ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Wojciech Syski
Eugeniusz Toczyłowski

Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

Uśredniony model zasobów buforowych [1]

Streszczenie. W pracy aproksymuje się szczegółowe modele międzyoperacyjnych magazynów buforowych umiejscowionych bezpośrednio przed maszynami przez odpowiednie uśrednione modele probabilistyczne, w których jest ograniczone tylko średnie, łączne użycie buforów w dłuższych okresach czasu. Wyznaczono dwa pierwsze momenty zmiennej losowej oznaczającej czasy przebywania zadań w buforze rzutowane na okresy w funkcji obciążenia maszyny oraz trzech pierwszych momentów rozkładu czasów operacji technologicznych H wykonywanych na maszynie za buforem. Otrzymane rezultaty umożliwiają konstrukcję uśrednionych modeli zasobów buforowych.

1. Wstęp

W szczegółowych modelach harmonogramowania dyskretnych procesów produkcji występują zasoby niezużywalne, dostępne chwilowo i odnawialne, których liczba jednostek w każdej chwili jest dana, np. maszyny, pracownicy, bufory o ograniczonej pojemności, środki transportu, narzędzia, palety. W praktyce, ze względu na złożoność modeli szczegółowego harmonogramowania, a również ze względu na niedokładność i niepewność danych, okazuje się niezbędne konstruowanie modeli uśrednionych, zagregowanych, w których zjawiska o naturze deterministycznej występujące w dość dużych ilościach są zastępowane przez ich charakteryzacje uśrednione lub probabilistyczne.

Załóżmy, że rozważamy zbiór R zasobów niezużywalnych, tj. maszyn i buforów. Dla uproszczenia zapisu w rozważanym modelu pominiemy występowanie zasobów zużywalnych. Przyjmijmy, że horyzont $[0, T^*]$ podzielono na T okresów $\Delta_1, \ldots, \Delta_T$. Jeden z najważniejszych elementów konstrukcji modeli zagregowanych harmonogramowania produkcji rozważanych w wyższych warstwach układów sterowania polega na zamianie modeli zasobów chwilowo dostępnych, niezużywalnych na modele zasobów zużywalnych uśrednionych w dłuższym interwale czasowym. Otrzymane modele zasobów określają ich dostępność w całym interwale czasowym, przy czym zasoby te są *zużywalne* w rozważanym okresie (por. [4], p. 4.3). Tak więc liczby maszyn, miejsc w magazynie, osób i palet są zastępowane maszynogodzinami, magazynogodzinami, osobogodzinami i paletogodzinami.

W pracy opracowano reguły konstrukcji uśrednionych modeli zasobów *buforowych*. W rozdz. 2 sformułowano ogólny schemat konstrukcji modelu uśrednionego. W dalszych rozdziałach wyprowadzono formuły niezbędne do obliczenia współczynników modelu. Rozważono najpierw losowe modele dla operacji oczekiwania zadań produkcyjnych w buforze przed stanowiskiem. Przyjmując, że średnie obciążenie stanowiska obsługi jest ograniczone od góry przez ρ, opracowano formuły aproksymacyjne rozkładu czasu oczekiwania W zadań w buforze o nieograniczonej pojemności w funkcji trzech pierwszych momentów rozkładu czasów operacji technologicznych H wykonywanych na maszynie za buforem. Dalej, wykorzystując uzyskane wyniki, wyznaczono dwa pierwsze momenty zmiennej losowej oznaczającej czasy przebywania zadań w buforze rzutowane na interwały czasowe, co pozwala już obliczyć wymagane współczynniki modelu uśrednionego.

[1] praca finansowana częściowo w ramach problemu badań podstawowych R.P.I.02.5.3

2. Konstrukcja uśrednionego modelu wymagań zasobowych

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że w pewnym gnieździe produkcyjnym znajduje się określona liczba maszyn realizujących różnorodne operacje technologiczne. Przed każdą maszyną znajduje się bufor o ograniczonej (lub nieograniczonej) pojemności.

Zadania produkcyjne są wprowadzane do systemu w przedziale czasu $[0, T^*]$. W celu konstrukcji zagregowanego modelu wymagań zasobowych horyzont harmonogramowania $[0, T^*]$ został podzielony na T okresów o długości $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_T$, przy czym $T^* = \sum_{t=1}^{T} \Delta_t$. Zakładamy, że pożądane terminy zakończenia zadań odpowiadają chwilom zakończenia tych okresów. Zadanie ukończone w okresie t wymaga zbioru (ciągu) operacji technologicznych, magazynowania i transportu, przy czym operacje transportu pomijamy. Operacje są powiązane pewną relacją porządku częściowego wynikającą np. z warunków technologicznych. W szczególnym przypadku zadanie produkcyjne polega na realizacji ciągu operacji technologicznych wymagających określonych maszyn oraz operacji oczekiwania w buforach przed maszynami, natomiast w ogólnym przypadku z zadaniem jest związana pewna 'wiązka' lub 'grono' wzajemnie powiązanych operacji. Przyjmujemy, że zadania można pogrupować w zbiór K rodzin zadań mających identyczne marszruty, te same wymagania zasobowe oraz zbliżone współczynniki kosztów. Również operacje można pogrupować w zbiory operacji podobnych.

Produkcyjne czasy przejścia. Niektóre z operacji zadania kończonego w okresie t są realizowane w tym samym okresie, niektóre w okresach poprzedzających. Operacje przyczyniają się do produkcyjnego czasu przejścia zadania w systemie przez dodanie czasów wykonania operacji technologicznych, czasów przygotowawczo-zakończeniowych, czasu operacji transportu między maszynami i czasów oczekiwania w kolejkach. Chwila rozpoczęcia ustalonej operacji wybranego zadania jest sumą czasów operacji transportowych, oczekiwania w kolejkach w magazynach buforowych oraz czasów wykonania wszystkich poprzedzających operacji technologicznych. W celu oszacowania produkcyjnych czasów przejścia przyjmiemy w przybliżeniu, podobnie jak w metodzie PERT, że dla dowolnej operacji czas od chwili jej rozpoczęcia do chwili zakończenia zadania produkcyjnego (będący sumą na ogół dość dużej liczby niezależnych zmiennych losowych modelujących czasy trwania operacji leżących na ścieżce krytycznej), można uważać za zmienną losową o rozkładzie normalnym, której wartość średnia jest sumą wartości oczekiwanych czasów związanych z dotychczas ukończonymi operacjami zadania oraz wariancja jest sumą wariancji tych czasów. Przyjmijmy, że $_{kt}$ jest uśrednionym czasem przejścia dla zadań kończonych w okresie t, oszacowanym dla założonych maksymalnych obciążeń maszyn i mierzonym liczbą okresów. Tak więc zadania kończone w okresie t mają operacje wykonywane w okresach $t - \tau_{kt} + 1, t + \tau_{kt} + 2, \ldots, t$, a tym samym w tych okresach są wykorzystywane pewne zasoby. Dzięki wyborowi odpowiednio długich okresów Δ_t czasy przejścia zadań przez system mogą być rzędu $1 - 3$ okresów. Dla zadań typu k wprowadźmy oznaczenie $\tau_k^0 = \max_t \{t | t - \tau_{kt} < 0\}$. W celu ukończenia zadań grupy k przed upływem okresu τ_k^0 może być wymagane wprowadzenie ich do systemu przed chwilą zerową.

Model zasobów zużywalnych. Ograniczenia zasobów niezużywalnych zastępujemy przez model zasobów zużywalnych postaci

$$o_{\mu t} = b^t_{\mu k\tau} x_{k,t+\tau}, \qquad \mu = 1, \ldots, M; \; t = 1, \ldots, T \tag{2.1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{M} P_{\mu r t} o_{\mu t} \leq B_{rt}, \qquad r = 1, \ldots, R; \; t = 1, \ldots, T \tag{2.2}$$

W modelu występują następujące zmienne:

x_{kt} - liczba zadań typu k ukończonych pod koniec okresu t, $t = \tau_k^0 + 1, \ldots, T$, przy czym τ_k^0 – czas przejścia zadań typu k inicjowanych przed chwilą zerową.

$o_{\mu t}$ - średnia liczba operacji typu μ wykonywanych w okresie t.

Ponieważ zadania wprowadzone do systemu przed chwilą zerową muszą być znane, dla uproszczenia zakłada się, że $x_{kt}, t = 1, \ldots, \tau_k^0$, są znane. Pozostałe parametry modelu (wszystkie nieujemne):

M - liczba typów operacji,

$b_{\mu k\tau}^t$ - średnia liczba operacji typu μ wymaganych w okresie t w celu ukończenia zadania typu k pod koniec okresu $t+\tau$ (współczynnik $b_{\mu k\tau}^t$ może być niecałkowity),

B_{rt} - łączna dostępność zasobu r w okresie t, $B_{rt} \leq \Delta_t$,

$P_{\mu rt}$ - liczba jednostek zasobu r wymagana przez jedną operację typu μ w okresie t.

Zadaniem tej pracy jest podanie metody liczenia współczynników $P_{\mu rt}$ dla zasobów buforowych.

Czasy oczekiwania w kolejkach. Przyjmujemy, że dla danych, dopuszczalnych poziomów obciążeń maszyn możliwe jest określenie deterministycznych lub losowych modeli czasów wykonania wszystkich operacji technologicznych, magazynowych i transportowych.

Najbardziej zmiennym i niepewnym składnikiem czasów przejścia zadania są okresy oczekiwania zadania w kolejkach, zależące od takich czynników jak obciążenia maszyn, reguły szeregowania zadań w kolejkach itp. Czynniki te są trudne do uwzględnienia na etapie harmonogramowania zagregowanego. Można je uwzględnić w sposób zagregowany przez dodanie średnich zagregowanych czasów oczekiwania w kolejkach. Czasy te są zmienne, zależne od chwilowych obciążeń maszyn.

W pracy tej rozważamy losowy model czasów oczekiwania. W celu wyznaczenia (a raczej przybliżonego oszacowania) rozkładów zmiennych losowych czasów oczekiwania zadania w buforze jest niezbędne przyjęcie modelu czasów operacji technologicznych wykonywanych na maszynie za rozważanym buforem. W modelu zagregowanym zazwyczaj nie jest możliwe określenie dokładnych czasów tych operacji – stąd przyjmiemy model losowy tych operacji. Zakładając, że dla ustalonej maszyny jest możliwe oszacowanie ilości operacji różnych typów wykonywanych na tej maszynie, można przyjąć, że czas realizacji operacji wykonywanych na maszynie jest zmienną losową H o rozkładzie dyskretnym (każdej wartości realizacji tej zmiennej odpowiadają operacje o tej długości trwania).

Zakładając, że mamy już obliczone momenty rozkładu czasów operacji technologicznych H wykonywanych na maszynie za buforem, przyjmując losowy model napływu zadań do bufora (zgodnie z rozkładem wykładniczym) oraz przyjmując dodatkowo, że średnie obciążenie stanowiska obsługi jest ograniczone od góry przez ρ, np. $\rho = 80\%$, poszukujemy najpierw momentów rozkładu czasu oczekiwania W zadań w buforze o nieograniczonej pojemności. Zauważmy, że dla danych ρ oraz średniego czasu obsługi m_{1H} wartość parametru λ intensywności napływu zadań do bufora wynika jednoznacznie z zależności $\rho = \lambda m_{1H}$.

Współczynniki użycia buforów. Przy założonym modelu, zarówno liczby wykonywanych w ustalonym okresie operacji jednego zadania, jak i wykorzystanie zasobów w tym okresie stają się zmiennymi losowymi. Obliczenie wartości średnich obciążenia zasobów buforowych jest zadaniem rozdz. 5 tej pracy. Wartości te są parametrami zadania zagregowanego, uśredniającego dużą liczbę zjawisk modelowanych losowo. Zasadniczy problem obliczeniowy umożliwiający obliczenie obciążeń zasobów buforowych w rozważanych okresach czasu można sformułować w sposób następujący. Rozważamy operacje oczekiwania zadań produkcyjnych w pewnym buforze. Zakładamy, że czas oczekiwania w tym buforze jest zmienną losową W o aproksymowanym rozkładzie będącym funkcją dwóch pierwszych momentów. Przyjmujemy, że chwila pojawienia się zadania w buforze jest zmienną losową S o znanym rozkładzie. W celu obliczenia współczynników $P_{\mu rt}$ potrzebujemy momentów zmiennej losowej oznaczającej czasy przebywania zadania w buforze w okresach $\Delta_1, \ldots, \Delta_T$.

3. Momenty rozkładu czasu oczekiwania w buforze

Oznaczmy przez Ω przestrzeń zdarzeń elementarnych. Dla dowolnej zmiennej losowej A i zdarzenia $V \subseteq \Omega$ niech $m_{iA|V}$ oznacza jej i-ty warunkowy moment, tzn. $m_{iA|V} = E(A^i|V)$. Będziemy także używali skróconego zapisu $m_{iA} = m_{iA|\Omega}$. Przez $A_*(.)$ będziemy oznaczali transformatę Laplace'a-Stieltjesa (LST) zmiennej losowej A.

Niech W i H oznaczają odpowiednio zmienne losowe charakteryzujące czas oczekiwania zadania w buforze i jego czas obsługi. Przyjmiemy następujące założenia:

(H1) Dla zmiennej losowej H istnieje LST jej rozkładu prawdopodobieństwa;

(H2) Napływ zadań do bufora odbywa się zgodnie z rozkładem Poissona o intensywności λ;

(H3) Zadania napływające do bufora są obsługiwane zgodnie z dyscypliną FIFO (First Come First Served);

(H4) Bufor zadań ma nieograniczoną pojemność.

(H5) Współczynnik obciążenia stanowiska obsługi za buforem $\rho = \lambda m_{1H}$ jest mniejszy od jedności.

Z założeń (H1)-(H5) wynika, że używając terminologii teorii kolejek będziemy się posługiwali modelem systemu M/G/1. Zgodnie z tą teorią ([1,2]) LST rozkładu zmiennej losowej W dana jest następującą formułą

$$W_*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda(1 - H_*(s))}. \tag{3.1}$$

Jeżeli zmienna losowa H ma rozkład wykładniczy o funkcji gęstości

$$f_H(x) = \mu e^{-\mu x}, \tag{3.2}$$

to jej LST dana jest wzorem

$$H_*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}. \tag{3.3}$$

Wtedy po łatwych przekształceniach

$$W_*(s) = 1 + \frac{\mu\rho}{s + \mu(1-\rho)}. \tag{3.4}$$

Łatwo zauważyć, że powyższej LST odpowiada następująca funkcja gęstości prawdopodobieństwa (pochodna oryginału LST)

$$f_W(x) = (1-\rho)\delta(x) + \rho\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)x}, \tag{3.5}$$

gdzie $\delta(x)$ oznacza funkcję Diraca. Niestety nie w każdym wypadku, nawet jeśli istnieje analityczna postać funkcji $H_*(.)$, udaje się znaleźć oryginał $W_*(.)$. Numeryczne znajdowanie pochodnej oryginału LST okazuje się zwykle bardzo pracochłonne. Z tego powodu konieczne jest aproksymowanie funkcji gęstości rozkładu zmiennej losowej W (zob. podrozdział 4). Mimo trudności ze znalezieniem analitycznej postaci gęstości rozkładu prawdopodobieństwa W, momenty rozkładu m_{iW} można określić za pomocą następującego wzoru

$$m_{iW} = (-1)^i W_*^{(i)}(0), i = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

gdzie $W_*^{(i)}(.)$ oznacza i-tą pochodną funkcji $W_*(.)$. W celu uproszczenia dalszych obliczeń wygodnie jest zdefiniować następującą funkcję

$$B_*(s) = s^{-1}(1 - H_*(s)). \tag{3.7}$$

Wtedy wzór (3.1) można przepisać w następującej postaci

$$W_*(s) = (1-\rho)(1 - \lambda B_*(s))^{-1}. \tag{3.8}$$

Różniczkując (3.8) otrzymujemy

$$W'_*(s) = -\lambda(1-\rho)B'_*(s)(1-\lambda B_*(s))^{-2}, \tag{3.9}$$
$$W''_*(s) = W'_*(s)\frac{B''_*(s) - \lambda B_*(s)B''_*(s) - 2\lambda B'_*(s)^2}{B'_*(s)(1-\lambda B_*(s))}. \tag{3.10}$$

Korzystając z definicji (3.7) otrzymujemy

$$B'_*(s) = -s^{-2}(1-H_*(s)) - s^{-1}H'_*(s), \tag{3.11}$$
$$B''_*(s) = 2s^{-3}(1-H_*(s)) + 2s^{-2}H'_*(s) - s^{-1}H''_*(s), \tag{3.12}$$

Rozwijając funkcje $H_*(.)$, $H'_*(.)$, $H''_*(.)$ w szeregi Maclaurina, po pewnych przekształceniach otrzymujemy

$$m_{1W} = \frac{\rho h_{res}}{1-\rho}, \tag{3.13}$$
$$m_{2W} = \frac{\rho(1-\rho)m_{3H} + 3\rho^2 h_{res} m_{2H}}{3(1-\rho)^2 m_{1H}}, \tag{3.14}$$

przy czym $h_{res} = m_{2H}/2m_{1H}$ jest znanym w teorii kolejek średnim residualnym czasem obsługi zadania (mean residual service time). Wielkość ta może być interpretowana jako średni czas,jaki w losowo wybranej chwili pozostaje do zakończenia obsługi zadania znajdującego się aktualnie w systemie. Wzór (3.13) można przedstawić równoważnie w postaci równania Pollaczka-Khinchine'a [1].

Przedstawione wyniki uzyskano przy założeniu, że mamy tylko jeden typ zadań i stosowana jest dyscyplina LIFO. W przypadku gdy rozważa się priorytetowe reguły szeregowania zadań w kolejce przy występowaniu wielu klas zadań, można również uzyskać formuły analityczne na dwa pierwsze momenty zmiennej W. Wzory te są jednak bardziej złożone i nie będziemy ich tutaj przytaczać. Dla bardziej złożonych modeli kolejkowych formuły analityczne nie istnieją. Wtedy pożądane dwa pierwsze momenty rozkładu W wyznacza się za pomocą symulacji.

4. Aproksymacja rozkładu czasu oczekiwania w buforze

Dla potrzeb głównego celu tej pracy wyznaczymy teraz aproksymację rozkładu czasu oczekiwania w buforze wykorzystując do tego dwa pierwsze momenty tego rozkładu. Rozpocznijmy od spostrzeżenia, że dla dowolnego rozkładu H prawdopodobieństwo zdarzenia $P(W > 0) = 1 - \rho$. Z tego względu funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej W dana jest następującym wzorem (porównaj z (3.5))

$$f_W(x) = (1-\rho)\delta(x) + \rho f_W(x|W > 0), \tag{4.1}$$

Problem aproksymacji funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej W sprowadza się więc do aproksymacji funkcji $f_W(.|W > 0)$. W teorii kolejek ze względu na niezbyt skomplikowane formuły i wystarczającą na ogół dokładność stosuje się najczęściej aproksymacje oparte na wykorzystaniu kombinacji wypukłych funkcji gęstości rozkładu wykładniczego lub wielostopniowego rozkładu Erlanga (zob. [3,5]). W naszym przypadku przyjmiemy następującą postać przybliżenia funkcji $f_W(.)$.

$$f_{\tilde{W}}(x) = (1-\rho)\delta(x) + \rho f(x), \tag{4.2}$$

gdzie

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x), \tag{4.3}$$

oraz

$$p_1 + p_2 = 1,\ 0 \le p_1, p_2. \tag{4.4}$$

Występujące we wzorze (4.3) funkcje $f_i(.)$, $i = 1, 2$ będziemy dobierali w oparciu o wartości $m_{1W|W>0}$, $m_{2W|W>0}$ oraz następująco zdefiniowanego współczynnika *odkształcenia* rozkładu prawdopodobieństwa

$$c_{W|W>0} = \frac{m_{2W|W>0}}{m_{1W|W>0}^2} - 1. \tag{4.5}$$

Zgodnie z wzorem (4.1) mamy

$$m_{iW|W>0} = \rho^{-1} m_{iW} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

Stąd i z wzorów (3.13), (3.14), (4.5) otrzymujemy

$$m_{1W|W>0} = \frac{h_{res}}{1-\rho}, \tag{4.7}$$

$$m_{2W|W>0} = \frac{(1-\rho)m_{3H} + 3\rho h_{res} m_{2H}}{3(1-\rho)^2 m_{1H}}, \tag{4.8}$$

$$c_{W|W>0} = 2\rho - 1 + \frac{(1-\rho)m_{3H}}{3h_{res}^2 m_{1H}}. \tag{4.9}$$

Naszym celem jest wybór funkcji $f_i(.)$, $i = 1, 2$ tak, aby zmienna losowa $\tilde{W}$, której gęstością prawdopodobieństwa jest $f_{\tilde{W}}(x)$, miała zgodne pierwsze dwa momenty z odpowiednimi momentami W, a więc

$$m_{iW} = m_{i\tilde{W}} \text{ dla } i = 1, 2. \tag{4.10}$$

Aby zapewnić spełnienie warunku (4.10) w całym przedziale zmienności parametru $c_{W|W>0}$ (od zera do nieskończoności), zastosujemy następujące postaci funkcji $f_i(.)$, $i = 1, 2$

$$f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x} \text{ dla } c_{W|W>0} \geq 1, \tag{4.11}$$

oraz

$$f_1(x) = \frac{(k\lambda_1)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda_1 x} \tag{4.12}$$

$$f_2(x) = \frac{((k+1)\lambda_1)^{k+1} x^k}{k!} e^{-(k+1)\lambda_1 x} \text{ dla } c_{W|W>0} \leq 1. \tag{4.13}$$

Jak się dalej okaże, konieczne jest przyjęcie różnych postaci funkcji $f_i(.)$, $i = 1, 2$ w zależności od wartości parametru $c_{W|W>0}$, gdyż w przeciwnym wypadku nie zawsze byłby możliwy wybór parametrów we wzorach (4.3), (4.11) lub (4.3), (4.12), (4.13) tak, aby zapewnić spełnienie zależności (4.10). W dalszym ciągu paragrafu zajmiemy się wyprowadzeniem wzorów na wartości parametrów p_1, p_2, λ_1 oraz λ_2 funkcji $f_i(.)$, $i = 1, 2$. Korzystając z (4.10), (4.2), (4.1) oraz (4.6) otrzymujemy

$$m_{iW|W>0} = \int_0^\infty x^i f(x) dx \text{ dla } i = 1, 2. \tag{4.14}$$

Dla $c_{W|W>0} \geq 1$, korzystając z warunku (4.14), oraz wzorów (4.3), (4.11), uzyskujemy następujący układ równań

$$m_{1W|W>0} = p_1 \lambda_1^{-1} + p_2 \lambda_2^{-1} \tag{4.15}$$

$$m_{2W|W>0} = 2p_1 \lambda_1^{-2} + 2p_2 \lambda_2^{-2} \tag{4.16}$$

Otrzymujemy więc układ trzech równań (4.4), (4.15), (4.16). Ponieważ mamy cztery niewiadome p_1, p_2, λ_1, oraz λ_2, powyższe równania uzupełniamy warunkiem

$$p_1\lambda_1^{-1} = p_2\lambda_2^{-1} \tag{4.17}$$

Rozwiązując układ równań (4.4), (4.15)-(4.17) otrzymujemy

$$\lambda_1 = m_{1W|W>0}^{-1}\left(1 + \sqrt{\frac{c_{W|W>0} - 1}{c_{W|W>0} + 1}}\right) \tag{4.18}$$

$$\lambda_2 = m_{1W|W>0}^{-1}\left(1 - \sqrt{\frac{c_{W|W>0} - 1}{c_{W|W>0} + 1}}\right) \tag{4.19}$$

$$p_1 = 0.5\lambda_1 m_{1W|W>0} \tag{4.20}$$

$$p_2 = 1 - p_1 \tag{4.21}$$

Przejdźmy teraz do omówienia przypadku, gdy $c_{W|W>0} \leq 1$. W tym wypadku korzystając z warunku (4.14) oraz wzorów (4.3), (4.12), (4.13), otrzymujemy następujący układ równań

$$m_{1W|W>0} = p_1\lambda_1^{-1} + p_2\lambda_1^{-1}, \tag{4.22}$$

$$m_{2W|W>0} = p_1\lambda_1^{-2}(1 + k^{-1}) + p_2\lambda_1^{-2}(1 + (k+1)^{-1}). \tag{4.23}$$

Mamy więc układ trzech równań (4.4), (4.22), (4.23). Ponieważ mamy cztery niewiadome p_1, p_2, λ_1 oraz k, powyższe równania uzupełniamy warunkiem

$$k = int(c_{W|W>0}^{-1}), \tag{4.24}$$

gdzie $int(c_{W|W>0}^{-1})$ jest największą liczbę całkowitą nie przekraczającą $c_{W|W>0}^{-1}$. Rozwiązując układ równań (4.4), (4.22), (4.23), (4.24) otrzymujemy

$$k = int(c_{W|W>0}^{-1}), \tag{4.25}$$

$$\lambda_1 = m_{1W|W>0}^{-1}, \tag{4.26}$$

$$p_1 = kc_{W|W>0}(k + 1 - c_{W|W>0}^{-1}), \tag{4.27}$$

$$p_2 = 1 - p_1. \tag{4.28}$$

5. Momenty rozkładu czasu oczekiwania zadania w buforze w zadanym odcinku czasu

W rozdziale tym wyznaczymy wzory na liczbę jednostek zasobu buforowego wymaganych przez jedną operację magazynowania typu μ pewnego zadania produkcyjnego. Ustalmy odcinek czasu Δ_j, $j = 1,\ldots,T$. Przyjmijmy, że w losowej chwili S do bufora zostaje wprowadzone pewne zadanie. Zadanie to oczekuje przez czas określony zmienną losową W w buforze, po czym jest wykonywane. Zakładamy, że zmienne losowe S, W są niezależne. Niech D oznacza czas oczekiwania zadania widziany na odcinku czasu Δ_j. W szczególnym przypadku, gdy Δ_j jest dostatecznie długie oraz chwila S należy do okresu j, można przyjąć, że $D = W$. W ogólnym przypadku wartość zmiennej losowej D jest określona przez długość części wspólnej odcinków $[S, S + W]$ i Δ_j. Mamy więc

$$D = \Pi_{\Delta_j}(S + W) - \Pi_{\Delta_j}(S), \tag{5.1}$$

gdzie $\Pi_{\Delta_j}(.)$ jest operacją rzutowania na przedział Δ_j. Korzystając z (4.1), otrzymujemy

$$m_{iD|S} = \rho E[(\Pi_{\Delta_j}(S+W) - \Pi_{\Delta_j}(S))^i|S, W > 0]. \tag{5.2}$$

Wtedy

$$m_{1D|S} = \rho(m_{1\Pi_{\Delta_j}(S+W)|S,W>0} - \Pi_{\Delta_j}(S)), \tag{5.3}$$

$$m_{2D|S} = \rho[m_{2\Pi_{\Delta_j}(S+W)|S,W>0} - 2\Pi_{\Delta_j}(S)m_{1\Pi_{\Delta_j}(S+W)|S,W>0} + +(\Pi_{\Delta_j}(S))^2]. \tag{5.4}$$

Okazuje się, że dzięki założonej w rozdziale 4 postaci aproksymacji funkcji gęstości zmiennej losowej W wartości $m_{1D|S}$ i $m_{2D|S}$ można wyznaczyć analitycznie. W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia

$$T_j = \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_i, \; j = 1, 2, \ldots,$$

$$S_j = (T_j - S)_+, \; j = 1, 2, \ldots.$$

Łatwo zauważyć, że

$$\Pi_{\Delta_j}(S+x) = T_j \text{ dla } 0 \le x \le S_j,$$

$$\Pi_{\Delta_j}(S+x) = S + x \text{ dla } S_j \le x \le S_{j+1},$$

$$\Pi_{\Delta_j}(S+x) = T_{j+1} \text{ dla } x \ge S_{j+1},$$

Stąd zgodnie z przyjętą w rozdziale 4 formułą aproksymacyjną otrzymujemy

$$\begin{aligned} m_{i\Pi_{\Delta_j}(S+W)|S,W>0} &\doteq m_{i\Pi_{\Delta_j}(S+\bar{W})|S,\bar{W}>0} = \\ &= \int_0^\infty [\Pi_{\Delta_j}(S+x)]^i f_{\bar{W}}(x|S, \bar{W} > 0)dx = \\ &= T_j^i \int_0^{S_j} f_{\bar{W}}(x|S, \bar{W} > 0)dx + \\ &+ \int_{S_j}^{S_{j+1}} (S+x)^i f_{\bar{W}}(x|S, \bar{W} > 0)dx + \\ &+ T_{j+1}^i \int_{S_{j+1}}^\infty f_{\bar{W}}(x|S, \bar{W} > 0)dx \end{aligned} \tag{5.5}$$

Łatwo zauważyć (zob. wzory (4.11), (4.12), (4.13)), że wszystkie występujące we wzorze (5.5) całki mają następującą postać

$$b\int_l^u x^k e^{-ax}dx, \tag{5.6}$$

gdzie a, b, l, u i k są pewnymi stałymi. W celu ich łatwego obliczania zdefiniujmy funkcje

$$I_k(a, l, u) = \frac{a^{k+1}}{k!}\int_l^u x^k e^{-ax}dx, \text{ dla } i = 0, 1, \ldots. \tag{5.7}$$

Korzystając ze znanych wzorów całkowych dla ustalonych k, a, l, u, ich wartości można obliczać zgodnie z następującą formułą rekurencyjną

$$I_0(a, l, u) = e^{-al} - e^{-au},$$

$$I_{k+1}(a, l, u) = I_k(a, l, u) + \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}(l^{k+1}e^{-al} - u^{k+1}e^{-au}), \; k = 0, 1, \ldots. \tag{5.8}$$

Stąd zgodnie z formułami (4.2), (4.3), (5.5) w zależności od wartości współczynnika odkształcenia $c_{\bar{W}|\bar{W}>0}$ korzystając odpowiednio z wzorów (4.11) lub (4.12), (4.13) otrzymujemy
dla $c_{\bar{W}|\bar{W}>0} \geq 1$

$$
\begin{aligned}
m_{1\Pi_{\Delta_j}(S+\bar{W})|S,\bar{W}>0} = \Sigma_{i=1}^{2}[\ & T_j p_i I_0(\lambda_i, 0, S_j) + \\
& + S p_i I_0(\lambda_i, S_j, S_{j+1}) + \\
& + \lambda_i^{-1} p_i I_1(\lambda_i, S_j, S_{j+1}) + \\
& + T_{j+1} p_i I_0(\lambda_i, S_{j+1}, \infty)],
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{2\Pi_{\Delta_j}(S+\bar{W})|S,\bar{W}>0} = \Sigma_{i=1}^{2}[\ & T_j^2 p_i I_0(\lambda_i, 0, S_j) + \\
& + S^2 p_i I_0(\lambda_i, S_j, S_{j+1}) + \\
& + 2S\lambda_i^{-1} p_i I_1(\lambda_i, S_j, S_{j+1}) + \\
& + 2\lambda_i^{-2} p_i I_2(\lambda_i, S_j, S_{j+1}) + \\
& + T_{j+1}^2 p_i I_0(\lambda_i, S_{j+1}, \infty)],
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

oraz dla $c_{\bar{W}|\bar{W}>0} \leq 1$

$$
\begin{aligned}
m_{1\Pi_{\Delta_j}(S+\bar{W})|S,\bar{W}>0} = \Sigma_{i=1}^{2}[\ & T_j p_i I_{k+i-2}((k+i-1)\lambda_1, 0, S_j) + \\
& + S p_i I_{k+i-2}((k+i-1)\lambda_1, S_j, S_{j+1}) + \\
& + \lambda_1^{-1} p_i I_{k+i-1}((k+i-1)\lambda_1, S_j, S_{j+1}) + \\
& + T_{j+1} p_i I_{k+i-2}((k+i-1)\lambda_1, S_{j+1}, \infty)],
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{2\Pi_{\Delta_j}(S+\bar{W})|S,\bar{W}>0} = \Sigma_{i=1}^{2}[\ & T_j^2 p_i I_{k+i-2}((k+i-1)\lambda_1, 0, S_j) + \\
& + S^2 p_i I_{k+i-2}((k+i-1)\lambda_1, S_j, S_{j+1}) + \\
& + 2S^2 \lambda_1^{-1} p_i I_{k+i-1}((k+i-1)\lambda_1, S_j, S_{j+1}) + \\
& + (1 + (k+i-1)^{-1})\lambda_1^{-2} p_i I_{k+i}((k+i-1)\lambda_1, S_j, S_{j+1}) + \\
& + T_{j+1}^2 p_i I_{k+i-2}((k+i-1)\lambda_1, S_{j+1}, \infty)].
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Uwagi końcowe. Podsumowując wyniki tej pracy, zauważmy, że dysponując warunkowymi momentami $m_{1D|S}$, oraz $m_{2D|S}$ zmiennej losowej S poszukiwane momenty rozkładu czasu przebywania zadań w buforze otrzymujemy ze wzorów

$$m_{iD} = Em_{iD|S} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots . \tag{5.13}$$

Znając pierwszy moment operacji μ oczekiwania pewnego zadania w buforze r w okresie Δ_t można przyjąć model średni $P_{\mu rt} = m_{1D}$. Przy konstrukcji modelu restrykcyjnego lub relaksacyjnego można ponadto wykorzystać moment drugi m_{2D}. Interesującym dalszym zagadnieniem, nie rozważanym w tej pracy, jest ewentualna agregacja operacji podobnych, o zbliżonych współczynnikach $P_{\mu rt}$.

Literatura

[1] Gross D. and C. M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory* ,New York 1974.

[2] Kleinrock L., *Queueing Systems Theory* ,New York 1976.

[3] Kuhn P.,'Analysis of Complex Systems Control Structures by Decompositions', *Proc. of the Intern. Teletraffic Congress*, Melbeurne 1976.

[4] Toczyłowski E., *Niektóre strukturalne metody optymalizacji do sterowania w dyskretnych systemach wytwarzania*, WNT, Warszawa 1989.

[5] Whitt W.,'Approximations for Networks of Queues', *Proc. of the Intern. Teletraffic Congress*, Montreal 1983.

Recenzent: Doc.dr h.inż.F.Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

Nonrenewable model of buffer resources

Summary. In this paper the detailed models of buffers between machines are replaced by probabilistic models, which estimate the average utilization of buffers during longer periods. The first two moments of the (projected onto an interval) waiting time of a job waiting in a buffer are calculated as a function of the utilization level of the machine and three moments of the processing times at the machine positioned after this buffer. The results allows us to construct a nonrenewable model of buffer resources.

УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ БУФЕРНЫХ РЕЗЕРВОВ

Р е з ю м е

В работе аппроксимируются подробные модели межоперационных буферных емкостей, расположенных непосредственно перед машинами соответственными усредненными вероятностными моделями, в которых ограничены только средние, со взаимосвязанным использованием буферов в больших промежутках времени. Определены два первых момента переменной доли, обозначающей время пребывания задач в буфере, отражающиеся на периоды в функции нагрузки машины, а также три момента распределения времени технологических операций н выполняемых на машине за буфером. Полученные результаты делают возможной конструкцию усредненных моделей буферных резервов.