ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 117 Nr kol. 1061

Marek BRODZKI
Janusz WALCZAK
Instytut Elektrotechniki
Teoretycznej i Przemysłowej
Politechniki Śląskiej

ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI ENERGETYCZNYCH UKŁADÓW DWUZACISKOWYCH Z PRZEBIEGAMI ODKSZTAŁCONYMI W PEWNYCH PRZESTRZENIACH FUNKCJI PRAWIE OKRESOWYCH

II. ROZWIĄZYWANIE PROBLEMU MINIMALIZACJI WSKAŹNIKA JAKOŚCI PRZEBIEGÓW ODKSZTAŁCONYCH ORAZ ORTOGONALNY ROZKŁAD PRĄDU ODBIORNIKA

Streszczenie. W artykule przeprowadzono minimalizację wskaźnika jakości prądów odkształconych odbiorników dwuzaciskowych (zdefiniowanego w pracy [1]), przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzaną do odbiornika, przy założeniu, że funkcje napięć i prądów odbiorników są elementami przestrzeni funkcji prawie okresowych w sensie Besicovitcha-Sobolewa. Minimalizacja tego wskaźnika jakości umożliwia wyróżnienie składnika aktywnego prądu, który jest odpowiedzialny za przesył zadanej mocy czynnej do odbiornika.

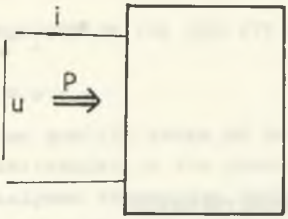
W pracy przeprowadzono również rozkład prądu odbiornika na trzy wzajemnie ortogonalne składniki, co umożliwiło zdefiniowanie wielu nowych pojęć mocy. Przeprowadzona interpretacja fizykalna składników rozkładu ortogonalnego prądu odbiornika stanowi wskazówkę do możliwości kompensacji wybranych składowych ortogonalnych prądu, która umożliwia zwiększenie współczynnika mocy źródła zasilającego odbiornik.

1. Wprowadzenie

Artykuł niniejszy stanowi kontynuację pracy [1], w której zdefiniowano pojęcie funkcji prawie okresowej w sensie Besicovitcha-Sobolewa i zbadano pewne własności tych funkcji. Wyniki uzyskane w pracy [1] umożliwiają podjęcie problemu analizy energetycznej układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi prawie okresowymi. Problem ten rozpatrzono w dalszej części artykułu.

2. Formalizacja i rozwiązanie problemu minimalizacji

Rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys. 1 i załóżmy, że:



Rys. 1. Odbiornik dwuzaciskowy

Fig. 1. Two-terminal receiver

- prąd i napięcie odbiornika są opisane funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej (czasu), prawie okresowymi, należącymi do przestrzeni Besicovitcha-Sobolewa [1],
- odbiornik znajduje się w jednym stanie prądowo-napięciowym i jest opisany za pomocą admitancji:

$$Y_h = G_h + j\,B_h, \qquad h \in \{0,\dots,\infty\} \tag{1}$$

dla poszczególnych harmonicznych $\omega_h \in \Omega$ widma Ω funkcji prawie okresowych napięcia i prądu odbiornika,

- moc czynna doprowadzana do odbiornika jest równa mocy zadanej P.

Należy rozwiązać następujący problem optymalizacyjny:
Wyznaczyć minimum funkcjonału $(\|\cdot\|_{BS^1_{2,\alpha}})^2$ względem funkcji prądu $i \in \underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha}$, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzaną do odbiornika, wyrażonym wzorem:

$$(u|i)_{B_2} = P, \qquad u,\ i \in \underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha} \tag{2}$$

Interpretacja przedstawionego problemu jest następująca:
Minimalizacja funkcjonału $(\|\cdot\|_{\underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha}})^2$, przy ograniczeniu wyrażonym wzorem (2), powinna umożliwić wyróżnienie takiej funkcji prądu $i \in \underline{\underline{BS}}^1_{2,\alpha}$, która:

- zapewnia ustalony kompromis (za pomocą współczynników wagi α_k, por. wzór (16), [1]) pomiędzy oceną strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika i oceną zniekształceń prądu,
- zapewnia zadany dopływ mocy czynnej do odbiornika.

Rozwiązania zadania optymalizacyjnego poszukujemy nie w całej przestrzeni $BS^1_{2,\alpha}$, lecz w pewnej podprzestrzeni liniowej i domkniętej $\widetilde{BS}^1_{2,\alpha}$ (będącej przestrzenią Hilberta) tej przestrzeni, w której funkcje napięcia i prądu odbiornika posiadają to samo widmo Ω.

Funkcjonał Lagrange'a omawianego problemu optymalizacyjnego ma postać:

$$L(i,\lambda) = (\|i\|_{\widetilde{\underline{\underline{BS}}}^1_{2,\alpha}})^2 - \lambda((u|i)_{B_2} - P), \qquad u,i \in \widetilde{\underline{\underline{BS}}}^1_{2,\alpha} \tag{3}$$

gdzie:

$\underline{\widetilde{BS}}{}^1_{2,\alpha} \subset \underline{BS}{}^1_{2,\alpha}$ - podprzestrzeń liniowa domknięta funkcji prawie okresowych, w sensie Besicovitcha-Sobolewa, prądów i napięć odbiornika o tym samym (przeliczalnym) widmie Ω.

Ponieważ przyporządkowanie funkcjom $f \in \underline{\widetilde{BS}}{}^1_2$, ich współczynników szeregów Fouriera jest bijekcją [4] pomiędzy zbiorami $\underline{BS}{}^1_{2,\alpha}$, l_2, to omawiany problem optymalizacyjny można przedstawić (por. [1], wzory (27), (37)) w następującej postaci:

$$\min_{A_h,B_h,\lambda} \mathcal{L}(A_h,B_h,\lambda) = \min_{A_h,B_h,\lambda} \left(\left(\sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (A_h^2 + B_h^2)\right) - \lambda\left(\sum_{h=0}^{\infty} (A_hB_h + B_hD_h) - P\right)\right) \tag{4}$$

gdzie:

$$I_h = A_h - j B_h \tag{5}$$

$$h \in \{0,\dots,\}$$

$$U_h = C_h - j D_h \tag{6}$$

Wielkości U_h, J_h są współczynnikami szeregów Fouriera (wartościami zespolonymi skutecznymi) funkcji prawie okresowych napięcia i prądu odbiornika (por. [1], wzory (23), (24)). Szeregi te mają postać określoną wzorami:

$$i = I_0 + \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} I_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \tag{7}$$

$$u = U_0 + \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \tag{8}$$

$$\omega_h \in \Omega$$

$$u,i \in \underline{\widetilde{BS}}{}^1_{2,\alpha}$$

Na podstawie twierdzenia Lusternika [5], określającego warunki konieczne istnienia ekstremum funkcjonału $\mathcal{L}$, warunki istnienia ekstremum można zapisać w postaci wzorów:

$$2\nabla_h^2 A_h - \lambda C_h = 0, \qquad B_0 = D_0 = 0, \tag{9}$$

$$2\nabla_h^2 B_h - \lambda D_h = 0, \qquad h \in \{0,\dots,\infty\} \tag{10}$$

$$P = \sum_{h=0}^{\infty} (A_h C_h + B_h D_h), \qquad \lambda \in R, \tag{11}$$

gdzie:

$$\nabla_h = \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1\omega_h^2 + \dots + \alpha_l(\omega_h)^{2l}}, \qquad \omega_h \in R. \tag{12}$$

Można również wykazać, że warunki konieczne istnienia ekstremum (9), (10), (11) są zarazem warunkami wystarczającymi minimum funkcjonału $\mathcal{J}_1$ [5]. Przekształcenie wzorów (9) do (11) prowadzi do wzoru określającego postać funkcji prądu odbiornika, która minimalizuje funkcjonał $(\|\cdot\|_{\widetilde{BS}^1_{2,\alpha}})^2$ z warunkiem (2). Wzór ten posiada postać następującą:

$$
\begin{aligned}
{}_a i^1_{BS} &= {}_a I_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} I_h \exp(j\omega_h(\cdot)) = \\
&= \widetilde{G}_{e0}\,U_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} \widetilde{G}_{eh}\,U_h \exp(j\omega_h(\cdot))
\end{aligned}
\tag{13}
$$

gdzie:

$$
\widetilde{G}_{eh} = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{C_r^2 + D_r^2}{\nabla_r^2}} = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{|U_r|^2}{\nabla_r^2}}
\tag{14}
$$

Wielkość $\widetilde{G}_{eh}$ nazywamy konduktancją zastępczą dla h-tej harmonicznej funkcji prądu. Ze wzoru (13) wynika, że minimum funkc onału $(\|\cdot\|_{\widetilde{BS}^1_{2,\alpha}})^2$ przy warunku (2) zostanie osiągnięte wtedy, gdy każda harmoniczna I_h prądu (13) transportuje moc czynną wydzielającą się na konduktancjach G_h.

Prąd ${}_a i^1_{BS}$ określony wzorem (13) nazwiemy prądem aktywnym odbiornika. Wykorzystując wzór (14) oraz wzór (27) z pracy [1], po prostych przekształceniach identycznie do pracy [2], można wykazać, że:

$$
(u|{}_a i^1_{BS})_{B_2} = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty} U_h\,(\widetilde{G}_{eh}\,U_h)^* = P, \qquad u, {}_a i^1_{BS} \in \widetilde{BS}^1_2,
\tag{15}
$$

Ze wzoru (15) wynika, że prąd aktywny ${}_a i^1_{BS}$ transportuje zadaną moc czynną P do odbiornika.

Rozkład widmowy mocy czynnej transportowanej przez wyróżniony w niniejszej pracy prąd ${}_a i^1_{BS}$ zasadniczo różni się od rozkładu widmowego mocy przyporządkowanego prądowi aktywnemu, który został wyznaczony przez L. Czarneckiego (por. np. [3]) i niepokrywa się (jak to zachodzi w przypadku cytowanej pracy [3]) z rozkładem widmowym kwadratu napięcia zasilającego odbiornik.

3. Ortogonalny rozkład prądu odbiornika

Całkowity prąd odbiornika określony wzorem (7) można, po uwzględnieniu wzorów (1), (8), przedstawić w następującej postaci:

$$i = G_o U_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h + j\,B_h)\,U_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \tag{16}$$

skąd po uwzględnieniu wzoru (13) uzyskamy wzór:

$$i - {}_a i_{BS} = (G_o - {}_e\tilde{G}_o)\,U_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h + jB_h - {}_e\tilde{G}_h)\,U_h \exp(j\omega_h(\cdot)) =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(j\omega_h(\cdot)) + \tag{17}$$

$$+ (G_o - {}_e\tilde{G}_o)\,U_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - {}_e G_h)\,U_h \exp(j\omega_h(\cdot))$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$r^{i}_{BS} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} j\,B_h\,U_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \tag{18}$$

$$s^{i}_{BS} = (G_o - {}_e\tilde{G}_o)\,U_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - {}_e\tilde{G}_h)\,U_h \exp(j\omega_h(\cdot)) \tag{19}$$

całkowity prąd odbiornika można przedstawić w postaci sumy trzech składników:

$$\bar{i} = {}_a i_{BS} + {}_r i_{BS} + {}_s i_{BS}, \qquad i,\ {}_a i_{BS},\ {}_r i_{BS},\ {}_s i_{BS} \in \widetilde{BS}^{1}_{2,\alpha} \tag{20}$$

Prąd ${}_r i_{BS}$ nazywamy prądem reaktancyjnym, z budowy wzoru (18) wynika, że jest on kompensowalny z dowolną dokładnością w sensie normy przestrzeni BS^1_2, za pomocą dwójników reaktancyjnych złożonych ze skończonej liczby elementów LC.

Prąd ${}_s i_{BS}$ nazywamy prądem rozproszenia, czyli prądem częstotliwościowego rozrzutu konduktancji odbiornika G_h względem konduktancji zastępczych ${}_e\tilde{G}_h$ (por. wzór (14)). Ze wzoru (19) wynika, że prąd ten nie jest kompensowalny, nawet dla skończonej liczby harmonicznych, w klasie układów pasywnych.

Dowód ortogonalności składowych a_{BS}^{i}, r_{BS}^{i}, s_{BS}^{i} prądu i odbiornika, w normie przestrzeni $BS_{2,\alpha}^{1}$, sprowadza się do wykazania prawdziwości wzorów:

$$\left(a_{BS}^{i} \mid r_{BS}^{i}\right)_{BS_{2,\alpha}^{1}} = 0, \tag{21}$$

$$\left(a_{BS}^{i} \mid s_{BS}^{i}\right)_{BS_{2,\alpha}^{1}} = 0, \quad a_{BS}^{i},\ r_{BS}^{i},\ s_{BS}^{i} \in \underline{\widetilde{BS}}_{2,\alpha}^{1} \tag{22}$$

$$\left(r_{BS}^{i} \mid s_{BS}^{i}\right)_{BS_{2,\alpha}^{1}} = 0 \tag{23}$$

Dowód ten opiera się na wykorzystaniu wzoru (14) oraz wzoru (37) z pracy [1] i przeprowadza się go w sposób analogiczny do pracy [2].

Z przedstawionych rozważań wynika, że wyróżnione składniki a_{BS}^{i}, r_{BS}^{i}, s_{BS}^{i} prądu odbiornika są w normie przestrzeni $BS_{2,\alpha}^{1}$ wzajemnie ortogonalne. Umożliwia to zdefiniowanie szeregu nowych pojęć mocy dla odbiorników dwuzaciskowych zasilanych napięciem prawie okresowym.

4. Definicje mocy

Wzajemna ortogonalność składowych aktywnej, reaktancyjnej, rozproszenia prądu odbiornika, implikuje wzór:

$$(i \mid i)_{BS_{2,\alpha}^{1}} = \left(\left\| a_{BS}^{i} \right\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2} + \left(\left\| r_{BS}^{i} \right\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2} + \left(\left\| s_{BS}^{i} \right\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}. \tag{24}$$

Mnożąc obustronnie powyższy wzór przez $\left(\|u\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}$ uzyskujemy zależność:

$$\begin{aligned}\left(\|u\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}\left(\|i\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2} &= \left(\|u\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}\left(\left\| a_{BS}^{i} \right\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2} + \\ &+ \left(\|u\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}\left(\left\| r_{BS}^{i} \right\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2} + \left(\|u\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}\left(\left\| s_{BS}^{i} \right\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)^{2}.\end{aligned} \tag{25}$$

Zdefiniujmy moce:

- S_{BS^m} - pozorną w sensie Besicovitcha-Sobolewa:

$$S_{SB^m} = \left(\|u\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right)\left(\|i\|_{BS_{2,\alpha}^{1}}\right), \tag{26}$$

- Q_{BS^r} - reaktancyjną w sensie Besicovitcha-Sobolewa:

$$Q_{BS^r} = (\|u\|_{BS^1_{2,\alpha}})(\|{}_r i_{BS}\|_{BS^1_{2,\alpha}}), \tag{28}$$

- Q_{BS^s} - rozproszenia w sensie Besicovitcha-Sobolewa:

$$Q_{BS^s} = (\|u\|_{BS^1_{2,\alpha}})(\|{}_s i_{BS}\|_{BS^1_{2,\alpha}}), \tag{29}$$

i zapiszmy wzór (25) w postaci:

$$S^2_{BS^m} = P^2_{BS^a} + Q^2_{BS^r} + Q^2_{BS^s} . \tag{30}$$

Wzór powyższy ilustruje pewien "prostopadłościan" mocy dla wprowadzonych mocy.

5. Podsumowanie

1. W pracy sformalizowano problem minimalizacji wskaźnika jakości prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym prawie okresowym w sensie Besicovitcha-Sobolewa.

2. Minimalizacja wskaźnika jakości prądu odbiornika umożliwiła wyróżnienie składowej aktywnej prądu odpowiedzialnej za:
- ustalony kompromis pomiędzy oceną strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika i oceną zniekształceń prądu,
- dopływ zadanej mocy czynnej do odbiornika.

3. Przeprowadzono rozkład prądu na trzy wzajemnie ortogonalne składowe:
- aktywną,
- reaktancyjną, kompensowalną w klasie układów LC,
- rozproszenia, wynikłą z rozrzutu konduktancji częstotliwościowych odbiornika względem zbioru pewnych konduktancji zastępczych.

4. Wykorzystując uzyskany rozkład ortogonalny prądu wprowadzono szereg nowych pojęć mocy dla przebiegów prawie okresowych.

LITERATURA

[1] Brodzki M., Walczak J., Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi w pewnych przestrzeniach funkcji prawie - okresowych. I. Konstrukcja wskaźnika jakości przebiegów odkształconych. XII Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Wisła 1989.

[2] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J., Ortogonalny rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym w przestrzeni Sobolewa. XI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Wisła, 20 - 23 kwietnia 1988.

[3] Czarnecki L.S., Power Theories of Periodic Nonsinusoidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne nr 31, z. 3-4, 1985.

[4] Kołodziej W., Wybrane rozdziały analizy matematycznej PWN, Warszawa 1982.

[5] Maurin K., Analiza. Cz. I. Elementy. PWN, Warszawa 1971.

Recenzent: Doc. dr hab inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 maja 1989 r.

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОДНОФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

II. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МИНИМАЛИЗАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПРОТЕКАНИИ И ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ ПРИЁМНИКА

Р е з ю м е

В работе проведена минимизация показателя качества (введённого в I-ой части статьи) несинусоидальных токов для однофазных приёмников. Эту проблему решено при ограничении равенства относящегося к подведенной к приёмнику заданой активной мощности и принятым допущением, что функции токов и напражений приёмников являются элементами пространства почти-периодических функций в смысле Бесиковича-Соболева.

Минимизация показателя позволяет выделить активную составляющую тока, которая отвечает за передачу заданной активной мощности к приёмнику.

В работе проведено также разложение тока приёмника на три взаимноортогональные составляющие и введено несколько новых определений мощности. Проведена физическая интерпретация составляющих ортогонального распределения тока приёмника, что позволяет компенсировать некоторые составляющие тока, а в итоге увеличить коэффициент мощности источника.

ANALYSIS OF THE POWER PROPERTIES OF TWO-TERMINAL RECEIVERS WITH NONSINUSOIDAL WAVEFORMS IN CERTAIN SPACES OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

II. SOLVING THE PROBLEM OF MINIMIZING THE QUALITY INDEX OF DEFORMED CURRENTS AND ORTOGONAL DECOMPOSITION OF THE RECEIVER CURRENT

S u m m a r y

The paper describes minimization of the quality index of deformed currents of two-terminal receivers (defined in paper [1] with invariability of the active power supplied to the receiver, with an assumption that the functions of the receiver voltages and currents are the elements of the space of almost periodic functions in the sense of Besicovitch-Sobolev. The minimization of this quality index makes it possible to distinguish the active component of the current which is responsible for the transmission of the assigned active power to the receiver.
Also the decomposition of the receiver current into three components ortogonal to each other has been carried out, which permits definition of a number of new conceptions of power.

The carried out physical interpretation of the components of the ortogonal decomposition of the receiver current is an instruction on the possibility of compensation of the selected ortogonal components of the current which permits to increase the power factor of the source supplying the receiver.