczenia wszystkich rozwiązań efektywnych ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych X_0. Niech $Z = \{ y \in R^k \mid y = f(x),\ x \in X_0 \}$. Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, nazywamy *efektywnym*, jeżeli z faktu, że $y_i \geq \bar{y}_i$, $i = 1,\dots,k$, wynika $\bar{y} = y$. Podzbiór elementów efektywnych zbioru Z nazywamy *zbiorem Pareto*. Każde rozwiązanie $\bar{x} \in X_0$ takie, że $\bar{y} = f(\bar{x})$, jest elementem efektywnym, nazywamy rozwiązaniem efektywnym. Dla uproszczenia notacji, wszędzie tam, gdzie to będzie możliwe, będziemy pisać y zamiast $f(x)$ i operować elementami zbioru Z zamiast rozwiązaniami dopuszczalnymi, tj. elementami zbioru X_0. W pracy zakładać będziemy również domkniętość zbioru Z oraz istnienie elementu y^*, $y^* \in R^k$, takiego, że $Z \subset \{y^*\} - \mathrm{int}(R^k_+)$. Przez e^k oznaczać będziemy wektor wierszowy k-wymiarowy złożony z samych jedynek.

---

[1] Praca została wykonana w ramach RP.I.02 "Teoria sterowania i optymalizacja ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych" temat 4.5 "Wybrane metody rozwiązywania zadań programowania dyskretnego".

2. Rozwiązania istotnie efektywne

Definicja 2.1 (Geoffrion (1968)). Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$ nazywamy *właściwie efektywnym*, jeżeli jest on efektywny oraz istnieje skończona liczba $M > 0$ taka, że dla każdego i zachodzi

$$\frac{y_i - \bar{y}_i}{\bar{y}_j - y_j} \leq M$$

dla pewnego j takiego, że $\bar{y}_j - y_j > 0$, o ile tylko $y \in Z$ oraz $y_i - \bar{y}_i > 0$.

Każde rozwiązanie $\bar{x} \in X_0$ takie, że $\bar{y} = f(\bar{x})$ jest elementem właściwie efektywnym, nazywamy rozwiązaniem *właściwie efektywnym*. W praktyce elementy nie będące właściwie efektywnymi są uważane za anomalie i zwykle są pomijane przy wyznaczaniu skończonych podzbiorów (reprezentantów) zbioru elementów efektywnych.

Definicja 2.1 daje możliwość ilościowego scharakteryzowania elementów (rozwiązań) właściwie efektywnych. Problem ten rozpatrzymy w rozdziale czwartym niniejszej pracy. Wykorzystamy tam następującą, równoważną definicję właściwej efektywności. Zauważmy, że z warunku domkniętości zbioru Z wynika, iż liczba M spełniająca Definicję 2.1 należy do przedziału $[M_0, +\infty)$, gdzie M_0 jest pewną liczbą nieujemną.

Definicja 2.2 (Kaliszewski (1988)). Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, nazywamy *istotnie efektywnym*, jeżeli jest efektywny oraz istnieje skończona liczba $M_0 \geq 0$ taka, że

$$M_0 = \max_{y \in Z} \max_{i; y_i - \bar{y}_i > 0} \min_{j; \bar{y}_j - y_j > 0} \frac{y_i - \bar{y}_i}{\bar{y}_j - y_j} .$$

$M = 0$ jeżeli nie istnieje żaden element zbioru Z, dla którego $y_i - \bar{y}_i > 0$ dla pewnego i.

3. Generowanie rozwiązań właściwie efektywnych

Metody generowania rozwiązań efektywnych oparte na technikach

separowania elementów zbiorów za pomoca stożków wypukłych są obszernie opisane w literaturze i od lat stosowane w praktyce (zob. Bowman(1973), Dinkelbach,Iserman(1973), Wierzbicki(1977,1980,1986), Choo,Atkins(1983), Steuer,Choo(1983), Sawaragi i in.(1985), Kaliszewski(1986,1987,1987b), Steuer(1986), Jahn (1986)). Istota tych metod sprowadza się do sprawdzenia w wybranym elemencie $\bar{y}$ zbioru Z warunku $(\{\bar{y}\} + R^k_+) \cap Z = \{\bar{y}\}$ (w przypadku generowania rozwiązań efektywnych) bądź warunku $(\{\bar{y}\} + \varepsilon(R^k_+)) \cap Z = \{\bar{y}\}$ (w przypadku generowania rozwiązań właściwie efektywnych), gdzie $\varepsilon(R^k_+)$ jest pewnym stożkiem takim, że $R^k_+ \subset \mathrm{int}(\varepsilon(R^k_+))$ (porównaj także rozdział 5). Metody te mają postać zadań programowania matematycznego. Ze względów technicznych w praktyce posługujemy się niemal wyłącznie metodami generowania rozwiązań właściwie efektywnych. Elementem różnicującym te metody jest dobór stożka $\varepsilon(R^k_+)$ (zob. Kaliszewski(1986), gdzie przedstawiono szczegółowo zależności pomiędzy postacią stożka $\varepsilon(R^k_+)$ a postacią zadania programowania matematycznego). Przy pewnym szczególnym doborze stożka $\varepsilon(R^k_+)$ otrzymujemy następujące twierdzenie.

<u>Twierdzenie 3.1</u> (Kaliszewski(1988). Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$ jest właściwie efektywny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \Lambda = \{ \lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \}$ i $\rho > 0$ takie, że $\bar{y}$ jest rozwiązaniem następującego zadania programowania

$$\min_{y \in Z} \left\{ \max_i \ \lambda_i [(y^*_i - y_i)] + \rho e^k (y^* - y) \right\}. \qquad (3.1)$$

Dla każdego $y \in Z$ właściwie efektywnego istnieje $\lambda \in \Lambda$ taki, że y rozwiązuje powyższy problem jednoznacznie dla pewnego dodatniego ρ spełniającego zależność $M_0 < (k\rho)^{-1}$. Dla każdego $y \in Z$ będącego rozwiązaniem problemu (3.1) zachodzi $M_0 \le (1 + (k-1)\rho)\rho^{-1}$.

Słabsza wersja tego twierdzenia została udowodniona w pracy Choo,Atkins (1983) (zob. również Kaliszewski(1987a)). To co wyróżnia powyższe twierdzenie spośród twierdzeń tego samego typu znanych z literatury, to oszacowania na wartość M_0. Podobny rezultat z postacią zadania

$\min_{y \in Z} \max_i \{\lambda_i (y_i^* - y_i) + \rho e^k (y^* - y)\}$ uzyskano w pracy Kaliszewski (1985).

4. Odporność rozwiązań efektywnych

Pojęcie odporności rozwiązań efektywnych wprowadzimy w oparciu o pojęcie rozwiązań istotnie efektywnych.

Definicja 4.1 (Kaliszewski (1988)). Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$ nazywamy *istotnie efektywnym*, jeżeli jest on efektywny oraz istnieje skończona liczba $S_0 \geq 0$ taka, że

$$S_0 = \max_{y \in Z} \max_{i; y_i - \bar{y}_i > 0} \max_{j; \bar{y}_j - y_j > 0} \frac{y_i - \bar{y}_i}{\bar{y}_j - y_j} .$$

$S_0 = 0$, jeżeli nie istnieje żaden element zbioru Z, dla którego $y_i - \bar{y}_i > 0$ dla pewnego i.

Każde rozwiązanie $\bar{x}$, $\bar{x} \in X_0$, takie, że $f(\bar{x})$ jest elementem istotnie efektywnym, nazywamy rozwiązaniem *istotnie efektywnym*. Rozwiązania (elementy) istotnie efektywne są właściwie efektywne, ale nie odwrotnie. Przypadkiem szczególnym jest przypadek $k = 2$ - każde rozwiązanie (element) właściwie efektywne (właściwie efektywny) jest w tym przypadku istotnie efektywne.

Rozwiązania istotnie efektywne nazywamy również *rozwiązaniami odpornymi*. Motywacją do wprowadzenia pojęcia odporności rozwiązań efektywnych jest następujące rozumowanie. Załóżmy, że zadanie ZOP modeluje pewien problem podejmowania decyzji. Wtedy X_0 jest zbiorem decyzji efektywnych, zbiór rozwiązań efektywnych jest zbiorem decyzji efektywnych, f jest wektorową oceną decyzji. Załóżmy również, że $\bar{x}$ jest pewną decyzją efektywną. Pojęcie odporności pozwala nam ocenić skutki odejścia od podjętej (wynegocjowanej) decyzji $\bar{x}$ do dowolnej innej decyzji ze zbioru X_0. Jeżeli $\bar{x}$ nie jest rozwiązaniem odpornym, to dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje taka para indeksów i, j, $i \neq j$, oraz decyzja $x \in X_0$ taka, że *współczynnik wymiany*

$$\frac{f_i(x) - f_i(\bar{x})}{f_j(\bar{x}) - f_j(x)} ,$$

gdzie $f_i(x) - f_i(\bar{x}) > 0$, $f_j(\bar{x}) - f_j(x) > 0$, jest większy niż δ. Jeżeli x jest rozwiązaniem odpornym, to istnieje $\delta > 0$ takie, że wszystkie współczynniki wymiany są mniejsze bądź równe δ. Jeżeli δ jest małą liczbą, to skutki odejścia od decyzji $\bar{x}$ mogą być ocenione jako niewielkie (bezpieczne). Zwróćmy uwagę, że odporność rozwiązania jest definiowana względem całego zbioru X_0; jest więc ona pojęciem globalnym.

Następujące dwa twierdzenia dostarczają nam technicznych środków do identyfikowania rozwiązań istotnie efektywnych. Niech J będzie zbiorem par indeksów (i,j) takich, że $i,j = 1,\dots,k$, $i \neq j$, $i < j$.

Twierdzenie 4.1. (Kaliszewski (1988)). Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, jest istotnie efektywny oraz $S_0 \leq (1 + \rho)(\rho)^{-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on efektywny oraz istnieje dodatnia liczba ρ taka, że dla wszystkich y, $y \in Z$, i wszystkich $(i,j) \in J$ spełnione są następujące nierówności:

$$1 \leq \max_{y \in Z(\bar{y},i)} \bar{\lambda}_{ij}[(1 + \rho)(y_i^* - y_i) + \rho(y_j^* - y_j)],$$

$$1 \leq \max_{y \in Z(\bar{y},j)} \bar{\lambda}_{ji}[(1 + \rho)(y_j^* - y_j) + \rho(y_i^* - y_i)],$$

gdzie: $\bar{\lambda}_{si} = [(1 + \rho)(y_s^* - \bar{y}_s) + \rho(y_i - \bar{y}_i)]^{-1}$, y^* jest elementem R^k takim, że $Z \subset \{y^*\} - \mathrm{int}(R_+^k)$, $Z(\bar{y},i) = \{ y \in Z \mid \bar{y}_i > y_i \}$.

Twierdzenie 4.2. Jeżeli $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, jest rozwiązaniem efektywnym oraz $\rho = \bar{\rho}$ jest największą dodatnią liczbą taką, że dla wszystkich y, $y \in Z$, i dla wszystkich $(i,j) \in J$ spełnione są następujące nierówności:

$$1 \leq \max_{y \in Z(\bar{y},i)} \bar{\lambda}_{ij}[(1 + \bar{\rho})(y_i^* - y_i) + \bar{\rho}(y_j^* - y_j)],$$

$$1 \leq \max_{y \in Z(\bar{y},j)} \bar{\lambda}_{ji}[(1 + \bar{\rho})(y_j^* - y_j) + \bar{\rho}(y_i^* - y_i)],$$

gdzie $\bar{\lambda}$, oraz $Z(\bar{y},i)$ są zdefiniowane jak w Twierdzeniu 4.1, to $\bar{y}$ jest elementem istotnie efektywnym oraz $S_0 = (1 + \bar{\rho})(\bar{\rho})^{-1}$.

5. Wrażliwość rozwiązań właściwie efektywnych względem zaburzeń struktury dominacji

Funkcja f ustala w zadaniu optymalizacji wektorowej pewną strukturę dominacji. W przypadku ogólnym strukturę dominacji definiuje się poprzez pewien zbiór D : mówimy, że element $\bar{y}$ przestrzeni R^k dominuje element $\tilde{y}$, jeżeli $\bar{y} - \tilde{y} \in D$. Elementy efektywne względem danej struktury dominacji są to elementy niezdominowane. W zadaniu optymalizacji wektorowej struktura dominacji zadana jest za pomocą stożka $R^k_+ = \{ y \in R^k \mid y > 0 \}$.

W niniejszym rozdziale stawiamy sobie za cel podanie odpowiedzi na następujące pytanie: dane jest rozwiązanie właściwie efektywne $\bar{x}$, $\bar{x} \in X_0$; jakie zaburzenia funkcji f są dopuszczalne, to znaczy nie naruszają statusu efektywności tego rozwiązania?

Aby to osiągnąć, rozważymy najpierw, jakie zaburzenia struktury dominacji danej stożkiem R^k_+ są dopuszczalne dla elementu $\bar{y} = f(\bar{x})$, to znaczy nie naruszają statusu efektywności tego elementu. Zakładać będziemy, że zaburzenia struktury dominacji danej stożkiem R^k_+ są również stożkami wypukłymi. Zauważmy, że każde zaburzenie K , gdzie K jest stożkiem w R^k_+ , takie, że $K \subset R^k_+$, jest dopuszczalne dla każdego elementu efektywnego y , $y \in Z$.

Przypomnimy równoważne podanym wcześniej definicjom, lecz ogólniejsze definicje efektywności i właściwej efektywności. Niech będzie dany pewien stożek K ustalający strukturę dominacji w R^k (a więc i w X). Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$ jest *K-efektywny*, jeżeli $(\{\bar{y}\} + K) \cap Z = \{\bar{y}\}$. Element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, jest *K-właściwie efektywny*, jeżeli jest K-efektywny oraz istnieje wypukły stożek K_ε taki, że $K \subset \mathrm{int}(K_\varepsilon)$ oraz element $\bar{y}$ jest K_ε-efektywny, tj. $(\{\bar{y}\} + K_\varepsilon) \cap Z = \{\bar{y}\}$. Ta ostatnia definicja pochodzi od Heniga (zob. Henig(1982a,b).

Z powyższej definicji oraz z założenia o domkniętości zbioru Z wynika, że dla każdego elementu właściwie efektywnego $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, istnieje maksymalne zaburzenie (wypukły stożek) $\tilde{K}(\bar{y})$ taki, że $R^k_+ \subset \mathrm{int}(\tilde{K}(\bar{y}))$. Poniżej przedstawiamy metodę aproksymacji stożka $\tilde{K}(\bar{y})$ zaproponowaną w pracy Kaliszewski(1989).

Załóżmy, że dla pewnego λ oraz ρ za pomocą Twierdzenia 3.1. został wyznaczony właściwie efektywny element $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$. Oznacza to, że w $\bar{y}$ spełniony jest warunek $(\{\bar{y}\} + K_\rho) \cap Z = \{\bar{y}\}$, gdzie K_ρ ma postać $\{ y \in R^k \mid y_i + \rho e^k y \geq 0 \ , \ i = 1,\dots,k \}$. Oczywiście, $K_{\rho'} \supset K_\rho$, jeżeli

$\rho' \geq \rho$. Zatem im większa wartość parametru ρ (przy nie zmienionym λ), dla którego $\bar{y}$ rozwiązuje zadanie (3.1), tym lepsza aproksymacja $\tilde{K}(\bar{y})$. Można sformułować zatem zadanie poszukiwania maksymalnej wartości parametru ρ, dla którego $\bar{y}$ jest rozwiązaniem zadania (3.1) (zob. Kaliszewski(1988)). Satysfakcjonujące wartości ρ mogą być znalezione np. metodą bisekcji.

Załóżmy, że dla pewnego efektywnego $\bar{y}$, $\bar{y} \in Z$, znamy dopuszczalne zaburzenie K_ρ. Rozważmy zadanie optymalizacji wektorowej (ZOW), w którym funkcja celu f została zastąpiona inną funkcją f', $f': X \to R^k$.

<u>Lemat 5.1.</u> Warunkiem wystarczającym na to, aby rozwiązanie efektywne $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ było efektywne względem f', jest spełnienie nierówności:

$$\beta_i f'_i(x) \leq f_i(x) + \rho e^k f(x), \text{ dla } i = 1,\dots,k, \quad x \in \tilde{X}, \tag{5.1}$$

gdzie $\tilde{X} = \{ x \in X \mid f_i(x) - f_i(\bar{x}) + \rho e^k(f(x) - f(\bar{x})) \geq 0, \ i = 1,\dots,k \}$, $\beta_i = (f_i(\bar{x}) + \rho e^k f(\bar{x}))(f'_i(\bar{x}))^{-1}$

<u>Dowód.</u> Oznaczmy $T = \{ x \in X \mid f'_i(x) - f'_i(\bar{x}) \geq 0, \ i = 1,\dots,k \}$. Ponieważ $\bar{x}$ jest rozwiązaniem efektywnym względem f, natomiast K_ρ jest dopuszczalnym zaburzeniem $\bar{y}$, zachodzi $(\{\bar{y}\} + K_\rho) \cap Z = \{\bar{y}\}$ lub, co równoważne, $\tilde{X} \cap X_0$. Aby $\bar{x}$ było efektywne względem f', musi zachodzić $T \cap X_0 = \{\bar{x}\}$. Warunek ten jest spełniony, jeżeli $\tilde{X} \supset T$. Powyższa inkluzja jest spełniona, jeżeli $f_i(x) - f_i(\bar{x}) + \rho e^k(f(x) - f(\bar{x})) \geq \beta_i(f'_i(x) - f'_i(\bar{x}))$, dla $i = 1,\dots,k$, $x \in \tilde{X}$, lub inaczej, $f_i(x) + \rho e^k f(x) \geq \beta_i f'_i(x)$, dla $i = 1,\dots,k$, $x \in \tilde{X}$. ∎

Jeżeli funkcje f i f' są dodatnio jednorodne, to warunek (5.1) redukuje się do

$$f'_i(x) \leq f_i(x) + \rho e^k f(x), \quad x \in \Lambda, \quad i = 1,\dots,k, \tag{5.2}$$

gdzie $\Lambda = \{ x \in \tilde{X} \mid \sum_{i=1}^{k} [f_i(x) - f_i(\bar{x}) + \rho e^k(f(x) - f(\bar{x}))] = 1 \}$.

Warunek (5.1) można sprawdzić stosunkowo prosto obliczając dla każdego i

$$\max_{x \in \tilde{X}} (f'_i(x) - (f_i(x) + \rho e^k f(x))) \tag{5.3}$$

lub

$$\max_{x \in \Lambda} (f'_i(x) - (f_i(x) + \rho e^k f(x))). \tag{5.4}$$

Zaletą przedstawionej metody jest jej ogólność. Zwróćmy uwagę, że mi ogólności metody uzyskujemy podobny efekt jak np. przy wyspecjalizowane metodzie dla wielokryterialnych zadań programowania liniowego podanej pracy Despande,Zionts(1979) - po określeniu dopuszczalnego zaburzenia postaci stożka K_ρ zbiór X_0 nie odgrywa żadnej roli w analizie wrażliwość wybranego rozwiązania efektywnego (por. także Gal,Leberling(1981) Gal,Wolf(1986,1988). W spostrzeżeniu tym zawarta jest zasadnicza różnic pomiędzy bezpośrednim sprawdzeniem, czy dane rozwiązanie pozostaj efektywne po zmianie funkcji f a proponowanym powyżej podejściem.

6. Aproksymacja zbioru Pareto w przestrzeni kryterialnej

Istnieje szereg metod dla aproksymacji zbioru Pareto w dwukryterialnyc zadaniach optymalizacji wektorowej (tj. dla $k = 2$), w których zbiór jest wypukły (zob. Solanki,Cohon(1989)). Uogólnieniem tych met jest *algorytm kanapkowy* (*sandwich algorithm*) dla aproksymacji wartośc wypukłej funkcji skalarnej jednej zmiennej podany w Burkard i in.(1987 oraz Fruhwirth i in.(1988) wraz z oszacowaniem szybkości ich zbieżności Jak dotąd, nie istnieją algorytmy dla aproksymacji zbioru Pareto przypadku ogólnym. Poniżej przedstawiamy ideę takiego algoryt wykorzystującego techniki omawiane w pracy.

Załóżmy, że $k = 2$, $f(x)$ jest funkcją ciągłą, X_0 zbiorem nieskończony i spójnym. Wówczas zbiór Pareto jest krzywą. Każde rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wektorowej w oparciu o Twierdzenie 3.1 wyznacza w zbiór elementów $f(\bar{x}) + K_\rho$, gdzie $K_\rho = \{ y \in R^2 \mid y_i + \rho e^2 y \geq 0$, $i = 1,\dots,k \}$. Oczywiście, ponieważ $\bar{x}$ jest rozwiązaniem efektywny $(f(\bar{x}) + K_\rho) \cap Z = f(\bar{x})$. Zatem zbiór $f(\bar{x}) + K_\rho$ wyznacza pewną stożkow aproksymację zbioru Z. Suma takich zbiorów pochodzących od różny rozwiązań efektywnych jest także aproksymacją; im więcej znamy rozwiąz efektywnych, tym lepsza aproksymacja.

W celu poprawienia aproksymacji możemy, podobnie jak w poprzedni rozdziale, postawić zadanie poszukiwania maksymalnej wartości ρ, dla które $(f(\bar{x}) + K_\rho) \cap Z = f(\bar{x})$.

Jeżeli krzywa Pareto jest pewną funkcją wklęsłą, to powyższy schem prowadzi do aproksymacji gorszych niż wspomniane wyżej wyspecjalizowan metody dla przypadku wypukłego Z. Natomiast gdy krzywa Pareto jest funkc ściśle wypukłą, to schemat ten jest jedynym możliwym do zastosowani

Jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych przypadków, to dla uzyskania efektywności aproksymacji powyższy schemat wymaga pewnych modyfikacji; jednak i w tym przypadku aproksymacja stożkami odgrywa zasadniczą rolę.

LITERATURA

Bowman V.J. Jr., On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives. Multiple Criteria Decision Making, H.Thiriez and S.Zionts (eds), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 130, Springer Verlag, 1976.

Burkard R.E., Hamacher H.W., Rothe G., Approximation of convex functions and Applications in mathemathical programming. Report 89-1987, Institut für Mathematik, Technische Universität Graz, 1987.

Choo E.U., Atkins D.R., Proper efficiency in nonconvex programming. Mathematics of Operations Research, vol 8, 1983, 467-470.

Deshpande D.V., Zionts S., Sensitivity analysis in multiple objective linear programming: changes in the objective function matrix. Working Paper no 399 (1979), State University of New York, USA.

Dinkelbach W., Iserman H., On decision making under multiple criteria and under incomplete information. J.L. Cochrane, M. Zeleny (eds), Multiple criteria decision making. University of South Carolina, Columbia, 1973, 302-312.

Fruhwirth B., Burkard R.E., Rote G., Approximation of convex curves with applications to the bicriterial minimum cost flow problem, Report no 119, Institut für Mathematik, Technische Universität Graz, 1988.

Gal T., Leberling H., Relaxation analysis in linear vectorvalued maximization. European Journal of Operations Research, vol 8, 1981, 274-282.

Gal T., Wolf K., Stability in vector optimization - a survey. European Journal of Operations Research, vol 25, 1986, 169-182.

Gal T., Wolf K., The impact of variations of the domination structure on the efficient solutions in a decision problem under several criteria. Paper presented at IX-th International Conference on MCDM Methods, Manchester, England, August, 1988.

Geoffrion A.M., Proper efficiency and the theory of vector maximization. Journal of Mathematical Analysis and its Applications, vol 22, 1968, pp 618-630.

pp 387-407.
Henig M.I., A cone separation theorem. JOTA, vol 36, 1982, 451-455.
Jahn J., Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces, Peter Lang, Frankfurt am Main, 1986.
Kaliszewski I., Characterization of properly efficient sclutions by an augmented Tchebycheff norm. Bulletin of Polish Accademy of Sciences, Ser. Technical Sciences 33, 1985, pp 415-420.
Kaliszewski I., Norm scalarization and proper efficiency in vector optimization. Foundations of Control Engineering, vol 11 , 1986.
Kaliszewski I. A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming. Computers and Operations Research, vol 14, 1987, 315-323.
Kaliszewski I., Generating nested subsets of efficient solutions. Recent Advances and Historical Development of Vector Optimization. J.Jahn, W.Krabs, (eds.) , Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 294, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
Kaliszewski I., Substantially efficient solutions of vector optimization problems. Systems Research Institute Technical Report ZPM5/88, Warszawa, 1988.
Steuer R.E., Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. John Wiley & Sons, New York, 1976.
Steuer R.E., Choo E.U., An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. Mathematical Programming, vol 26, 1983, 326-344.
Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T., Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, New York, 1985.
Solanki R.S., Cohon J.L., Approximating the noninferior set in linear biobjective programs usuig multiparametric decomposition. EJOR 41, 1989, 355-366.
Wierzbicki A.P., Basic properties of scalarization functionals for multiobjective optimization. Mathematische Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization, vol 8, 1977, 55-60.
Wierzbicki A.P., The use of reference objectives in multiobjective optimization. Multiple Criteria Decision Making; Theory and Applications, G.Fandel, T.Gal (eds.) Springer Verlag, 1980, 468-486.
Wierzbicki A.P., On the completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems. OR Spectrum, vol 8, 1986, 73-87.

Recenzent: Prof.dr h.inż.R.Słowiński

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

THE ANALYSIS OF THE PARETO SET IN THE CRITERIA SPACE

S u m m a r y

The method of solving vector optimization problems using techniques for separation of elements of sets by convex cones are presented together with original ideas and theoretical results related to those methods. With the help of the results the above techiques can be used not only to generate the efficient solutions but also to the analyse the robustness of efficient solutions, to perform the sensitivity analysis of efficient solutions with respect to domination structure perturbations. and to approximations of the Pareto sets.

АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В ПРОСТРАНСТВЕ ОЦЕНОК

Р е з ю м е

Описаны методы решения задач векторной оптимизации, основанные на принципах сепарации элементов множеств при помощи выпуклых конусов. Кроме того представлены оригинальные идеи и теоретические результаты, которые позволяют применять эти принципы не только для генерирования эффективных решений, но тоже для анализа устойчивости эффективных решений, анализа чувствительности эффективных решений по отношению к возмушениям структур доминирования и для аппроксимации множества Парето.