ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z.117 Nr kol. 1061

Marek BRODZKI
Janusz WALCZAK
Instytut Elektrotechniki
Teoretycznej i Przemysłowej
Politechniki Śląskiej

ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI ENERGETYCZNYCH UKŁADÓW DWUZACISKOWYCH Z PRZEBIEGAMI ODKSZTAŁCONYMI W PEWNYCH PRZESTRZENIACH FUNKCJI PRAWIE OKRESOWYCH

I. KONSTRUKCJA WSKAŹNIKA JAKOŚCI PRZEBIEGÓW ODKSZTAŁCONYCH

Streszczenie. W pracy wprowadzono nowy wskaźnik jakości prądów odkształconych odbiorników dwuzaciskowych. Wskaźnik ten umożliwia ustalenie zadanego kompromisu pomiędzy oceną właściwości energetycznych prądu, tzn. strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika, a oceną zniekształceń przebiegu prądu przy założeniu, że prąd i napięcie odbiornika są opisywane funkcjami prawie okresowymi. Funkcje te stanowią pewne gładkie uogólnienie funkcji prawie okresowych w sensie Besicovitcha. Wykazano, że zbiór wprowadzonych funkcji prawie okresowych tworzy nieośrodkową przestrzeń Hilberta, której kwadrat normy stanowi zdefiniowany wskaźnik jakości prądów odbiornika.

1. Wstęp

Analiza zagadnień energetycznych w systemach elektroenergetycznych jest z reguły przeprowadzana przy założeniu upraszczającym, że napięcie i prądy w węzłach systemu są okresowymi funkcjami czasu [3], [7], [12]. W rzeczywistości powyższe założenie nie jest spełnione, gdyż wielkości charakteryzujące wymienione funkcje okresowe prądów i napięć (np. wartości szczytowe, częstotliwości) są funkcjami czasu. Powyższe zjawisko uzasadnia się probabilistycznym charakterem zjawisk zachodzących w systemie elektroenergetycznym [7], [12], jak również nieliniowymi właściwościami elementów systemu [7], [9], [12].

W pracy do opisu przebiegów prądów i napięć w węźle systemu elektroenergetycznego wykorzystuje się model deterministyczny oparty na pojęciu funkcji prawie okresowej. Modele wykorzystujące pojęcie funkcji prawie okresowej w sensie Bohra i Besicovitcha były już wcześniej wykorzystywane do analizy zagadnień energetycznych [14], [15], [16].

W terminach analizy widmowej sygnałów zachodzi duże podobieństwo pomiędzy opisem probabilistycznym a opisem zdeterminowanym za pomocą funkcji prawie okresowych. Podobieństwo to wynika z faktu, że procesy stochastyczne stacjonarne rzędu drugiego mogą być dla dowolnej wartości zmiennej niezależnej t (czasu) przybliżane, w sensie wartości przeciętnej, wielomianami trygonometrycznymi, o współczynnikach będących parami nieskorelowanymi zmiennymi losowymi [17]. Zakładając ergodyczność procesu (sygnału) stochastycznego, w odpowiednim sensie, można operować jego realizacjami będącymi zdeterminowanymi funkcjami prawie okresowymi (czasu) należącymi do przestrzeni Besicovitcha [17].

2. Uzasadnienie wyboru klasy rozpatrywanych funkcji prawie okresowych

Istnieje wiele sposobów definiowania funkcji prawie okresowych w zbiorze funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej (czasu), określonych na osi liczbowej R.

Najważniejsze z nich wymieniono poniżej:

1. Definicje wykorzystujące pojęcie ε- prawie okresu funkcji [6], [10] i stanowiące uogólnienie klasycznej definicji funkcji prawie okresowych w sensie Bohra [6].

2. Definicje wykorzystujące pojęcie uzupełnienia przestrzeni unormowanej [8], w której wykorzystuje się, rozumiane w sensie różnych norm, uzupełnienia zbioru wielomianów trygonometrycznych [10], [11].

3. Definicje wykorzystujące pojęcie prezwartości zbioru rodziny przesunięć funkcji, tzn. definicje Bochnera [13], [18], funkcji prawie okresowych określonych na grupach.

Nie zawsze i nie wszystkie z wymienionych rodzajów definicji prowadzą do określenia tego samego zbioru funkcji prawie okresowych [10], [18].

W artykule definiowanie funkcji prawie okresowych przeprowadza się za pomocą definicji według punktu 2, co umożliwia stosunkowo prosty dowód zupełności uzyskanej przestrzeni Hilberta funkcji prawie okresowych oraz daje możliwość wykorzystania metod analizy harmonicznej do analizy właściwości energetycznych układów.

Z punktu widzenia analizy właściwości energetycznych układów z przebiegami odkształconymi oraz konstrukcji wskaźników jakości tych przebiegów, należy rozpatrzyć zbiory funkcji prawie okresowych, dla których istnieje pojęcie wartości skutecznych. Pojęcie to należy rozumieć jako naturalne uogólnienie klasycznego pojęcia wartości skutecznej przebiegu okresowego, zgodnie z wzorem:

$$J_{sk} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\, dt} \quad , \tag{1}$$

gdzie:

i - funkcja prądu odbiornika.

Dla rozpatrywanych funkcji prawie okresowych powinno być określone również pojęcie mocy czynnej:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, i(t)\, dt, \tag{2}$$

gdzie:

u, i - funkcje napięcia i prądu odbiornika.

Z uwagi na fakt, że kolejne pochodne funkcji prądu i napięcia odbiornika uwypuklają wpływ zniekształceń tych funkcji (por. [5]), konieczne jest rozpatrywanie zbiorów funkcji prawie okresowych posiadających pochodne do określonego rzędu włącznie, prawie wszędzie, na osi liczb rzeczywistych R.

Z drugiej strony, z uwagi na problemy metrologiczne (rozróżnialności na zbiorach miary zero) pomiaru tych funkcji, wydaje się korzystne rozpatrywanie zbiorów funkcji (nieciągłych) mierzalnych i całkowalnych w sensie Lebesgue'a [8].

Z powyższych względów proponuje się, by wskaźnik jakości prądu odbiornika określający zadany kompromis pomiędzy oceną właściwości energetycznych (strat mocy czynnej na doprowadzaniu do odbiornika) i oceną właściwości jakościowych (zniekształceń) określić za pomocą wzoru:

$$J = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(i^{(k)}(t)\right)^2 dt \right), \tag{3}$$

$$\alpha_0 > 0,$$
$$\alpha_k \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad k \geqslant 1,$$
$$k \in \{0,\dots,l\},$$

gdzie:

$i^{(k)}$ - k-ta pochodna funkcji prądu.

Konieczne staje się więc zdefiniowanie zbioru funkcji prawie okresowych, o opisanych powyżej właściwościach, w którym sens mają wzory (1), (2), (3).

Ponadto z uwagi na przewidywaną ortogonalność pewnych składników prądu oraz konieczność zachowania definicji mocy czynnej, niezbędne jest umiejscowienie rozpatrywanych funkcji (które interpretuje się jako napięcie i prądy odbiorników) w pewnej przestrzeni Hilberta.

Problem zdefiniowania zbioru funkcji prawie okresowych, o określonych wyżej własnościach, tworzącego przestrzeń Hilberta, został rozpatrzony poniżej.

3. Konstrukcja przestrzeni Besicovitcha - Sobolewa $BS^1_{2,\alpha}$

Oznaczmy przez L^2_{loc} zbiór funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej o następujących własnościach:

1. Funkcje te są mierzalne w sensie Lebegue'a na osi liczb rzeczywistych R.
2. Funkcje te posiadają na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym $\langle a_k ; b_k \rangle \in R$, $k \in N$ całkowalny kwadrat w sensie Lebesgue'a.
3. Dla funkcji tych istnieje skończona granica:

$$\lim_{T\to\infty} \sup \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt < \infty \tag{4}$$

$$f \in L^2_{loc}$$

W zbiorze L^2_{loc} wprowadza się strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych R_c, przyjmując klasyczne definicje:

- dodawania (+) funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej,
- mnożenia (.) funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczewistej przez liczby rzeczywiste.

W przestrzeni liniowej $(L^2_{loc}, R_c, +, \cdot)$ wprowadza się normę określoną wzorem:

$$\|f\|_{L^2_{loc}} = \sqrt{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt} \tag{5}$$

i wykazuje [9], [10], że przestrzeń unormowana $((L^2_{loc}, R_c, +, \cdot), (\| \|))$, oznaczana w dalszym ciągu przoz L^2_{loc}, jest zupełna.
Przestrzeń ta w literaturze nosi nazwę przestrzeni Marcinkiewicza [9] i oznacza się ją symbolem M.

Niestety, wymieniona przestreeń Marcinkiewicza nie jest przestrzenią Hilberta (por. np. [9]), z uwagi na nieistnienie w niej iloczynu skalarnego zgodnego z normą (5). Z tego powodu niemożliwe jest zdefiniowanie pojęcia mocy czynnej dla elementów przestrzeni L^2_{loc}. Zachodzi więc konieczność konstrukcji pewnych podprzestrzeni przestrzeni L^2_{loc}, w których:

- możliwe jest zdefiniowanie pojęcia mocy czynnej,
- możliwe jest określenie pewnych cech gładkościowych elementów tych podprzestrzeni (por. rozdz. 2).

Z przedstawionych powodów rozpatrzmy pewien podzbiór, oznaczony przez $\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}$, zbioru $\underline{L}^{2}_{loc}$, który tworzą funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej o następujących własnościach:

1. Funkcje te posiadają, prawie wszędzie, na osi liczb rzeczywistych pochodne w sensie Sobolewa [1], do rzędu l-tego ($l \in N$) włącznie.
2. Pochodne tych funkcji, do rzędu l-tego włącznie, są mierzalne w sensie Lebesgue'a na osi liczb rzeczywistych.
3. Pochodne tych funkcji, do rzędu l-tego włączenie, posiadają na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym $\langle a_k; b_k \rangle \in R$, $k \in N$, całkowalny kwadrat w sensie Lebesgue'a.
4. Pochodne tych funkcji posiadają skończoną granicę:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T (f^{(k)}(t))^2\,dt < \infty \quad , \quad f \in \underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}, \quad k \in \{1,\dots,l\} \tag{6}$$

gdzie:

$f^{(k)}$ - k-ta pochodna funkcji f.

Zbiorowi $\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}$ nadajemy strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych R_c, definiując w tym zbiorze:

- działanie dodawania (+) funkcji:

$$f_1 + f_2 \in \underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}, \quad \text{gdy} \quad f_1,\ f_2 \in \underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc} \tag{7}$$

- działanie mnożenia (•) funkcji przez liczby rzeczywiste:

$$c \cdot f \in \underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}, \quad \text{gdy} \quad f \in \underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}, \quad c \in R_c \tag{8}$$

Poprzez proste rozważania można wykazać, że działania określone wzorami (7), (8) są poprawnie określone w zbiorze $\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}$, tzn. są działaniami wewnętrznymi w tym zbiorze, zatem uporządkowana czwórka $(\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}, R_c, +, \cdot)$ tworzy przestrzeń liniową oznaczaną w dalszym ciągu przez $\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}$.

W wymienionej przestrzeni liniowej zdefiniujmy funkcjonał:

$$\|\cdot\|_{\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{loc}} \longrightarrow R^{+} \tag{9}$$

gdzie:

$$\|f\|_{WL^{2,\alpha,l}_{loc}} = \sqrt{\sum_{k=0}^{l} \alpha_k \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T (f^{(k)}(t))^2\, dt}, \tag{10}$$

$$f \in WL^{2,\alpha,l}_{loc}$$

$$\alpha_0 > 0,\ \alpha_k \geqslant 0 \text{ dla } k \geqslant 1,$$

$$k \in \{0,\dots,l\}$$

Można sprawdzić, że funkcjonał określony wzorem (9) spełnia aksjomaty normy [8], zatem przestrzeń liniowa $WL^{2,\alpha,l}_{loc}$ jest przestrzenią unormowaną.

Uwaga

Przy sprawdzaniu aksjomatu $((\|f\| = 0) \Longrightarrow (f = \Theta))$, gdzie symbol Θ oznacza zerowy element przestrzeni $WL^{2,\alpha,l}_{loc}$, zachodzi konieczność operowania klasami równoważności funkcji $f \in WL^{2,\alpha,l}_{loc}$ w sensie normy (9), co się domyślnie zakłada i nie wprowadza się dodatkowych oznaczeń klasy równoważności w celu uniknięcia komplikacji wzorów (co zresztą stosuje się powszechnie w literaturze, por. np. [8]).

Dowód zupełności przestrzeni $WL^{2,\alpha,l}_{loc}$, przeprowadza się w następujących, kolejno po sobie występujących etapach:

1. Oznaczając przez $WL^{2,k}_{loc}$, $k \in \{0,\dots,l\}$ zbiory pochodnych funkcji $f \in WL^{2,\alpha,l}_{loc}$, w zbiorach tych w sposób analogiczny do stosowanego wprowadza się strukturę przestrzeni liniowej i normę określoną wzorem:

$$\|f^{(k)}\|_{WL^{2,k}_{loc}} = \sqrt{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T (f^{(k)}(t))^2\, dt}, \tag{11}$$

Przestrzenie liniowe i unormowane $WL^{2,k}_{loc}$ z normą (11) są klasycznymi przestrzeniami Marcinkiewicza [9], więc są one zupełne.

2. Pomiędzy normami określonymi wzorami (10), (11) zachodzi zależność:

$$\|\cdot\|_{WL^{2,\alpha,l}_{loc}} \leqslant \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \|\cdot\|_{WL^{2,k}_{loc}}, \tag{12}$$

zatem zbieżność ciągu Cauchy'ego $(f_n^{(k)}) \in WL^{2,k}_{loc}$, $k \in \{0,\dots,l\}$, w każdej z wymienionych przestrzeni implikuje zbieżność ciągu Cauchy'ego $f_n \in WL^{2,\alpha,l}_{loc}$ w przestrzeni $WL^{w,\alpha,l}_{loc}$, zgodnie ze wzorem:

$$\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_{WL^{2,\alpha,l}_{loc}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \|f^{(k)}-f_n^{(k)}\|_{WL^{2,k}_{loc}} = 0 \tag{13}$$

3. Należy jeszcze wykazać, że ciągi Cauchy'ego $(f_n^{(k)}) \in \underline{WL}^{2,k}_{\overline{loc}}$ $(k \in \{0,\ldots,l\})$ są zbieżne do odpowiednich pochodnych funkcji f, tzn. do funkcji $f^{(k)} \in \underline{WL}^{2,k}_{\overline{loc}}$. Dowód ten przeprowadza się w sposób analogiczny do stosowanego przy klasycznych przestrzeniach Sobolewa (por. np. [1]).

Z przedstawionych etapów wynika bezpośrednio zupełność przestrzeni $\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{\overline{loc}}$.

Przestrzeń $WL^{2,\alpha,l}_{loc}$, nazywana w dalszym ciągu przestrzenią Marcinkiewicza-Sobolewa, jest więc przestrzenią Banacha.

Oznaczmy obecnie przez $\underline{W}$ zbiór wielomianów trygonometrycznych, określonych wzorem:

$$w(t) = \sum_{h=-n}^{h=n} C_h e^{j\omega_h t} = \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{n} F_h e^{j\omega_h t} \tag{14}$$

$$C_h, F_h \in C$$

$$\omega_h \in R$$

$$\overline{C}_h = C_{-h}$$

$$h, n \in N.$$

W zbiorze $\underline{W}$ wielomianów wprowadzamy, w sposób analogiczny do poprzedniego, strukturę przestrzeni liniowej i normę określoną wzorem (10). Uzyskana przestrzeń liniowa i unormowana nie jest zupełna [9].

<u>Definicja</u>

Uzupełnienie przestrzeni liniowej i unormowanej wielomianów trygonometrycznych W elementami f zbioru $\underline{WL}^{2,\alpha,l}_{\overline{loc}}$ w sensie normy (10), tzn. takimi, że:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=0}^{l} \alpha_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f^{(k)}(t) - \sum_{h=-n}^{h=n} C_h e^{j\omega_h t}\right)^2 dt} = 0 \tag{15}$$

nazywamy przestrzenią funkcji prawie okresowych w sensie Besicovitcha-Sobolewa i oznaczamy przez $BS^l_{2,\alpha}$. ■

Z definicji i własności procesu uzupełniania przestrzeni liniowej i unormowanej wynika [8], że przestrzeń $BS^l_{2,\alpha}$ jest zupełna, jest więc ona przestrzenią Banacha.

Można wykazać, że pojęcie granicy górnej występującej we wzorze (15) pokrywa się, w przypadku funkcji prawie okresowych w sensie Besicovitcha, z pojęciem granicy rozumianej w zwykłym sensie [4], skąd wynika, że:

$$\|f\|_{BS^{l}_{2,\alpha}} = \sqrt{\sum_{k=0}^{l} \alpha_k \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T (f^{(k)}(t))^2\, dt} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{l} \alpha_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f^{(k)}(t))^2\, dt}. \tag{16}$$

Zauważmy, że norma przestrzeni $BS^{l}_{2,\alpha}$ spełnia warunek równoległoboku [2], określony wzorem:

$$(\|f_1+f_2\|_{BS^{l}_{2,\alpha}})^2 + (\|f_1-f_2\|_{BS^{l}_{2,\alpha}})^2 = 2((\|f_1\|_{BS^{l}_{2,\alpha}})^2 + (\|f_2\|_{BS^{l}_{2,\alpha}})^2) \tag{17}$$

$$f_1, f_2 \in BS^{l}_{2,\alpha}$$

możliwe jest więc [2], zdefiniowanie w przestrzeni $BS^{l}_{2,\alpha}$ funkcjonału $(\cdot|\cdot)$:

$$(\cdot\,|\,\cdot)_{BS^{l}_{2,\alpha}} : BS^{l}_{2,\alpha} \times BS^{l}_{2,\alpha} \longrightarrow R, \tag{18}$$

gdzie:

$$(f_1|f_2)_{BS^{l}_{2,\alpha}} = \frac{1}{4}((\|f_1 + f_2\|_{BS^{l}_{2,\alpha}})^2 - (\|f_1 - f_2\|_{BS^{l}_{2,\alpha}})^2), \tag{19}$$

$$f_1, f_2 \in BS^{l}_{2,\alpha}$$

czyli:

$$(f_1|f_2)_{BS^{l}_{2,\alpha}} = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_1^{(k)}(t)\, f_2^{(k)}(t)\, dt. \tag{20}$$

Funkcjonał ten nosi nazwę iloczynu skalarnego i tym samym przestrzeń $BS^{l}_{2,\alpha}$ jest przestrzenią Hilberta, której każdy element można przybliżać wielomianem trygonometrycznym (14) z dowolną dokładnością, w sensie normy (16).

4. Analiza harmoniczna w przestrzeni $BS^{1}_{2,\alpha}$

Z rozważań przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach artykułu wynika, że norma przestrzeni Besicovitcha - Sobolewa $BS^{1}_{2,\alpha}$ stanowi proponowany wskaźnik jakości prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego prawie okresowym napięciem odkształconym.

Z punktu widzenia analizy właściwości energetycznych układów z prawie okresowymi przebiegami odkształconymi konieczne jest (por.np. [5]) przedstawienie normy opisanej wzorem (16) i iloczynu skalarnego opisanego wzorem (20) i reprezentującego moc czynną doprowadzaną do odbiornika, za pomocą wzorów zawierających współczynniki szeregów Fouriera przyporządkowanych funkcjom napięcia i prądu odbiornika.

Z inkluzji:

$$\underline{BS}^{1}_{2,\alpha} \subset \underline{B}_2 \tag{21}$$

gdzie:

$\underline{B}_2 = B^{1}_{2,\alpha}$ dla $l = 0$ - przestrzeń Besicovitcha,

wynika, że każdy element $f \in \underline{BS}^{1}_{2,\alpha}$ posiada w przestrzeni B_2 rozwinięcie w szereg Fouriera. Rozwinięcie to jest wygodnie zapisać, po wprowadzeniu metody symbolicznej, por. np. [5], w postaci następujących wzorów:

$$f = F_0 + \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} F_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \tag{22}$$

$$f \in \underline{B}_2 \quad i \quad f \in \underline{BS}^{1}_{2,\alpha}$$

gdzie:

$$F_h = \lim_{T\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f(t) \exp(-j\omega_h t)\, dt, \quad h \geqslant 1, \tag{23}$$

$$F_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt, \tag{24}$$

$$\Omega = \left\{\omega_h \in R^{+} : X(\omega_h) \neq 0\right\}, \tag{25}$$

$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-j\omega t)\, dt. \tag{26}$$

przy czym przez Ω i X oznaczono odpowiednio widmo i funkcję spektralną przyporządkowaną funkcji $f \in \underline{B}_2$.

Na podstawie wzoru Parservala mamy:

$$\| f \|_{B_2} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} |F_h|^2}\,, \qquad f \in \underline{B}_2\,, \tag{27}$$

Wykorzystując wzór Parservala (27), zapisany dla funkcji $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$ (f_1, $f_2 \in \underline{B}_2$), po prostych przekształceniach uzyskujemy zależność:

$$(f_1 | f_2)_{B_2} = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} F_{1h_1} F^{*}_{2h_1} \tag{28}$$

gdzie:

F_{1h_1}, F_{2h_1} – współczynniki szeregów Fouriera przyporządkowanych funkcjom f_1, f_2 o widmach Ω_1, Ω_2,

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2, \qquad h_1 \in N\,. \tag{29}$$

Ze wzoru (28) wynika, że iloczyn skalarny funkcji f_1, f_2 o różnych widmach (tzn. takich, że $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Phi$) jest zawsze równy zeru.

Można wykazać, że funkcje $f \in \underline{B}_2$ o tym samym widmie Ω tworzą podprzestrzeń liniową domkniętą przestrzeni B_2. Wszystkie utworzone w ten sposób podprzestrzenie liniowe przestrzeni B_2 są wzajemnie ortogonalne.

Obliczanie iloczynu skalarnego ma więc sens (z punktu widzenia niniejszej pracy) w przypadku operowania funkcjami napięcia i prądu odbiornika należącymi do tej samej podprzestrzeni liniowej przestrzeni B_2, gdyż tylko wtedy do odbiornika może być przekazywane niezerowa moc czynna.

Z uwagi na fakt, że analizę harmoniczną właściwości energetycznych układów należy przeprowadzać w przestrzeniach Besicovitcha-Sobolewa, konieczne jest znalezienie powiązania pomiędzy współczynnikami rozwinięć szeregów Fouriera przyporządkowanych funkcjiom f w przestrzeniach B_2 i $BS^{1}_{2,\alpha}$. W tym celu należy powiązać współczynniki Fouriera funkcji $f^{(k)}$ ($k \in \{1,\ldots,l\}$), będącej pochodną Sobolewa k-tego rzędu funkcji $f \in BS^{1}_{2,\alpha}$, ze współczynnikami Fouriera funkcji f. Wykorzystując (słuszny wówczas) wzór na całkowanie przez części, uzyskujemy

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^{(k)}(t)\, e^{-j\omega_h t}\, dt = \frac{1}{T}\left(\left(f^{(k-1)}(t)\, e^{-j\omega_h t}\right)\Big|_0^T\right) + j\omega_h \frac{1}{T}\int_0^T f^{(k-1)}(t)\, e^{-j\omega_h t}\, dt \tag{30}$$

$$h \in N, \quad \omega_h \in \Omega, \quad k \in \{1,\ldots,l\}$$

Z przynależności funkcji $f^{(k)}$ do przestrzeni B_2 wnioskujemy o istnieniu granic, przy $T \to \infty$, wyrażeń występujących po obu stronach wzoru (30) oraz o istnieniu granicy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^{(k-1)}(t)\, e^{-j\omega_h t}\, dt. \tag{31}$$

Ze wzorów (4), (6) wynika istnienie granic

$$\lim_{t\to\infty} \inf f^{(k)}(t) < \infty , \quad k \in \{0,\dots,1\} , \quad f \in \underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha} \tag{32}$$

Wyrażając pochodne $f^{(k)}$ $(k \in \{1,\dots,1-1\})$ funkcji $f \in \underline{\underline{BS}}^1_2$, przez całki z pochodnych tych funkcji rzędu $(k+1)$ można wykazać, że jest spełniony warunek Cauchy'ego istnienia granic prawostronnych $f^{(k)}(0^+)$, $(k \in \{0,\dots,1-1\})$, funkcji f.

Z powyższych stwierdzeń wynika, że:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(f^{(k-1)}(T)\, e^{-j\omega_h T} - f^{(k-1)}(0+)\right) = 0, \tag{33}$$

skąd oraz na podstawie wzoru (30) wnioskujemy, że:

$$F_h^{(k)} = (j\omega_h)\, F_h^{(k-1)}, \quad k \in \{1,\dots,1\} \tag{34}$$

$$F_h^{(k)} = (j\omega_h)^k\, F_h, \quad h \in N, \omega_h \in \Omega \tag{35}$$

gdzie:

$F_h^{(k)}$ - współczynnik szeregu Fouriera k-tej pochodnej funkcji f, przyporządkowany częstotliwości ω_h,

F_h - współczynnik szeregu Fouriera funkcji f, przyporządkowany częstotliwości ω_h.

Z powyższych wzorów wynika, że funkcja $f \in \underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha}$ i jej pochodne $f^{(k)}$ do rzędu 1-tego włącznee posiadają to samo widmo Ω, a ponadto że pochodne Sobolewa funkcji f są funkcjami prawie okresowymi w sensie Besicovitcha.

Z przedstawionych uwag wynikają wzory umożliwiające zapis normy oraz iloczynu skalarnego w przestrzeni $BS^1_{2,\alpha}$, za pomocą wzorów określających normę i iloczyn skalarny w przestrzeni B_2. Wzory te mają postać następującą:

$$\| f \|_{BS^1_2,} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \, |F_h|^2}, \quad f \in \underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha} \tag{36}$$

$$(f_1|f_2)_{BS^1_{2,\alpha}} = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \; F_{1h} \; F_{2h} \qquad f_1, f_2 \in \underline{BS}^1_{2,\alpha} \tag{3 }$$

gdzie:

F_h, F_{1h}, F_{2h} - współczynniki szeregów Fouriera funkcji f, f_1, $f_2 \in \underline{BS}^1_2$, obliczane z wykorzystaniem iloczynu skalarnego przestrzeni B_2,

∇_h - współczynniki obliczane według wzoru:

$$\nabla_h = \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1\omega_h^2 + \alpha_2\omega_h^4 + \dots + \alpha_1(\omega_h)^{2l}}, \tag{38}$$

przy czym:

l - oznacza maksymalny rząd pochodnej występującej w normie przestrzeni $BS_{2,\alpha}$ (por. wzór (15)).

Wzór (37) jest słuszny przy założeniu, że funkcje f_1, f_2 mają to samo widmo Ω, tzn. należą do tej samej podprzestrzeni liniowej przestrzeni $BS^1_{2,\alpha}$.

Przedstawione w rozdziale niniejszym rozważania umożliwiają przeprowadzenie analizy harmonicznej właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych zasilanych napięciem opisanym funkcjami prawie okresowymi w sensie Besicovitcha-Sobolewa.

LITERATURA

[1] Adams R.A., Sobolev Spaces. Acad. Press. N.Y. 1975.

[2] Aleksiewicz A., Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[3] Arrilaga J., Bradley D.A., Bodger P.S., Power System Harmonics. J.Wiley, N.Y. 1985.

[4] Besicovitch A.S., Bohr H., Almost Periodicity and General Trigonometric Series. Acta Math. N.57. p. 203-291. 1931.

[5] Brodzki M., Walczak J., O pewnym sposobie oceny prądów odbiorników wielozaciskowych wykorzystującym pojęcie przestrzeni Sobolewa. XI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Wisła, 20-23 kwietnia 1988.

[6] Corduneanu C., Almost Periodic Functions. Int. Publ. N.Y. 1968.

[7] International Conference on Harmonics in Power Systems. Worcester Polytechnic Institute, Worcester, Massachusetts. October 22-23, 1984.

[8] Kołodziej W., Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN, Warszawa 1982.

[9] Kudrewicz J., Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT, Warszawa 1970.

[10] Levitan B.M., Pocti periodiceskije funkcji, GITTL, Moskwa 1953.

[11] Levitan B.M., Zikow W.W., Pocti periodiceskije funkcji i differencjalnyje uravnenia. IMU, Moskwa 1978.

[12] Materiały Konferencji "Jakość energii elektrycznej w warunkach krajowego systemu elektroenergetycznego. T. I, II, IIa. Łódź 28-29 maja 1987.

[13] Maurin K., Metody przestrzeni Hilberta. M.M IMPAN. T.45. PWN, Warszawa 1967.

[14] Nowomiejski Z., Moc układu nieliniowego pobudzanego napięciem prawie okresowym. ZN. Pol.Śl. Elektryka z. 46, Gliwice 1975.

[15] Nowomiejski Z., Analiza pewnej klasy układów parametrycznych. ZN. Pol.Śl. z. 45, Gliwice 1975.

[16] Nowomiejski Z., Sowa E., Teoria mocy układów elektrycznych. ZN. Pol. Śl. Elektryka z. 49, Gliwice 1977.

[17] Papoulis A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Mc Graw Hill, Inc. N.Y. 1965.

[18] Zaidman S., Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. T.126. Pitman Adv. Publ. Progr., Boston 1985.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 maja 1989 r.

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОДНОФАЗНЫХ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМ ПРОТЕКАНИЕМ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. КОНСТРУКЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ

Р е з ю м е

В работе определён новый показатель качества несинусоидальных токов однофазных цепей. Этот показатель позволяет компромисно оценить энергетические свойства тока (то есть, потери активной мощности в месте её подведения к приёмнику) с одной стороны и деформации (содержания высших гармоник) для тока и напряжения приёмника, описываемых почти-периодическими функциями, с другой стороны. Эти функции являются некоторым гладким обобщением почти - периодических функций в смысле Бесиковича.

Показано, что множество этих функций образует нецентральное пространство Гильберта, квадрат нормы которого является упомянутым показателем качества.

ANALYSIS OF THE POWER PROPERTIES OF TWO-TERMINAL RECEIVERS WITH NONSINUSOIDAL WAVEFORMS IN CERTAIN SPACES OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

I. STRUCTURE OF THE QUALITY INDEX OF DEFORMED CURRENTS

S u m m a r y

A new quality index of deformed currents of two-terminal receivers has been introduced in the paper. The index makes it possible to determine the assigned compromise between the assessment of the power properties of the current, i.e. active power losses at the supply to the receiver and the assessment of the current deformations with an assumption that the current and voltage of the receiver are described by almost periodic functions. These functions constitute a certain smooth generalization of the almost periodic functions in the sense of Besicovitch. It has been shown that the set of the almost periodic functions introduced creates a non-separable Hilbert space in which a square of the norm is the defined quality index of the receiver current.