ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Ewa Skubalska-Rafajłowicz
Politechnika Wrocławska

ZASTOSOWANIE MATEMATYKI INTERWAŁOWEJ W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ SZEREGOWANIA

Streszczenie. W artykule zaproponowano zastosowanie analizy interwałowej (przedziałowej) w rozwiązywaniu zadań szeregowania dyskretnych procesów produkcyjnych w przypadku, gdy dane opisujące zadanie podane są w postaci przedziałów liczbowych (interwałów). Zdefiniowano pojęcie zadań interwałowych szeregowania o stabilnym rozwiązaniu optymalnym.

1. Wstęp

Niniejsza praca jest kontynuacją artykułu [6] poświęconego badaniu wrażliwości rozwiązań optymalnych zadań szeregowania. Jak wiadomo, w przypadku rozwiązywania zadań występujących w automatyzacji dyskretnych procesów produkcyjnych często niewielka zmiana danych (parametrów) powoduje zasadniczą zmianę rozwiązania i to zarówno ze względu na uszeregowanie, jak i na wartość kryterium optymalizacji.

W pracy przyjmiemy (podobnie jak w [6]), że nie posiadamy pełnej informacji o wartościach parametrów procesu. Znamy jedynie przedziały, w których mogą się znajdować rzeczywiste wartości danych, to znaczy znamy tylko minimalne i maksymalne spośród wartości, które mogą przyjmować. Takie podejście do problemu znajomości danych wejściowych zadań optymalizacji uszeregowania wynika z następujących przesłanek :

- skończonej dokładności realizacji algorytmów na m.c.,
- określonej dokładności pomiarów (szacowania) danych wejściowych,
- niemożności określenia z góry wartości parametrów (szerokie przedziały), co jest równoważne z koniecznością szukania rozwiązania dobrego (w sensie wartości kryterium) dla całej klasy zadań o zbliżonych danych.

Przykładem użycia danych interwałowych w badaniach operacyjnych jest metoda PERT w jej klasycznej postaci, w której zakłada się znajomość najkrótszego i najdłuższego możliwego czasu trwania operacji.

Początki matematyki interwałowej sięgają lat 30. (praca Younga z 1931 roku). Pierwsze zastosowania arytmetyki interwałowej w obliczeniach numerycznych pochodzą z końca lat 50. Szerzej rozwinęła się analiza

interwałowa na przełomie lat 60. i 70. Matematyce interwałowej poświęcone są między innymi monografie [1],[4].Analizę interwałową zastosowano na przykład w rozwiązywaniu równań liniowych ([4],[5]), w programowaniu liniowym [3] czy też w programowaniu wypukłym [1].

Niniejsza praca jest próbą wykorzystania tejże analizy w optymalizacji dyskretnych zadań szeregowania.

W rozdziale 2 podano krótki przegląd podstaw matematyki (a przede wszystkim arytmetyki) interwałowej.Przytoczone w nim oznaczenia i definicje pochodzą z monografii [1]. W rozdziale 3 pracy zdefiniowano pojęcie zadania szeregowania interwałowego o stabilnym rozwiązaniu optymalnym(stabilnym uszeregowaniu bądź przydziale). Rozdział4 zawiera przykłady zastosowania tego pojęcia w konkretnych problemach szeregowania: w zadaniu jednomaszynowym z $r_i >= 0$ oraz kryterium minimalizacji długości uszeregowania, dwumaszynowym zagadnieniu przepływowym i zagadnieniu szeregowania zadań niepodzielnych na dwu identycznych maszynach również z kryterium minimalizacji długości uszeregowania (por. np. prace [2], [7]).

2.Podstawy matematyki intrewałowej

Będziemy tu rozpatrywać jedynie rzeczywiste, ograniczone i domknięte interwały (przedziały) postaci :

$$[\underline{a},\bar{a}] := \left\{ x \in R \mid \underline{a} <= x <= \bar{a} \ , \ \underline{a} <= \bar{a} \right\}$$

Domknięty interwał jest określony jednoznacznie przez podanie dwu liczb rzeczywistych $\underline{a}$ i $\bar{a}$, które są rozumiane jako dolne i górne granice interwału.

Zbiór wszystkich interwałów $[\underline{a},\bar{a}]$ będziemy oznaczać przez I(R). Natomiast zbiór I(A) związany z pewnym interwałem $A \in I(R)$ definiowany jest jako

$$I(A) := \left\{ X \in I(R) \mid X \subseteq A \right\}.$$

W zbiorze I(R) określone są w następujący sposób podstawowe operacje arytmetyczne:

Definicja 1.

Niech $A = [\underline{a},\bar{a}]$, $B = [\underline{b},\bar{b}] \in I(R)$, $* \in \{ +,-,\cdot,: \}$, wtedy

$$A*B := \left\{ x*y \mid \underline{a} <= x <= \bar{a} \ , \ \underline{b} <= y <= \bar{b} \right\}:$$

w przypadku dzielenia musi być przy tym spełniony warunek $0 \notin B$.

Przy użyciu granic interwałów można przedstawić podstawowe działania arytmetyczne określone w zbiorze I(R) w następujący sposób:

Twierdzenie 1 (patrz [1])

Dla każdego $[\underline{a},\bar{a}] \in I(R)$ oraz $[\underline{b},\bar{b}] \in I(R)$ zachodzi:

$$[\underline{a},\bar{a}] + [\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}+\underline{b}\ ,\ \bar{a}+\bar{b}],$$

$$[\underline{a},\bar{a}] - [\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}-\bar{b}\ ,\ \bar{a}-\underline{b}],$$

$$[\underline{a},\bar{a}] \cdot [\underline{b},\bar{b}] = [\min(\underline{a}\underline{b}\ ,\ \underline{a}\bar{b}\ ,\ \bar{a}\underline{b}\ ,\ \bar{a}\bar{b}),\max(\underline{a}\underline{b}\ ,\ \underline{a}\bar{b}\ ,\ \bar{a}\underline{b},\ \bar{a}\bar{b})],$$

$$[\underline{a},\bar{a}] : [\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a},\bar{a}] \cdot [\frac{1}{\bar{b}},\frac{1}{\underline{b}}],\quad 0 \notin [\underline{b},\bar{b}].$$

Interwał postaci $[a,a]$ jest nazywany interwałem punktowym i może być identyfikowany z liczbą rzeczywistą a. W tym przypadku zachodzi :

$$a*A := [a,a] * A,\ * \in \{+,-,\cdot,:\},\ A \in I(R),\ a \in R,$$

oraz

$$A*a := A * [a,a],\ * \in \{+,-,\cdot,:\},\ A \in I(R),\ a \in R,$$

$a \neq 0$ w przypadku dzielenia.

Należy zauważyć, że nie wszystkie własności działań arytmetycznych określone w zbiorze liczb rzeczywistych są słuszne dla odpowiednich działań określonych na interwałach.

Twierdzenie 2 (patrz [1])

Jeśli $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$; $A,B,C,D \in I(R)$ oraz $* \in \{+,-,\cdot,:\}$, wtedy zachodzi:

$$A*C \subseteq B*D$$

(w przypadku dzielenia $0 \notin C$ oraz $0 \notin D$).

Przy porównywaniu dwu interwałów można wprowadzić dwie relacje porządku, a mianowicie relację silnej i słabej mniejszości, które zdefiniowane są następująco:

$A = [\underline{a},\bar{a}]$ jest " silnie mniejsze " od $B = [\underline{b},\bar{b}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bar{a} <= \underline{b},$$

co oznacza się symbolicznie w postaci:

$$A <=_{+} B$$

oraz A jest " słabo mniejsze " od B , jeśli $\underline{a} <= \underline{b}$, co zapisujemy jako:

$$A <=_{++} B.$$

W przypadku $A <=_{+} B$ mamy pewność, że dla każdego $a \in A$ oraz $b \in B$ zachodzi $a <= b$. W drugim przypadku takiej pewności nie ma, to znaczy istnieje jedynie takie $a \in A$ i takie $b \in B$, że $a <= b$.

Analogicznie jak interwały rzeczywiste definiowane są wektory i macierze interwałowe, których elementy są przedziałami liczbowymi.

Wektory i macierze interwałowe oraz odpowiednie przestrzenie z nimi związane będą oznaczane następująco:

$$X \in I(R^n):\ X = (X_i) = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},\ X_i \in I(R),\ i=1,\dots,n.$$

$$C \in I(R^{m,n}):\ C = (C_{ij}) = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix},\ C_{ij} \in I(R),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

3. Interwałowe zagadnienia szeregowania o stabilnym rozwiązaniu optymalnym

Przyjmijmy, że rozpatrujemy pewne zagadnienie szeregowania n zadań na m maszynach, nazwijmy je P, w którym parametry wejściowe P są danymi interwałowymi, $P \in I(R)$. Przy czym zakładamy, że zbiór zadań $J=\{J_1,\dots,J_n\}$ jest znany i ustalony oraz zbiór maszyn $M = \{M_1,\dots,M_m\}$ jest również znany i ustalony z góry (nie ulega zmianie w trakcie realizacji zadań). Liczby n i m (liczby całkowite) nie są danymi interwałowymi. Każde zadanie może być realizowane na dokładnie jednej maszynie. Jedna maszyna może w danym momencie czasowym obsługiwać co najwyżej jedno zadanie. Ponadto mogą być określone z góry pewne dodatkowe ograniczenia, np. ograniczenia kolejności wykonywania zadań, ograniczenia dotyczące najwcześniejszego momentu rozpoczęcia realizacji poszczególnych zadań (por.np. [2], [7]).

Aby móc wykonać wszystkie zadania J, należy dokonać przydziału każdego zadania do określonej maszyny (nie jest to konieczne w przypadku jednomaszynowym), a następnie ustalić kolejność realizacji przydzielonych zadań na poszczególnych maszynach.

W przypadku problemu jednomaszynowego uszeregowaniem dopuszczalnym jest pewna permutacja zadań $\pi = (J_{i_1},\dots,J_{i_n})$ spełniająca narzucone z góry ograniczenia. W przypadku problemu m-maszynowego permutację zadań π należy podzielić na m podciągów: $\pi = (\pi^1,\pi^2,\dots,\pi^m)$ związanych z przydziałem zadań do poszczególnych maszyn. Podciąg pusty ($\pi^k=\emptyset$) oznacza, że dana maszyna (k-ta) nie zostanie użyta. Niech Π oznacza zbiór wszystkich dopuszczalnych uszeregowań w zagadnieniu P.

W odniesieniu do zwykłych (nie interwałowych) zagadnień szeregowania formułuje się wiele rozmaitych funkcji kryterialnych i zadanie optymalizacji polega na znalezieniu takiego uszeregowania $\pi \in \Pi$, które minimalizuje wartość kryterium. Możemy więc szukać uszeregowania, które minimalizuje :

czas zakończenia realizacji wszystkich zadań J (kryterium minimalizacji długości uszeregowania);

liczbę użytych maszyn;

sumaryczny koszt wykonania wszystkich zadań (związany z czasem

wykorzystania poszczególnych maszyn);

średni czas pobytu zadania w systemie itd. (por. np. [2], [7]).

Oznaczmy funkcję kosztów zagadnienia szeregowania (bez interwałów) przez $k(\pi;p)$, gdzie $k: \Pi \times D \to R$, $\pi \in \Pi$, natomiast $p \in D \subseteq R^n$ jest wektorem parametrów.

W interwałowym zadaniu szeregowania P każdemu uszeregowaniu dopuszczalnemu (problem badania dopuszczalności może się wiązać z pewnymi trudnościami, na razie go jednak pominiemy) odpowiada pewien interwał kosztów $[\ \underline{k}(\pi), \overline{k}(\pi)\ ]$.

Definicja 2.

Interwałowym rozszerzeniem funkcji kosztów $k: \Pi \times D \to R$ nazywamy odwzorowanie $K: \Pi \times I(D) \to I(R)$ spełniające warunki:

$$\bigwedge_{p \in P} k(\pi;p) \in K(\pi;P),\ \pi \in \Pi,\ P \in I(D),$$

$$k(\pi;P) = [\underline{p}, \overline{p}]) \subseteq [\ \min_{p \in P} k(\pi;p),\ \max_{p \in P} k(\pi;p)\ ].$$

Należy zauważyć, że jeśli funkcja $k(\pi;p)$ jest niemalejąca ze względu na każdy z parametrów (przy ustalonych pozostałych), to $\min_{p \in P} k(\pi;p) = k(\pi;\underline{p})$ i $\max_{p \in P} k(\pi;p) = k(\pi;\overline{p})$. Natomiast jeśli funkcja $k(\pi;p)$ jest funkcją ciągłą ze względu na parametry, dla każdego $x \in K(\pi;P)$ istnieje taka wartość parametrów $p \in P$, że $x = k(\pi;p)$. Na przykład w odniesieniu do funkcji kosztów o postaci schodkowej własność ta nie jest spełniona. W skrajnym przypadku tylko granice interwału kosztów mogą odpowiadać pewnej funkcji kryterialnej związanej z określoną wartością parametrów zadania $p \in P$.

Niech $\pi_s, \pi_r \in \Pi$ będą pewnymi uszeregowaniami dopuszczalnymi w zagadnieniu P. Jeśli $K(\pi_s;P) \leq_+ K(\pi_r;P)$, to wiemy na pewno, że dla każdego $p \in P$ koszt uszeregowania π_s jest nie większy niż koszt uszeregowania π_r. Możemy więc przyjąć, że uszeregowanie π_s "jest lepsze" (dominuje w sensie minimalizacji kryterium) od uszeregowania π_r, co dalej będziemy symbolicznie zapisywać w postaci:

$$\pi_s \succ_k \pi_r.$$

Nie zawsze takie jednoznaczne rozstrzygnięcie jest możliwe. Bywają jednak takie sytuacje, kiedy dla danego interwałowego zagadnienia szeregowania P i ustalonym interwałem parametrów $P \in I(D)$ można określić uszeregowanie π^*, które dominuje (w sensie kryterium) pozostałe uszeregowania dopuszczalne. Takie zagadnienie szeregowania $P(P)$ będziemy nazywać stabilnym ze względu na uszeregowanie.

Definicja 3.

Interwałowe zagadnienie szregowania $P(P)$ z ustalonym wektorem parametrów $P \in I(D)$ jest stabilne ze względu na uszeregowanie , jeśli istnieje takie uszeregowanie $\pi^* \in \Pi$, które spełnia warunek:

$$\pi^* >_k \pi \text{ dla każdego } \pi \neq \pi^*,\ \pi \in \Pi$$

$$(\text{ czyli inaczej } K(\pi^*;P) <=_+ K(\pi;P) \text{ dla każdego } \pi \in \Pi,\ \pi \neq \pi^*).$$

Stabilność zadania $P(P)$ należy rozumieć w ten sposób, że można wyznaczyć dla niego uszeregowanie π^*, które jest rozwiązaniem optymalnym każdego związanego z nim zwykłego zadania szeregowania, którego parametry leżą w kostce wyznaczonej przez interwałowy wektor parametrów $P \in I(D)$.Tak znalezione rozwiązanie zagadnienia szeregowania nie jest więc wrażliwe na zmianę parametrów, jeśli poruszamy się w obszarze $P \in I(D)$.

Inspiracją do wprowadzenia pojęcia zagadnienia ze stabilnym rozwiązaniem (uszeregowaniem) było użyte w pracy [1] pojęcie zadania programowania liniowego ze stabilną bazą.

Sytuacja, w której istnieje rozwiązanie π^* silnie dominujące pozostałe uszeregowania, jest sytuacją szczególną. W pozostałych przypadkach zawsze istnieje (jeśli istnieje rozwiązanie dopuszczalne) takie uszeregowanie $\hat{\pi}$, dla którego $K(\hat{\pi};P) <=_{++} K(\pi;P)$, $\pi \neq \hat{\pi}$, $\pi \in \Pi$. Jest to uszeregowanie, które daje szanse osiągnięcia możliwie najmniejszej wartości funkcji kosztów (wiążącej się z pewnym punktowym wektorem parametrów $p \in P$). Nie jest to jednak na ogół rozwiązanie bezpieczne (por.[6]), gwarantujące, że w żadnym przypadku nie zostanie przekroczona pewna ustalona wartość progowa funkcji kosztów. Innymi słowy, jest to uszeregowanie takie, że :

$$k(\hat{\pi};p) = \min_{\pi \in \Pi,\, p \in P} k(\pi;p).$$

4. Przykłady rozwązywania interwałowych zadań szeregowania

4.1.Zagadnienie jednomaszynowe z $r_i \geq 0$ i kryterium C_{max}

Będziemy się teraz zajmować jednomaszynowym zagadnieniem szeregowania zadań z kryterium minimalizacji długości uszeregowania i różnymi od zera czasami gotowości wykonywania zadań. W przypadku klasycznym jest to zagadnienie wielomianowe, w którym optymalne uszeregowanie otrzymuje się poprzez uporządkowanie zadań zgodnie z niemalejącymi wartościami czasów gotowości wykonywania zadań.

Niech:

- $T_i \in I(R)$ oznacza czas (interwałowy) realizacji zadania J_i na maszynie, $T_i = [\underline{\tau}_i, \overline{\tau}_i]$, $\underline{\tau}_i \geq 0$;
- $R_i \in I(R)$ oznacza czas gotowości (interwał) wykonywania zadania J_i, $R_i = [\underline{r}_i, \overline{r}_i]$, $\underline{r}_i \geq 0$

Uszeregowaniem dopuszczalnym jest w tym przypadku dowolna permutacja zadań ($J_1, \ldots, J_n$).Niech $C_{max}(\pi; r, \tau)$ oznacza wartość kryterium dla pewnego uszeregowania $\pi \in \Pi$ oraz ustalonego wektora parametrów $r \in (R_i)$, $\tau \in (T_i)$. Jak wiadomo, $C_{max}(\pi; r, \tau) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ r_{\pi(i)} + \sum_{k=i} \tau_{\pi(k)} \}$, gdzie dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy, że π oznacza nie pewną permutację zadań, lecz odpowiadającą jej permutację numerów zadań. Stąd interwałowym rozszerzeniem kryterium jest następujące przyporządkowanie:

$$C_{max}(\pi; P) = [\, C_{max}(\pi; (\underline{r}_i), (\underline{\tau}_i)),\ C_{max}(\pi; (\overline{r}_i), (\overline{\tau}_i)) \,]$$

Twierdzenie 3.

Jeśli parametry (R_i) interwałowego jednomaszynowego zadania szeregowania z niezerowymi czasami gotowości wykonania i kryterium minimalizacji długości uszeregowania można uporządkować według porządku $\leq_+$, tzn.: $R_{i_1} \leq_+ R_{i_2} \leq_+ \ldots \leq_+ R_{i_n}$, $R_{i_k} \in I(R)$, gdzie $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ jest pewną permutacją numerów zadań , to zadanie to jest stabilne ze względu na uszeregowanie $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ niezależnie od tego, jakie są wartości czasów wykonania zadań $(T_1, \ldots T_n)$.

Dowód jako elementarny pomijamy. Z twierdzenia 3 wynika , że jeśli interwały $R_1, \ldots, R_n$ są interwałami punktowymi (czyli $\underline{r}_i = \overline{r}_i$), to niezależnie od czasów wykonania zadań $T_1, \ldots, T_n$ rozpatrywane zagadnienie szeregowania jest stabilne ze względu na uszeregowanie.

4.2.Zagadnienie dwumaszynowe przepływowe z kryterium minimalizacji długości uszeregowania

Zagadnienie to wybrano jako przykład z podobnego powodu jak zagadnienie poprzednie. A mianowicie jest ono również problemem wielomianowym z prostym algorytmem rozwiązania (algorytm Johnsona), oczywiście w przypadku danych punktowych.

Rozpatrujemy zagadnienie szeregowania n zadań , z których każde składa się z dwu operacji wykonywanych odpowiednio na pierwszej i na drugiej maszynie. Operacja pierwsza musi zostać zakończona przed rozpoczęciem wykonywania operacji drugiej. Warunek ten dotyczy wszystkich zadań. Przykładem tego typu problemu jest obróbka n detali kolejno na dwu maszynach. Należy ustalić taki porządek wykonywania wszystkich zadań , by czas zakończenia realizacji wszystkich operacji był jak najmniejszy.

Niech:

$T_{i1} = [\ \underline{\tau}_{i1}, \overline{\tau}_{i1}\ ] \in I(R)$ oznacza czas wykonywania zadania J_i na maszynie pierwszej,

$T_{i2} = [\ \underline{\tau}_{i2}, \overline{\tau}_{i2}\ ] \in I(R)$ oznacza czas wykonywania zadania J_i na maszynie drugiej.

Algorytm Johnsona polega na podziale zbioru zadań na dwa podzbiory. W jednym znajdują się zadania, których czas wykonania na pierwszej maszynie jest nie większy niż czas wykonania na drugiej maszynie ($\tau_{i1} \le \tau_{i2}$); w drugim zbiorze znajdują się pozostałe zadania (a więc takie, dla których $\tau_{i1} > \tau_{i2}$). Uszeregowaniem optymalnym jest porządek, w którym najpierw są realizowane zadania z pierwszego zbioru uszeregowane według nie malejących wartości τ_{i1}, a następnie pozostałe zadania (z $\tau_{i2} < \tau_{i1}$) są uporządkowane według nie rosnących wartości τ_{i2}.

<u>Twierdzenie 4.</u>

Przepływowe zagadnienie szeregowania na dwu maszynach z interwałowymi czasami wykonania i kryterium minimalizacji długości uszeregowania jest zadaniem stabilnym ze względu na uszeregowanie, jeśli istnieje porządek $\pi \in \Pi$, spełniający następujące warunki:

$$\tau_{\pi(1)1} \le_+ \tau_{\pi(2)1} \le_+ \dots \le_+ \tau_{\pi(k)1}, \quad \{\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(k)\} \subseteq \{1,\dots,n\}, \quad \tau_{\pi(j)1} \le_+ \tau_{\pi(j)2}, \ \pi(j) \in \{\pi(1),\dots,\pi(k)\},$$

oraz

$$\tau_{\pi(n)2} \le_+ \tau_{\pi(n-1)2} \le_+ \dots \le_+ \tau_{\pi(k+1)2}, \quad \{\pi(k+1),\dots,\pi(n)\} \subseteq \{1,\dots,n\}, \quad \tau_{\pi(j)2} \le_+ \tau_{\pi(j)1}, \ \pi(j) \in \{\pi(k+1),\dots,\pi(n)\}, \ 1 \le k \le n.$$

Łatwo zauważyć, że warunki w twierdzeniu 4 tworzą przepis na otrzymanie uporządkowania według interwałowego analogu algorytmu Johnsona. Nie jest to jedyny możliwy zestaw warunków dostatecznych stabilności zagadnienia ze względu na uszeregowanie. Jeżeli przyjmiemy, że wszystkie zadania są identyczne (cechują je te same interwały i wiadomo, że czasy wykonania zadań na pierwszej maszynie są takie same oraz czasy wykonania zadań na drugiej maszynie także nie różnią się między sobą), to zagadnienie jest stabilne ze względu na dowolne uszeregowanie. Bez warunku identyczności czasów wykonania zadań (mimo że interwały czasów są identyczne) zagadnienie nie jest stabilne ze względu na żadne uszeregowanie.

4.3. Zagadnienie szeregowania zadań (niepodzielnych) na dwu identycznych maszynach z kryterium minimalizacji długości uszeregowania

Zagadnienie to jest problemem NP-zupełnym (choć nie silnie). Łatwo je sprowadzić do zagadnienia podziału zbioru (por.[2],[7]). Oczywiście

dotyczy to wyjściowego problemu nieinterwałowego, który polega na takim przydziale zadań do poszczególnych maszyn, by czas zakończenia realizacji zadań był jak najmniejszy. Dąży się więc do takiego przydziału, przy którym obciążenie obu maszyn (czas wykorzystania) będzie w miarę równomierne. Kolejność wykonywania zadań na poszczególnych maszynach nie ma wpływu na wartość kryterium. Zamiast o uszeregowaniu będziemy więc dalej mówić o przydziale (przy czym każdy przydział generuje szereg różnych, równoprawnych ze względu na wartość kryterium uszeregowań).

Niech $T_i = [\ \underline{\tau}_i, \overline{\tau}_i\ ]$ oznacza czas wykonania zadania J_i na dowolnej maszynie. Oznaczmy również przez J_I i J_{II} podzbiory zadań wykonywanych odpowiednio na pierwszej i na drugiej maszynie. Interwałowe rozszerzenie wartości kryterium w przypadku ustalonego przydziału zadań J_I i J_{II} ma postać:

$$C_{max}\ (J_I, J_{II}) = [\ \max\ (\sum_{i\in J_I} \underline{\tau}_i,\ \sum_{i\in J_{II}} \underline{\tau}_i\ ),\ \max\ (\sum_{i\in J_I} \overline{\tau}_i,\ \sum_{i\in J_{II}} \overline{\tau}_i\ )\ ],$$

$$J_I, J_{II} \subseteq J, \quad J_I \cap J_{II} = \emptyset, \quad J_I \cup J_{II} = J.$$

Definicję 3 można więc sformułować w następującej postaci:

Interwałowe zagadnienie przepływowe szeregowania zadań na dwu identycznych maszynach przy kryterium minimalizacji długości uszeregowania jest zadaniem stabilnym ze względu na rozwiązanie, jeśli istnieje taki przydział zadań do maszyn J_I^S i J_{II}^S, że:

$$C_{max}(J_I^S, J_{II}^S) \ <=_+\ C_{max}(J_I, J_{II}),$$

dla każdego dowolnego przydziału $J_I \neq J_I^S, J_{II} \neq J_{II}^S$.

Sprawdzenie powyższego warunku wymaga dokonania przeglądu (niekoniecznie bezpośredniego) wszystkich rozwiązań (przydziałów) zagadnienia. Pociąga to za sobą konieczność dalszego rozwoju metod interwałowej analizy zadań programowania dyskretnego.

5. Zakończenie

Już krótka analiza zastosowania matematyki interwałowej w rozwiązywaniu zagadnień szeregowania przeprowadzona w pracy wskazuje na duże możliwości uzyskiwania interesujących wyników nie tylko w odniesieniu do zagadnień tej klasy, ale i innych problemów programowania dyskretnego. Analiza ta wiąże się z badaniem wrażliwości rozwiązań dyskretnej optymalizacji, co jest problemem szczególnie istotnym w przypadku problemów NP-zupełnych przy niedokładnej znajomości parametrów opisujących proces.

Wprowadzone w pracy pojęcie stabilności zagadnienia ze względu na

rozwiązanie (uszeregowanie) wydaje się przydatne ze względu na zastosowania praktyczne. Widać też dalsze możliwości jego rozwoju, np. szukanie interwałów gwarantujących stabilność zagadnienia, wyznaczanie częściowych rozwiązań stabilnych itd.

LITERATURA

[1] Bauch H.i inni: Intervallmathematik.Theorie und Anwendungen. BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1987.

[2] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Badania operacyjne dla informatyków, WNT, Warszawa 1983.

[3] Machost B. : Numerische Behandlung des Simplexverfahrens mit intervallanalytischen Methoden, Berichte der GMD, Bonn Nr. 30, 1970.

[4] Moore R.E. : Interval Analysis, Englewood Cliffs, Prentice Hall 1966.

[5] Rohn J.: A Two-Sequence Method for Linear Interval Equations, Computing vol.41 (1989) s.137-10.

[6] Skubalska-Rafajłowicz E.: Zagadnienie wrażliwosci rozwiazań optymalnych zadań szeregowania, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Ser.:Aut. z.94 (1988),s.277-283.

[7] Teoria szeregowania zadań, praca zb. pod red. E. Coffmana, WNT, Warszawa. 1980.

Recenzent: Doc.dr h.inż.J.Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

APPLICATION OF THE INTERVAL MATHEMATICS TO SOLUTION OF SCHEDULING PROBLEMS

S u m m a r y

In the paper an application of interval analysis to solution of scheduling problems is proposed. It is assumed that initial data describing problems are given in the form of intervals. The solution stability of the scheduling problems is defined. Some examples are given to illustrate this idea.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАЦИЙ

Р е з ю м е

В работе представлено применение интервального анализа для решения задач оптимизации последовательности операций, когда параметры процесса принимают значения из определённых интервалов. Сформулировано понятие устойчивости задачи. Представлено несколько примеров.