ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990
Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Krzysztof Pieńkosz
Eugeniusz Toczyłowski
Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

Warunki idealnej dezagregacji wyrobów w systemach jednostopniowych z ograniczonymi magazynami [1]

Streszczenie. W pracy jest rozważany problem harmonogramowania w jednostopniowym systemie produkcyjnym przy występowaniu ograniczeń zasobowych oraz dolnych i górnych ograniczeń na stan zapełnienia magazynów. Analizowane są modele zagregowane dla tego problemu. Sformułowano warunki konieczne i dostateczne idealnej dezagregacji tj. warunki gwarantujące dopuszczalność rozwiązania zdezagregowanego. Bazując na tych warunkach pokazano jak można utworzyć model zagregowany w pełni równoważny problemowi pierwotnemu. Zaproponowano też prostsze restrykcyjne modele zagregowane umożliwiające znajdowanie suboptymalnych harmonogramów.

1. Wstęp

Harmonogramowanie produkcji w złożonych systemach wytwarzania, w których wspólne zasoby są wykorzystywane do produkcji dużej ilości różnorodnych wyrobów, prowadzi do trudnych zadań optymalizacji. Ze względu na ich wymiarowość, zazwyczaj takich zadań nie udaje się rozwiązywać w sposób bezpośredni. Jednym z efektywnych podejść często stosowanych w takich przypadkach jest próba redukcji wymiarowości zadania poprzez agregację problemu (patrz prace [1,2,3,5,6,9]). Harmonogram wyznaczany jest wtedy w wyniku agregacji problemu pierwotnego, rozwiązania problemu zagregowanego i dezagregacji rozwiązania zagregowanego. Efektywność tego podejścia w dużym stopniu zależy od zastosowanej metody agregacji. Z jednej strony model zagregowany powinien mieć prostą strukturę, aby był łatwy do rozwiązywania. Z drugiej strony powinien wiernie odzwierciedlać istotne cechy zadania pierwotnego. Typowy schemat agregacji przeważnie prowadzi do relaksacji problemu. W takiej sytuacji nie ma gwarancji, że otrzyma się dopuszczalne rozwiązanie zdezagregowane. Z praktycznego punktu widzenia interesujące są modele zagregowane, które umożliwiają *idealną dezagregację*, tzn. zapewniają, że optymalne rozwiązanie problemu zagregowanego można przekształcić w optymalne rozwiązanie problemu pierwotnego.

W niniejszej pracy są proponowane, a następnie analizowane pod kątem możliwości idealnej dezagregacji, różne modele zagregowane dla zadań harmonogramowania produkcji w systemach jednostopniowych z uwzględnieniem *ograniczonych magazynów*. Rozważane w pracy zadanie harmonogramowania jest szczegółowo przedstawione w rozdziale 2. W rozdziale 3 sformułowano trzy modele zagregowane dla tego problemu. Agregacja polega na grupowaniu wyrobów według ich podobieństwa technologicznego i zastępowaniu wyrobami zagregowanymi. Dla każdego z modeli sformułowano warunki konieczne i dostateczne idealnej dezagregacji. W rozdziale 4 podano pewne wskazówki, jak konstruować proste modele zagregowane zachowujące strukturę ograniczeń problemu pierwotnego i umożliwiające znalezienie dopuszczalnego, w ogólności przybliżonego rozwiązania problemu pierwotnego. W rozdziale 5 przedstawiono

[1] praca częściowo finansowana w ramach problemu R.P.I.02 w temacie 5.3

wykorzystanie omawianej w pracy metody agregacji do rozwiązania praktycznego zadania harmonogramowania produkcji.

2. Zadanie harmonogramowania

Rozważany jest problem harmonogramowania produkcji w systemie jednostopniowym z ograniczeniami zasobowymi oraz ograniczeniami na stan zapełnienia magazynów. W wielu systemach produkcyjnych liczba typów wytwarzanych wyrobów może być dość znaczna. Często okazuje się jednak, że wiele takich wyrobów charakteryzuje się zbliżonymi parametrami produkcyjnymi. Przyjmijmy więc, że w wyniku analizy problemu jest możliwe pogrupowanie produktów tak, że produkty należące do jednej grupy mają podobne wymagania zasobowe oraz koszty produkcji i magazynowania. W szczególności są pomijalne przezbrojenia maszyn przy zmianie produktów należących do tej samej grupy. Przyjmiemy, że ze zbioru produktów N uzyskano zbiór K podzbiorów produktów podobnych $N_k, k \in K$. Zagadnienie harmonogramowania produkcji w systemie jednostopniowym z minimalnokosztowym kryterium jakości przy uwzględnieniu ograniczeń na stan zapasów, ograniczeń zasobowych oraz czasów i kosztów przezbrojeń między grupami wyrobów można sformułować następująco

Problem P

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{k \in K} s_{kt} v_k(t) + \sum_{i=1}^{n} (c_{it} x_i(t) + h_{it} I_i(t)) \right] \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{2}$$

$$0 \le x_i(t) \le M v_k(t), \quad v_k(t) \in \{0,1\} \qquad i \in N_k; k \in K; t = 1, \ldots, T \tag{3}$$

$$\sum_{k \in K} e_{krt} v_k(t) + \sum_{i=1}^{n} p_{irt} x_i(t) \le Q_{rt} \qquad r = 1, \ldots, R; t = 1, \ldots, T \tag{4}$$

$$0 \le I_i(t) \le \bar{I}_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{5}$$

$$I_i(0) = I_{i0} = 0 \qquad i \in N \tag{6}$$

W zadaniu występują zmienne decyzyjne: $x_i(t)$ - wielkość produkcji wyrobu i w okresie t, $v_k(t)$ - zmienna binarna równa jeden wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i \in N_k} x_i(t) > 0$, $I_i(t)$ - stan zapasu produktu i na koniec okresu t. Parametrami są: T - horyzont harmonogramowania, s_{kt} - koszt przezbrojenia związany z wznawianiem produkcji jednego z wyrobów rodziny k w okresie t, c_{it} - koszt produkcji jednostki wyrobu i w okresie t, h_{it} - koszt magazynowania jednostki produktu i w okresie t, d_{it} - zapotrzebowanie zewnętrzne na produkt i w okresie t, e_{krt} - liczba jednostek zasobu r wymaganych przez jedno przezbrojenie dla rodziny k w okresie t, p_{irt} - liczba jednostek zasobu r wymaganych przy produkcji jednostki produktu i w okresie t, Q_{rt} - łączna dostępność zasobu r w okresie t, $I_i(0)$ - początkowy stan zapasu produktu i, $\bar{I}_{it}$ - maksymalny dopuszczalny poziom zapasów produktu i pod koniec okresu t, M - liczba większa od największej porcji produkcyjnej grupy wyrobów.

Warto zaznaczyć, że do powyższej postaci sformułowania można sprowadzić także zadania harmonogramowania, w których stan początkowy $I_i(0)$ oraz dolne ograniczenia na poziom zapasów w nierównościach (5) są większe od zera. Pokazano to w pracy [7] wykorzystując ideę regularyzacji modelu zadania opisaną w [8].

Zagadnieniem agregacji wyrobów w podobnym problemie harmonogramowania zajmowali się między innymi Bitran i Hax [2], Bitran, Haas i Hax [3], Erschler, Fontan i Merce [4]. Przedstawiony tam schemat agregacji miał niestety tę wadę, że w ogólnym przypadku nie gwarantował uzyskania dopuszczalnego rozwiązania problemu pierwotnego. W pracy [8] pokazano, jak konstruować poprawne modele zagregowane dla prostszego zadania, w którym dopuszcza się nieujemne początkowe stany zapasów i dolne ograniczenia na poziom zapasów, natomiast nie uwzględnia się górnych ograniczeń $\bar{I}_{it}$.

3. Agregacja wyrobów

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że zbiór wyrobów można podzielić na grupy produktów podobnych posiadających własności

$$c_{it} = C_{kt},\ h_{it} = H_{kt} \text{ i } p_{irt} = P_{krt} \qquad \forall i \in N_k;\ k \in K;\ r = 1,\ldots,R \tag{7}$$

Przedstawione w pracy koncepcje można zastosować także do przypadków, gdy powyższe współczynniki nie są identyczne lecz tylko zbliżone (patrz [7]). Od stopnia podobieństwa parametrów zależy jednak dokładność uzyskiwanych rezultatów.

Narzucający się sposób agregacji problemu P przy założeniach (7) polega na sumowaniu ograniczeń odpowiadających poszczególnym produktom podobnym i wprowadzeniu zmiennych zagregowanych

$$X_k(t) = \sum_{i \in N_k} x_i(t) \quad , \quad F_k(t) = \sum_{i \in N_k} I_i(t) \qquad k \in K;\ t = 1,\ldots,T \tag{8}$$

W ten sposób otrzymujemy model zagregowany

Problem A1

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k \in K} \left(s_{kt} v_k(t) + C_{kt} X_k(t) + H_{kt} F_k(t)\right) \tag{9}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} \qquad k \in K; t = 1,\ldots,T \tag{10}$$

$$0 \le X_k(t) \le M v_k(t), \qquad v_k(t) \in \{0,1\} \qquad k \in K; t = 1,\ldots,T \tag{11}$$

$$\sum_{k \in K} \left(e_{krt} v_k(t) + P_{krt} X_k(t)\right) \le Q_{rt} \qquad r = 1,\ldots,R; t = 1,\ldots,T \tag{12}$$

$$0 \le F_k(t) \le \bar{F}_{kt} \qquad k \in K; t = 1,\ldots,T \tag{13}$$

$$F_k(0) = 0 \qquad k \in K \tag{14}$$

gdzie

$$D_{kt} = \sum_{i \in N_k} d_{it} \quad , \quad \bar{F}_{kt} = \sum_{i \in N_k} \bar{I}_{it}\,.$$

Zadanie $A1$ ma taką samą strukturę ograniczeń jako model pierwotny, ale występuje w nim mniej zmiennych i ograniczeń. W związku z tym łatwiej je rozwiązać. Aby zdezagregować rozwiązanie zagregowane $(X_k(t), F_k(t))_{k \in K, t=1,\ldots,T}$ w rozwiązanie problemu pierwotnego, należy znaleźć $(x_i(t), I_i(t))_{i \in N, t=1,\ldots,T}$ spełniające ograniczenia (2), (3), (5), (6), (8). Odpowiada to znalezieniu przepływu dopuszczalnego w odpowiednio skonstruowanej sieci (patrz [7]).

Problem $A1$ jest oczywiście *relaksacją* problemu pierwotnego P. Każde rozwiązanie dopuszczalne problemu P jest przekształcane przez wzór (8) w rozwiązanie dopuszczalne problemu $A1$ o tej samej wartości funkcji celu. Wadą tego modelu jest fakt, że w ogólnym przypadku rozwiązania zagregowanego problemu $A1$ może nie dać się zdezagregować. Pokazuje to poniższy przykład.

Przykład 1. Rozważmy problem harmonogramowania produkcji rodziny dwóch produktów podobnych: $K = \{1\}$, $N_1 = N = \{1, 2\}$. Dla uproszczenia przykładu nie uwzględnia się w tym zadaniu ograniczeń zasobowych (4). Parametry zadania są następujące: $T = 3$, $\bar{I}_{11} = \bar{I}_{13} = \bar{I}_{23} = 0$, $\bar{I}_{12} = \bar{I}_{21} = \bar{I}_{22} = 4$, $c_{11} = c_{21} = 1$, $c_{12} = c_{22} = 3$, $c_{13} = c_{23} = 2$, $d_{11} = d_{21} = d_{13} = d_{23} = 2$, $d_{12} = 3$; $d_{22} = 1$ i $s_{1t} = 0, h_{1t} = h_{2t} = 0$ dla $t = 1, 2, 3$. Rozwiązanie optymalne problemu pierwotnego daje koszt 20 przy $x_1(1) = 2$, $x_1(2) = 3$, $x_1(3) = 2$, $x_2(1) = 5, x_2(2) = x_2(3) = 0$. Po agregacji (8) otrzymujemy model $A1$ z zagregowanymi parametrami: $\bar{F}_{11} = 4$, $\bar{F}_{12} = 8$, $\bar{F}_{13} = 0$, $C_{11} = 1$, $C_{12} = 3$, $C_{13} = 2$ i $D_{1t} = 4$, $s_{1t} = 0$, $H_{1t} = 0$ dla $t = 1, 2, 3$. Łatwo sprawdzić, że optymalnym rozwiązaniem problemu zagregowanego jest $X_1(1) = 8$, $X_1(2) = 0$, $X_1(3) = 4$ o koszcie równym 16. To rozwiązanie daje jedynie dolne oszacowanie optymalnego rozwiązania problemu P i nie można go zdezagregować w dopuszczalne rozwiązanie problemu pierwotnego (nie ma możliwości spełnienia zapotrzebowania $d_{12} = 3$).

W prosty sposób można uzyskać silniejsze sformułowanie modelu zagregowanego dokonując regularyzacji górnych ograniczeń na poziomy zapasów. W tym celu dla każdego produktu $i \in N$ wprowadzamy *zregularyzowane górne ograniczenia na poziom zapasów* $\hat{I}_{it}$ definiowane rekurencyjną zależnością:

$$\hat{I}_{it} = \begin{cases} I_i(T) & t = T \\ \min\,(\bar{I}_{it}, \hat{I}_{i,t+1} + d_{i,t+1}) & 1 \leq t < T \end{cases} \tag{15}$$

Można sprawdzić, że dla każdego rozwiązania dopuszczalnego problemu P spełnione są nierówności

$$0 \leq I_i(t) \leq \hat{I}_{it} \leq \bar{I}_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{16}$$

W związku z tym problem zagregowany

Problem A2

min (9) przy ograniczeniach

(10),(11),(12),(14) i

$$0 \leq F_k(t) \leq \hat{F}_{kt} = \sum_{i \in N_k} \hat{I}_{it} \qquad k \in K; t = 1, \ldots, T. \tag{17}$$

jest nadal *relaksacją* problemu P, ale w ogólnym przypadku jest to model bardziej zawężony niż $A1$. Niestety wciąż istnieje możliwość, że pewnych rozwiązań problemu $A2$ nie będzie można zdezagregować w rozwiązania dopuszczalne problemu pierwotnego.

Przykład 2. W zadaniu przedstawionym w przykładzie 1 zregularyzowane górne ograniczenia na poziomy zapasów są następujące: $\hat{I}_{11} = 0$, $\hat{I}_{12} = 2$. $\hat{I}_{13} = 0$, $\hat{I}_{21} = 3$, $\hat{I}_{22} = 2$, $\hat{I}_{23} = 0$. Zatem $\hat{F}_{11} = 3$, $\hat{F}_{12} = 4$, $\hat{F}_{13} = 0$. Optymalne rozwiązanie problemu zagregowanego $A2$ stanowi $X_1(1) = 7$, $X_1(2) = 1$, $X_1(3) = 4$ o koszcie równym 18. W porównaniu do modelu $A1$, rozwiązanie to daje lepsze dolne oszacowanie ale również nie można go zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne problemu pierwotnego.

Podamy warunki, przy których optymalne rozwiązanie zagregowane problemu $A2$ można zdezagregować w optymalne rozwiązanie problemu pierwotnego.

Twierdzenie 1. *Rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) $(X_k(t), F_k(t))_{k\in K, t=1,..,T}$ problemu $A2$ można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu P wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki*

$$\sum_{t=r}^{s} X_k(t) \geq \sum_{i\in N_k} \max(0, \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1}) \qquad \textit{dla każdego } k \in K; 1 < r \leq s \leq T. \tag{18}$$

Dowód. Ze względu na oszczędność miejsca pokażemy tylko, że warunek (18) jest warunkiem koniecznym. Dowód dostateczności jest dużo bardziej złożony i szczegółowo jest przedstawiony w [7].

Niech $(x_i(t), I_i(t))_{i\in N, t=1,..,T}$ będzie dowolnym rozwiązaniem dopuszczalnym problemu P. Z równań (2) wynika, że $I_i(r-1) + \sum_{t=r}^{s} x_i(t) - I_i(s) = \sum_{t=r}^{s} d_{it}$ dla $1 < r \leq s \leq T$. Ponieważ zachodzi (16), zatem spełniona jest nierówność $\sum_{t=r}^{s} x_i(t) = \sum_{t=r}^{s} d_{it} + I_i(s) - I_i(r-1) \geq \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1}$. Ponadto z (3) wynika $\sum_{t=r}^{s} x_i(t) \geq 0$. Zatem dla każdego rozwiązania dopuszczalnego problemu P zachodzi $\sum_{t=r}^{s} x_i(t) \geq \max(0, \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1})$ $\quad i \in N; 1 < r \leq s \leq T$.
Skoro rozwiązanie zagregowane problemu $A2$ można zdezagregować i $X_k(t) = \sum_{i\in N_k} x_i(t)$, więc musi zachodzić warunek (18). □

Z twierdzenia 1 wynika natychmiast wniosek dotyczący warunków idealnej dezagregacji problemu $A1$.

Wniosek 1. *Rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu $A1$ można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu P wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ono warunki (17) i (18).*

Na podstawie twierdzenia 1 możemy zaproponować model zagregowany w pełni *równoważny* problemowi P. Model taki oprócz ograniczeń problemu $A2$ musi zawierać dodatkowo ograniczenia (18).

Problem A3

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k\in K} (s_{kt} v_k(t) + C_{kt} X_k(t) + H_{kt} F_k(t)) \tag{19}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} \qquad k \in K; t = 1, \ldots, T \tag{20}$$

$$0 \leq X_k(t) \leq M v_k(t), \quad v_k(t) \in \{0,1\} \qquad k \in K; t = 1, \ldots, T \tag{21}$$

$$\sum_{k\in K} (e_{krt} v_k(t) + P_{krt} X_k(t)) \leq Q_{rt} \qquad r = 1, \ldots, R; t = 1, \ldots, T \tag{22}$$

$$0 \leq F_k(t) \leq \bar{F}_{kt} \qquad k \in K; t = 1, \ldots, T \tag{23}$$

$$F_k(0) = 0 \qquad k \in K \tag{24}$$

$$\sum_{t=r}^{s} X_k(t) \geq \sum_{i\in N_k} \max(0, \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1}) \qquad k \in K; 1 < r \leq s \leq T \tag{25}$$

Wniosek 2. *Każde rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu $A3$ można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu P.*

Przykład 3. Dla zadania omawianego w przykładach 1 i 2, ograniczenia (25) przyjmują postać:
$X_1(2) \geq \max(0, d_{12} - \bar{I}_{11}) + \max(0, d_{22} - \bar{I}_{21}) = 3$.
$X_1(2) + X_1(3) \geq \max(0, d_{12} + d_{13} - \bar{I}_{11}) + \max(0, d_{22} + d_{23} - \bar{I}_{21}) = 5$.
$X_1(3) \geq \max(0, d_{13} - \bar{I}_{12}) + \max(0, d_{23} - \bar{I}_{22}) = 0$.
Optymalnym rozwiązaniem zagregowanym modelu $A3$ jest $X_1(1) = 7$, $X_1(2) = 3$, $X_1(3) = 2$ o koszcie równym 20. Można sprawdzić, że w wyniku jego dezagregacji otrzymujemy optymalne rozwiązanie problemu pierwotnego: $x_1(1) = 2$, $x_1(2) = 3$, $x_1(3) = 2$, $x_2(1) = 5, x_2(2) = x_2(3) = 0$.

4. Wybór modelu zagregowanego

Proponowany w pracy schemat rozwiązywania złożonych zadań harmonogramowania jest następujący:

1. Agregacja problemu pierwotnego.

2. Rozwiązywanie problemu zagregowanego.

3. Dezagregacja rozwiązania zagregowanego.

Efektywność takiego podejścia w dużym stopniu zależy od tego, w jaki sposób dokonamy agregacji zadania. Agregacja według modelu $A1$ wydaje się być mało atrakcyjna, gdyż poprzez regularyzację górnych ograniczeń na poziomy zapasów, można tanim kosztem utworzyć model $A2$ o takiej samej strukturze i znacznie korzystniejszych własnościach. Z kolei zastosowanie relaksacyjnego modelu $A2$ ma tę wadę, że może prowadzić do rozwiązań zagregowanych, których nie da się zdezagregować. W efekcie uzyskamy tylko dolne oszacowanie wartości optymalnego rozwiązania zadania pierwotnego. Model $A3$ gwarantuje nam, że rozwiązanie zagregowane będzie można zawsze zdezagregować, przy czym z rozwiązania optymalnego modelu $A3$ otrzymujemy rozwiązanie optymalne zadania pierwotnego. Jednak ze względu na dodatkowe ograniczenia (25), zadanie $A3$ jest, w ogólnym przypadku, dużo trudniejsze do rozwiązania niż $A2$. Pokażemy, że istnieje możliwość konstrukcji *restrykcyjnych* modeli zagregowanych, które stanowią pewien kompromis pomiędzy schematami agregacji omawianymi powyżej.

Zauważmy najpierw, że część ograniczeń (25) w modelu $A3$ może być redundancyjna.

Twierdzenie 2. *Jeżeli dla pewnych k, r, s $k \in K; 1 < r \leq s \leq T$ zachodzi warunek*

$$\sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1} \geq 0 \quad \forall i \in N_k \quad \textit{albo} \quad \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1} \leq 0 \quad \forall i \in N_k \tag{26}$$

to ograniczenie (25) odpowiadające indeksom k, r, s jest redundancyjne w modelu $A3$.

Dowód. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1 można pokazać, że dla każdego rozwiązania spełniającego ograniczenia (20), (21), (23) i (24) zachodzi
$\sum_{t=r}^{s} X_k(t) \geq \max(0, \sum_{t=r}^{s} D_{kt} - \bar{F}_{k,r-1}) \qquad \forall k \in K; 1 < r \leq s \leq T$.
Z drugiej strony, jeżeli dla ustalonych k, r, s jest spełniony warunek (26), to dla tych indeksów prawdziwa jest równość $\max(0, \sum_{t=r}^{s} D_{kt} - \bar{F}_{k,r-1}) = \sum_{i \in N_k} \max(0, \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \bar{I}_{i,r-1})$ i ograniczenie (25) staje się zbędne. □

Wniosek 3. *Jeżeli dla wszystkich indeksów k, r, s $k \in K: 1 < r \leq s \leq T$ zachodzi warunek (26), to problemy P and $A2$ są równoważne.*

Załóżmy teraz, że ograniczenia (25) dla pewnych k, r, s znacznie utrudniają rozwiązywanie problemu $A3$, i chcielibyśmy ich uniknąć w modelu zagregowanym. W tym celu dokonajmy restrykcji zadania pierwotnego poprzez zmniejszenie górnych ograniczeń $\bar{I}_{i,r-1}$ dla $i \in N_k$ w taki sposób, aby dla indeksów k, r, s zachodził warunek (26). Po agregacji zmodyfikowanego problemu do postaci problemu $A3$ otrzymujemy zadanie zagregowane, w którym zgodnie z twierdzeniem 2 niewygodne ograniczenia nie są już potrzebne. Restrykcyjny model zagregowany ma więc prostszą strukturę ograniczeń niż model $A3$, ale w wyniku restrykcji może nastąpić odcięcie pewnych rozwiązań dopuszczalnych problemu pierwotnego. W szczególności może być odcięte optymalne rozwiązanie zadania harmonogramowania. Należy jednak podkreślić, że każde rozwiązanie restrykcyjnego modelu zagregowanego, o ile istnieje, może być zawsze zdezagregowane w dopuszczalne rozwiązanie problemu pierwotnego. Z tego powodu podejście restrykcyjne jest atrakcyjną metodą znajdowania suboptymalnego rozwiązania dopuszczalnego. Zauważmy, że w szczególnym przypadku restrykcyjny model zagregowany może mieć nawet taką samą strukturę ograniczeń jak problem $A2$, jeżeli doprowadzi się do sytuacji, że warunek (26) będzie zawsze spełniony.

Przykład 5. Ponieważ model $A2$ nie umożliwiał rozwiązania zadania harmonogramowania przedstawionego w przykładzie 1, pozostają nam dwie drogi postępowania. Po pierwsze możemy zastosować model $A3$ i uzyskać rozwiązanie opisane w przykładzie 3. Możemy też utworzyć prostszy model zagregowany, jeżeli dokonamy restrykcji poprzez wprowadzenie warunku $\bar{I}_2(1) \leq 1$. W restrykcyjnym modelu zagregowanym ograniczenia (23) przyjmują postać: $F_1(1) \leq 1$, $F_1(2) \leq 4$, $F_1(3) \leq 0$, natomiast ograniczenia (25) stają się zbędne. Optymalnym rozwiązaniem problemu zagregowanego jest teraz $X_1(1) = 5$, $X_1(2) = 3$, $X_1(3) = 4$ o koszcie 22. To rozwiązanie można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne problemu pierwotnego $x_1(1) = 2$, $x_1(2) = 3$, $x_1(3) = 2$, $x_2(1) = 3$, $x_2(2) = 0$, $x_2(3) = 2$ stanowiące przybliżenie rozwiązania optymalnego.

5. Uwagi końcowe

Wykorzystując właściwości modeli zagregowanych omawianych w pracy, można w wielu praktycznych przypadkach znacznie usprawnić proces rozwiązywania zadań harmonogramowania. Skuteczność podejścia agregacyjnego jednak w bardzo dużym stopniu zależy od struktury analizowanego problemu. W szczególności duży wpływ na wymiar modeli zagregowanych mają takie czynniki jak : stopień podobieństwa produktów oraz struktura zapotrzebowań i poziom górnych ograniczeń na zapasy. Znajomość właściwości poszczególnych modeli zagregowanych umożliwia odpowiedni dobór algorytmów wyznaczania harmonogramów w zależności od rodzaju problemu.

Proponowaną w pracy metodologię rozwiązywania dużych zadań harmonogramowania produkcji zilustrujemy na przykładzie konkretnego zadania harmonogramania zaczerpniętego z przemysłu. Dane uzyskano z zakładu produkującego podzespoły elektroniczne UNITRA-CEMAT. Na jednym z jego wydziałów są produkowane 24 typy różnych wyrobów finalnych. Do produkcji wykorzystywane są wspólne dla wszystkich wyrobów zasoby (pracownicy, stanowiska), dostępne w ograniczonych ilościach. W uproszczonym modelu harmonogramowania produkcji uwzględniono ograniczenia na dostępność 2 zagregowanych zasobów. Pominięto zmienne binarne, gdyż koszty i czasy związane ze wznawianiem produkcji poszczególnych wyrobów okazały się stosunkowo małe. Przy wyznaczaniu harmonogramu rozważano 12 okresów decyzyjnych. W rezultacie zadanie harmonogramowania produkcji zawierało 576 zmiennych oraz 312 ograniczeń, w tym 288 ograniczeń bilansowych (2) i 24 ograniczenia zasobowe (4). Zadanie to rozwiązano na mikrokomputerze IBM PC/AT wykorzystując metody agregacji. W wyniku analizy parametrów technologicznych poszczególnych produktów wyodrębniono 9 grup produktów o zbliżonych charakterystykach. W skład poszczególnych grup wchodziło odpowiednio 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1 typów produktów. Model zagregowany zawierał więc 216 zmiennych. W pierwszym podejściu rozwiązano relaksacyjny model zagregowany $A2$. Uzyskano jednak rozwiązanie, którego nie można było zdezagregować. Następnie utworzono restrykcyjny model zagregowany AR o takiej samych wymiarach i strukturze jak model $A2$. Restrykcji dokonano poprzez obniżenie górnych ograniczeń $\bar{I}_{it}$ w taki sposób, aby warunek (26) był spełniony dla wszystkich indeksów. W wyniku rozwiązania restrykcyjnego zadania zagregowanego AR i jego dezagregacji uzyskano dopuszczalne rozwiązanie problemu pierwotnego. Jego dokładność można było oszacować w oparciu o minimalny koszt zadania $A2$. Błąd względny nie przekroczył 1%. W celu uzyskania dokładnego rozwiązania, dla porównania wyników, rozwiązano też równoważny model zagregowany $A3$ z dodatkowymi ograniczeniami (25). Wykorzystując twierdzenie 2 udało się zredukować ilość wymaganych dodatkowych ograniczeń z 451 do 98. W poniższej tablicy zestawiono dane dotyczące wymiarów zadań zagregowanych, kosztów optymalnych i czasów obliczeń.

	Model relaksacyjny $A2$	Model restrykcyjny AR	Model równoważny $A3$
liczba zmiennych	216	216	216
liczba ograniczeń	132	132	230
liczba elementów niezerowych	531	531	978
minimalny koszt [mln zł]	1002.417	1004.795	1003.456
czas obliczeń	2 min 15 sek	2 min 11 sek	4 min 24 sek

Literatura

[1] Axsäter S., Jönsson H.: Aggregation and Disaggregation in Hierarchical Production Planning, *European Journal of Operational Research* 17, 338-350, 1984.

[2] Bitran G.R., Hax A.C.: On the Design of Hierarchical Production Planning Systems, *Decision Sciences* 8, 28-55, 1977.

[3] Bitran G.R., Haas E.A., Hax A.C.: Hierarchical Production Planning: A Single Stage System, *Operations Research* 29, 717-743, 1981.

[4] Erschler J., Fontan G., Merce C.: Consistency of the Disaggregation Process in Hierarchical Planning, *Operations Research* 34 , 464-469, 1986.

[5] Hax A.C. and Meal H.C., Hierarchical Integration of Production Planning and Scheduling, in *Studies in Management Science, Vol.1. Logistics*, Geisler M.A. (ed.), 53-69, North Holland - American Elsevier, New York 1975.

[6] Hax A.C., Candea D.: *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall,Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey 1984.

[7] Pieńkosz K., Toczyłowski E.: On Aggregation of Items in Single-Stage Production Systems with Limited Inventory Levels, raport problemu R.P.I.02, temat 5.3, Instytut Automatyki PW 1989.

[8] Toczyłowski E.: On Aggregation of Items in the Single-Stage Lot Size Scheduling Problem, *Large Scale Systems* 10, 157-164, 1986.

[9] Toczyłowski E.: *Niektóre metody strukturalne optymalizacji do sterowania w dyskretnych systemach wytwarzania*, WNT, Warszawa 1989.

Recenzent: Doc.dr h.inż.F.Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

CONDITION OF THE IDEAL DISAGGREGATION OF SINGLE-STAGE PRODUCTION SYSTEMS WITH THE LIMITED RESERVES

Summary. This paper considers the capacitated lot-size scheduling problem in single-stage production systems with the lower and upper bounds on inventory levels. Various aggregated models are analysed for this problem. The conditions of the ideal disaggregation of items which guarantee feasibility of the detailed solutions are given. As the result, it was shown how to construct the aggregate model which is equivalent to the original problem. Simpler restrictive models, which provide feasible, suboptimal solutions, are also proposed.

УСЛОВИЯ ИДЕАЛЬНОГО ДЕЗАГРЕГИРОВАНИЯ В ОДНОСТАДИЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СКЛАДАМИ

Р е з ю м е

В статье рассматривается проблема составления графика в одностадийной системе производства при наличии ресурсных ограничений, а также нижних и верхних ограничений на уровень наполнения складов. Для этой проблемы исследованы агрегированные модели. Сформулированы необходимые и достаточные условия идеального дезагрегирования т.е. условия, гарантирующие допустимость дезагрегированного решения. Базируясь на этих условиях, показано как можно построить агрегированную модель полностью эквивалентную первоначальной проблеме. Предложены тоже более простые ограничительные агрегированные модели, позваляющие находить субоптимальные решения.