

Wojciech Syski
Eugeniusz Toczyłowski

Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

Strategie poszukiwań z wykorzystaniem symulowanego wyżarzania¹

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposoby wykorzystania algorytmu symulowanego wyżarzania do przybliżonego rozwiązywania trudnych zadań optymalizacji dyskretnej pojawiających się podczas harmonogramowania produkcji. W pracy omówiono właściwości teoretyczne i obliczeniowe algorytmu oraz przedstawiono jego implementację. Przedstawiono również sposób wykorzystania algorytmu symulowanego wyżarzania w metodzie ograniczonych poszukiwań rozwiązań przybliżonych, wykorzystującej strukturalne właściwości rozważanej klasy zadań.

1. Wprowadzenie

Wiele zadań harmonogramowania produkcji charakteryzuje się zbyt wielką wymiarowością i złożonością, aby mogły być skutecznie rozwiązane za pomocą metody podziału i ograniczeń lub innej metody dokładnej. Wśród metod optymalizacji przybliżonej na uwagę zasługuje metoda *symulowanego wyżarzania* (ang. simulated annealing, zob. [4,5,2,3]). Idea algorytmu symulowanego wyżarzania została zaczerpnięta z mechaniki statystycznej. Zaobserwowano tam, że ogrzewając niektóre materiały krystaliczne, a następnie powoli je schładzając, uzyskuje się materiały o bardzo regularnej strukturze odpowiadające minimum energii potencjalnej cząsteczek (fakt ten jest wykorzystywany przy produkcji kryształów krzemu dla potrzeb technologii elektronowej). Algorytm symulowanego wyżarzania naśladuje opisane wyżej zjawisko fizyczne, przy czym służy do rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej ogólnej postaci

$$\min_{z \in X} F(z) \quad (1)$$

przy czym zbiór X jest zbiorem dyskretnym i ograniczonym.

Celem tej pracy jest taka implementacja algorytmu symulowanego wyżarzania (heurystyczna), aby możliwe było jego skuteczne wykorzystanie w wielu sferach poszukiwań rozwiązań przybliżonych. W rozdz. 2 przedstawiono zasady działania podstawowej wersji algorytmu symulowanego wyżarzania oraz niektóre rezultaty dotyczące jego zbieżności. W rozdziale 3 omówiono strategie poszukiwań rozwiązań przybliżonych z wykorzystaniem algorytmu symulowanego wyżarzania. W rozdziale 4 przedstawiono oryginalną implementację algorytmu oraz w rozdziale 5 wyniki jego testowania.

2. Algorytm symulowanego wyżarzania

Przedstawimy teraz podstawową wersję algorytmu.

¹praca częściowo finansowana w ramach problemu R.P.1.02 w temacie 5.3

Algorytm symulowanego wyżarzania

Parametry wejściowe:

 t_0 - początkowa wartość parametru temperatury ($t_0 > 0$), x^0 - punkt startowy ($x^0 \in X$)

1. Podstaw $k = 0$ (k - numer iteracji algorytmu).
2. Wylosuj punkt $z^k \in N(x^k)$ ($N(x^k)$ oznacza sąsiedztwo punktu x^k). Idź do punktu 3.
3. Wyznacz prawdopodobieństwo

$$p_k = \min\left\{\exp\left\{\frac{F(x^k) - F(z^k)}{t_k}\right\}, 1\right\}. \quad (2)$$

Z prawdopodobieństwem p_k wykonaj podstawienie $x^{k+1} = z^k$, oraz z prawdopodobieństwem komplementarnym $1 - p_k$ podstawienie $x^{k+1} = x^k$. Przejdź do wykonania następnego punktu 4.

4. Zmodyfikuj parametr temperatury t_k wyznaczając wartość t_{k+1} . Przejdź do wykonania punktu 5.
5. Podstaw $k = k + 1$. Idź do 2.

Metoda wymaga bardzo skąpych wiadomości na temat problemu. Jedynymi informacjami otrzymywanymi od użytkownika w trakcie obliczeń są wielokrotnie wyznaczane wartości funkcji celu w zadanych przez algorytm punktach, oraz sprawdzanie przynależności tych punktów do zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Przedstawiona powyżej wersja algorytmu symulowanego wyżarzania jest bardzo ogólna i wymaga uściślenia poszczególnych punktów. Niemniej nawet dla tak ogólnej wersji algorytmu uzyskano interesujące rezultaty dotyczące zbieżności do globalnego minimum. Rozważmy najpierw przypadek, gdy w algorytmie symulowanego wyżarzania temperatura nie ulega zmianie $t_k = t$, dla $k = 0, 1, \dots$. Wtedy działanie algorytmu odpowiada przejściom pomiędzy stanami (punktami zbioru X) jednorodnego stacjonarnego łańcucha Markowa. Dla danego zbioru $A \subseteq X$ niech $P(A, t)$ oznacza stacjonarne prawdopodobieństwo, że $x^k \in A$. Przy dość ogólnych założeniach ("spójność" zbioru X , równomierne losowanie punktów spośród zbioru sąsiadów $N(x)$) można pokazać (zob. Mitra [4]), że

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(X^*, t) = 1, \quad (3)$$

przy czym

$$X^* = \{x^* \in X : F(x^*) = \min_{x \in X} F(x)\} \quad (4)$$

jest zbiorem rozwiązań zadania (1). Przy podobnych założeniach udowodniono również (zob. Mitra [4]), że jeśli parametr temperatury jest modyfikowany w każdej iteracji zgodnie z wzorem

$$t_k = t / \log(k + l) \quad (5)$$

przy czym l oraz t są pewnymi dodatnimi stałymi, to rozkład prawdopodobieństwa odpowiadającego algorytmowi symulowanego wyżarzania niestacjonarnego łańcucha Markowa dąży do rozkładu o nośniku na zbiorze (4). Własności niestacjonarnego łańcucha Markowa odpowiadającego ogólnemu schematowi algorytmu symulowanego wyżarzania badano również w pracy Hajka (patrz [2], str. 36).

Przedstawione powyżej rezultaty mają charakter czysto teoretyczny, gdyż nie mówią niczego o szybkości zbieżności algorytmu. W szczególności przy korzystaniu z wzoru (5) ze względu na powolny spadek wartości parametru temperatury może się okazać konieczne wykonanie większej liczby iteracji, niż wynosi liczność zbioru X , co oczywiście nie jest dopuszczalne. Aby uzyskać praktyczną zbieżność algorytmu, konieczne

jest przyspieszenie tempa spadku temperatury (nawet kosztem ewentualnej utraty optymalności uzyskanego rozwiązania) na przykład redukując wartość parametru temperatury geometrycznie co określoną liczbę iteracji (zob. Johnson [2]). Ponadto dla wielu zadań optymalizacji dyskretnej zastosowanie algorytmu symulowanego wyżarzania z losowaniem punktów z *pełnego* sąsiedztwa aktualnego rozwiązania jest zbyt pracochłonne, a tym samym mało skuteczne.

3. Strategie poszukiwań

W każdej metodzie poszukiwań na skuteczność metody wpływają: wybór przestrzeni stanów, sposobów przejścia od danego stanu do stanów kolejnych w wyniku podjęcia możliwych decyzji oraz selekcja najlepszych decyzji. W procesie poszukiwań rozwiązania aktualny stan poszukiwań jest określony przez wartości zmiennych decyzyjnych problemu. Stan poszukiwań można reprezentować jako wierzchołek pewnego drzewa decyzyjnego lub ogólniej, grafu. Kolejny wierzchołek jest uzyskiwany z poprzedniego w wyniku podjęcia odpowiednich decyzji. W każdym wierzchołku, obok aktualnych wartości zmiennych decyzyjnych, staramy się wyznaczyć pewne dodatkowe informacje dające wskazówki odnośnie dalszych kierunków poszukiwań w sąsiedztwie aktualnego punktu i umożliwiające (szacunkową) ocenę generowanych punktów z sąsiedztwa.

Do szczególnie korzystnych właściwości struktury problemu zaliczamy możliwość wyodrębnienia zadań dekomponowalnych, dzięki czemu jest możliwe, dla zwiększenia efektywności obliczeń, utworzenie reprezentacji rozproszonej drzewa decyzyjnego złożonej z K poddrzew (K jest liczbą podproblemów). Jeden wierzchołek k -tego poddrzewa odpowiada stanowi podproblemu i jest wynikiem ciągu decyzji k -tego podproblemu prowadzących od korzenia do tego wierzchołka. W trakcie poszukiwań w danej chwili wybierany jest dokładnie jeden wierzchołek poddrzewa (nazywany wierzchołkiem *aktywnym*) określający aktualny stan (wartości zmiennych) k -tego podproblemu. W kolejnym kroku algorytmu rozgałęzieniu może podlegać tylko wierzchołek aktywny. Rozgałęzienie polega na wygenerowaniu nowych decyzji k -tego podproblemu. Wierzchołek *pełnego* drzewa decyzyjnego jest reprezentowany w reprezentacji rozproszonej przez zbiór wierzchołków aktywnych poddrzew wszystkich podproblemów.

W celu efektywnego zastosowania metody symulowanego wyżarzania wybór właściwej przestrzeni decyzyjnej jest sprawą podstawową. Jest oczywiste, że każdy problem optymalizacji można zapisać na wiele sposobów różniących się strukturą, postacią zmiennych oraz ograniczeń. Zastosowanie schematu poszukiwań losowych do problemu sformułowanego w sposób ogólny (np. w ogólnej postaci zadania programowania dyskretnego), bez wykorzystania jego specyficznych właściwości, może doprowadzić do przeogromnego nakładu obliczeń i to bez uzyskania zadowalających rozwiązań.

Podjęcie strukturalne w optymalizacji dyskretnej (patrz [7]) polega na badaniu struktury rozważanego problemu, w wyniku czego zostaje ujawniony pewnego rodzaju porządek, ład wewnętrzny istniejący w problemie. Prowadzi to do wyodrębnienia najistotniejszych, podstawowych elementów problemu optymalizacji (podproblemów, zmiennych) oraz struktury powiązań między tymi elementami. Podproblemy są wyodrębniane w powiązaniu z metodami elementarnymi optymalizacji dyskretnej służącymi do ich rozwiązywania, natomiast całość struktury determinuje sposób połączenia metod elementarnych w kompletny, uwarunkowany strukturalnie schemat algorytmiczny.

Metoda symulowanego wyżarzania może być traktowana jedynie jako tylko jedna z wielu elementarnych technik optymalizacji dyskretnej, przy czym jej zastosowanie należy ograniczyć do podproblemów optymalizacji o odpowiednich właściwościach oraz o ograniczonej złożoności. Jeżeli chodzi o pożądane w metodzie symulowanego wyżarzania właściwości problemu, to nie można mechanicznie stosować tej metody do jakiegokolwiek problemu optymalizacji dyskretnej. W szczególności, dobrych efektów można się spodziewać wtedy, gdy w strukturze problemu można doszukać się pewnych

analogii do minimalno-energetycznych problemów fizycznych. W porównaniu z wieloma elementarnymi metodami optymalizacji dyskretnej, metoda symulowanego wyżarzania należy do narzędzi najogólniejszych i może być stosowana wtedy, gdy nie można znaleźć skuteczniejszej metody szczegółowej.

Jeżeli chodzi o złożoność problemu optymalizacji, to wyodrębnienie zredukowanego, elementarnego podproblemu optymalizacji, dla którego jest celowe zastosowanie metody symulowanego wyżarzania, może wymagać dogłębnej analizy problemu prowadzącej do takich przekształceń problemu z wykorzystaniem takich sposobów jak:

- transformacje modeli, np. przez zamianę zmiennych, ograniczeń (transformacje dokładne, restrykcyjne, relaksacyjne i przybliżone [7]),
- tworzenie zredukowanej przestrzeni decyzyjnej (zredukowanego jądra zadania) za pomocą np. agregacji zmiennych i ograniczeń albo w wyniku dekompozycji problemu.

Omówimy tutaj tylko dwie przykładowe metody tworzenia zawężonej przestrzeni decyzyjnej – metodę dekompozycji oraz metodę perturbacyjnych poszukiwań.

Dekompozycja problemu. Przypuśćmy, że zmienne problemu można podzielić na dwie grupy: $x \in X \subset C^n$ oraz $(v, y) \in VY \subseteq V \times Y$, przy czym $V \subset C^p, Y \subset R^m$. Przyjmijmy, że dla zadanych wartości x pozostałe zmienne zadania można łatwo wyznaczyć za pomocą odpowiedniej, efektywnej metody. Rozważamy następujące zadanie programowania mieszanego (dyskretno-ciągłego)

$$\min_{(x,v,y) \in XVY} Q(x, v, y) \quad (6)$$

przy czym zbiór $XVY \subseteq X \times V \times Y$. Zadanie to można rozwiązywać dwuetapowo w wyniku dekompozycji

$$\min_{x \in X_0} [F(x) = \min_{(v,y) \in VY_x} F(x, v, y)] \quad (7)$$

przy czym $VY_x = \{(v, y) | (x, v, y) \in XVY\}$, natomiast $X_0 = \{x | x \in X, VY_x \neq \emptyset\}$ jest składowym zbiorem dopuszczalnym zadania nadrzędnego. Zadanie nadrzędne ma strukturę problemu (1) i może być rozwiązywane z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania (o ile nie znamy metody efektywniejszej). Dla efektywności metody dekompozycji zadanie podrzędne musi być zadaniem łatwym do rozwiązywania. Przykładowo, może też to być zadanie liniowe o specjalnej strukturze, np. sieciowe, lub najkrótszej ścieżki, może też to być zadanie programowania mieszanego dekomponowalne na podzadania o specjalnej strukturze, np. sieciowe zadania stałej opłaty lub uogólnione zadania załadunku lub załadunku z wyborem.

Metoda perturbacyjnych poszukiwań. Przedstawimy teraz skrótkowo ideę podejścia 'dualnego' w stosunku do metody rozważanej w poprzednim punkcie. W podejściu tym rozwiązuje się ciąg relaksacji Lagrange'a rozważanego problemu dobierając odpowiednio parametry problemu (tworząc restrykcje problemu) tak, aby dla danej restrykcji otrzymana relaksacja restrykcji była 'mniej niedopuszczalna' od relaksacji problemu pierwotnego. Restrykcyjna metoda perturbacyjna [7] dostarcza sposobu na generowanie nowych stanów i wybór stanów najlepszych za pomocą odpowiedniej miary jakości. Metoda polega na wykorzystaniu informacji uzyskiwanej z rozwiązywania zadań relaksacji Lagrange'a. Rozgałęzianie wynika z wyboru perturbacji parametrów zadania prowadzących do restrykcji zadania. Wybór najlepszych kierunków poszukiwań jest rezultatem oceny miary jakości, jaką jest poprawa miary niedopuszczalności rozwiązania.

Mechanizm akceptacji lub odrzucenia rozważanego wierzchołka może być oparty na metodzie symulowanego wyżarzania, w której prawdopodobieństwo akceptacji wierzchołka zależy od wartości miary jakości oraz temperatury chłodzenia.

4. Implementacja algorytmu symulowanego wyżarzania

W tym rozdziale omówimy oryginalną implementację algorytmu symulacyjnego wyżarzania. Zgodnie z uwagami z punktu 1 kluczową sprawą jest wybór ciągu wartości parametrów temperatury $\{t_k\}$.

Adeptywna metoda doboru temperatury. Opisana w tym podpunkcie metoda wyboru parametrów temperatury opiera się na spostrzeżeniu, że temperatura powinna być obniżana, jeżeli nie obserwuje się spadku wartości funkcji, oraz podwyższana (lub utrzymywana na tym samym poziomie), jeżeli wartości funkcji celu maleją. Ponadto wartości temperatury w początkowej fazie działania algorytmu symulacyjnego wyżarzania powinny być tak dobrane, aby z dużym prawdopodobieństwem akceptować punkty próbne w których wartość funkcji celu wzrasta nieznacznie w porównaniu z dotychczas obserwowanymi wartościami przyrostów funkcji celu.

Rozpocznijmy od zdefiniowania następującego ciągu współczynników

$$s_0 = q |F(x^0) - F(z^0)|, \quad (8)$$

$$s_{k+1} = (1 - q)s_k + q |F(x^k) - F(z^k)| \quad \text{jeżeli } |F(x^k) - F(z^k)| > \eta, \quad (9)$$

$$s_{k+1} = s_k \quad \text{jeżeli } |F(x^k) - F(z^k)| \leq \eta, k = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

przy czym $0 < q < 1$ jest parametrem *uśredniania przyrostów funkcji celu*, zaś $\eta > 0$ *wartością progową uśredniania przyrostów funkcji*. W oparciu o ciąg $\{s_k\}$ definiujemy parametry temperatury $\{t_k\}$

$$t_k = w_k s_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

przy czym w_k jest *temperaturą znormalizowaną*. Zwróćmy uwagę, że określony wzorem (11) ciąg $\{t_k\}$ nie zależy od skalowania zadania. Powyższy sposób wyboru wartości parametrów temperatury przy bezzględnych wartościach temperatury znormalizowanej pozwala uniezależnić metodę od skalowania funkcji celu (patrz (11) i (2)). Algorytm doboru wartości parametrów $\{w_k\}$ jest następujący. Początkowo wykonywane jest podstawienie $w_0 = w$ (w jest początkową wartością temperatury znormalizowanej) oraz zerowany jest licznik $l_0^t = 0$ (nazywany dalej "watch dogiem" temperatury). W k -tej iteracji badana jest wartość funkcji celu $F(x^k)$. Jeżeli jest to najlepsza wartość uzyskana w trakcie dotychczasowych obliczeń, to podstawiamy $l_{k+1}^t = 0$ oraz $w_{k+1} = w_k$. W przeciwnym wypadku badamy, czy $l_k^t > l_{max}^t$ przy czym $l_{max}^t \geq 1$ jest zadaną maksymalną wartością "watch dog" temperatury. Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to zmniejszamy temperaturę znormalizowaną kładąc $w_{k+1} = cw_k$ ($0 < c < 1$ jest *parametrem chłodzenia*), $l_{k+1}^t = 0$. W przeciwnym wypadku podstawiamy $w_{k+1} = w_k$, oraz $l_{k+1}^t = l_k^t + 1$. W celu poprawienia stabilności algorytmu symulowanego wyżarzania zastosowano dodatkowy licznik (nazywany dalej "watch dogiem" funkcji celu) zliczający ilość iteracji algorytmu, dla których bieżąca wartość funkcji jest większa od dotychczas najlepszej znalezionej powiększonej o η . Jeżeli wartość licznika przekroczy określoną wielkość progową $l_{max}^f > 1$ (*maksymalna wartość "watch dog" funkcji celu*), to algorytm jest restartowany z najlepszego dotychczas znalezionego punktu zbioru X . Przy tym restarcie znormalizowana wartość parametru temperatury nie ulega zmianie.

Przedstawiona w tym punkcie wersja algorytmu symulowanego wyżarzania nie gwarantuje zbieżności ciągu punktów $\{x_k\}$ do zbioru minimum globalnych zadania (1) (algorytm może zatrzymać się w jednym

z minimów lokalnych). Mimo to rezultaty numeryczne wskazują, że jeżeli tylko minima lokalne funkcji F nie są zbyt głębokie, to rezultaty zastosowania algorytmu są na ogół pozytywne.

Kryterium zatrzymania algorytmu symulowanego wyżarzania. Ze względu na adaptacyjny sposób wyboru parametrów temperatury aktualna wartość temperatury znormalizowanej jest dobrym wskaźnikiem stanu optymalizacji. Z tego względu algorytm symulowanego wyżarzania będzie zatrzymywany, jeżeli parametr znormalizowanej temperatury w osiągnięciu wartości mniejszą od pewnej zadanej wielkości progowej ϵ_t (*krytyczna temperatura znormalizowana*).

5. Właściwości numeryczne i zastosowania algorytmu

Działanie zaproponowanego algorytmu symulowanego wyżarzania omówimy na przykładzie dwóch problemów optymalizacji dyskretnej. W trakcie eksperymentów przyjęto następujące wartości parametrów: $\omega_0 = 0.3$, $\epsilon_t = 0.03$, $c = 0.5$, $l_{max}^t = 1000$, $l_{max}^f = 1500$, $\eta = 0.000001$, $q = 0.034$.

Przykład 1

$$\min_{x \in X} [F(x) = (x_1 - 1)^2 + 2 \sum_{i=2}^{10} (x_i - x_{i-1})^2] \quad (12)$$

przy czym

$$X = \{x \in C^{10} : -10 < x_i < 10, i = 1, \dots, 10\} \quad (13)$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązaniem globalnym zadania (12), (13) jest punkt $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, zaś $F(x^*) = 0$. Oprócz tego w problemie istnieje minimum lokalne $x = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, przy czym $F(x) = 1$. Zadanie (12), (13) rozwiązano przyjmując punkt startowy $x^0 = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)$ przy wykorzystaniu algorytmu symulowanego wyżarzania kolejno dla następujących procedur generacji sąsiadów:

- 1 Wszystkie punkty z sąsiedztwa danego punktu x są wybierane z jednakowym prawdopodobieństwem;
- 2 Kolejno są generowane losowe permutacje wszystkich kierunków zmian liczonych po współrzędnych wektora x (każdą współrzędną można zwiększyć lub zmniejszyć o 1), po czym punkt z sąsiedztwa jest otrzymywany jako suma bieżącego punktu i wypadającego w danej iteracji kierunku zmian;
- 3 Kierunki zmian wektora x nie wykorzystywane do generowania punktów z sąsiedztwa w ciągu ostatnich 14 iteracji są losowane z rozkładem jednostajnym (w ten sposób dowolny kierunek zmian wektora x nie może się powtórzyć częściej niż co 14 iteracji);
- 4 Kierunki zmian wektora x są generowane kolejno. Najpierw kolejne współrzędne są zwiększane o 1, a potem zmniejszane o 1.

Rezultaty obliczeń dla czterech wersji generacji sąsiadów przedstawiono w Tablicy 1. W kolumnach oznaczonych symbolem $F(x^k)$ zamieszczono aktualne wartości rozwiązania, natomiast w kolumnach oznaczonych symbolem $F(x^*)$ zamieszczono najlepsze wartości otrzymane w trakcie dotychczasowych poszukiwań.

Zgodnie z oczekiwaniami, algorytm symulowanego wyżarzania zatrzymał się w minimum globalnym x^* . W tym miejscu wymagają komentarza rezultaty uzyskiwane algorytmem symulowanego wyżarzania przy wykorzystaniu różnych procedur wyboru sąsiadów. Najlepsze wyniki uzyskano generując kolejno po sobie kierunki zmian wektora x w procedurze 4. Jednak szybkość zbieżności algorytmu w tym wypadku wynika przede wszystkim ze specyfiki zadania, w którym chcąc uzyskać poprawę funkcji celu należy kolejno zmniejszać współrzędne wektora x . W przypadku tej samej funkcji celu, lecz ze zmienioną numeracją

wersja	1		2		3		4	
k	$F(x^k)$	$F(\hat{x}^k)$	$F(x^k)$	$F(\hat{x}^k)$	$F(x^k)$	$F(\hat{x}^k)$	$F(x^k)$	$F(\hat{x}^k)$
0	16	16	16	16	16	16	16	16
100	8	8	5	5	8	8	1	1
200	7	7	3	3	5	5	1	1
300	7	7	3	3	5	5	0	0
400	5	5	9	3	5	5	0	0
500	6	5	5	3	3	3	0	0
700	7	5	3	3	5	1	0	0
1000	5	5	2	2	1	1	0	0
1500	1	1	4	0	2	0	0	0
2000	6	1	6	0	2	0	0	0
3000	0	0	0	0	0	0	0	0
4000	1	0	0	0	0	0	0	0
5000	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 1. Rezultaty obliczeń algorytmu symulowanego wyżarzania dla Przykładu 1. Results of computations of simulated annealing algorithm for Problem 1.

współrzędnych wektora x należy się spodziewać bardzo złych wyników. Spośród pozostałych metod wyboru sąsiadów najlepsze wyniki (szczególnie w początkowej fazie obliczeń) uzyskano dla procedur 2 i 3.

Zgodnie z wcześniejszą uwagą z p. 2, zaproponowany tutaj algorytm symulowanego wyżarzania nie gwarantuje znalezienia minimum globalnego zadania (1). W celu zbadania skuteczności tego algorytmu dla przykładu (12),(13) wykonano po 100 symulacji tego algorytmu dla każdej wersji procedur wyboru sąsiadów. Za każdym razem procedury te generowały inny losowy ciąg punktów sąsiadów (efekt ten uzyskano zmieniając początkowe wartości w generatorach liczb pseudolosowych w procedurach wyboru sąsiadów). Dla każdej z procedur wyboru sąsiadów wyznaczono współczynnik skuteczności algorytmu symulowanego wyżarzania zdefiniowany następująco:

$$s = \frac{\text{ilość znalezionych rozwiązań globalnie optymalnych}}{\text{ilość przebiegów algorytmu}} \quad (14)$$

Uzyskane dla przykładu (12),(13) rezultaty przedstawiono w Tablicy 2. Ponownie najlepsze wyniki otrzymano dla wersji algorytmu z procedurami wyboru sąsiadów o numerach 1 i 2.

1	2	3
0.80	0.88	0.85

Tablica 2. Współczynniki skuteczności algorytmu symulowanego wyżarzania dla różnych procedur wyboru sąsiadów. Efficiency measures of simulated annealing algorithm for different selections of neighbourhood.

Przykład 2. W celu zastosowania metody symulowanego wyżarzania w problemach szeregowania zadań, zmienne decyzyjne dzielimy na dwie grupy: zmienne dyskretne x , związane z alokacją i uszeregowaniem

operacji, oraz zmienne ciągłe y , określające chwile rozpoczęcia lub ukończenia operacji. Zmienne x mogą być wyznaczone za pomocą ograniczonej metody symulowanego wyżarzania. Dla zadanej alokacji i uszeregowania wyznaczenie y jest łatwe, gdyż wymaga rozwiązania odpowiedniego zadania najkrótszej ścieżki lub prostego zadania sieciowego. Rozwiązanie to umożliwia ponadto identyfikację bloków operacji styycznych oraz współczynników wrażliwości funkcji celu na perturbacje czasów wykonania tych operacji. Dane te mogą być wykorzystane w ograniczonym algorytmie symulowanego wyżarzania do redukcji ilości punktów dopuszczalnego sąsiedztwa oraz do określenia prawdopodobieństwa wylosowania punktu uzależnionego od miary wrażliwościowej. Zastosowanie algorytmu symulowanego wyżarzania do szczegółowego minimalnokosztowego harmonogramowania produkcji w gnieździe produkcyjnym z maszynami równoległymi przedstawiono w pracy [1].

Zilustrujemy tutaj zastosowanie algorytmu symulowanego wyżarzania dla przykładowego zagadnienia minimalnokosztowego szeregowania 21 zadań produkcyjnych złożonych z 53 operacji technologicznych realizowanych na 2 maszynach. Czas jednej iteracji algorytmu symulowanego wyżarzania, polegającej na (i) generowaniu zbioru punktów ograniczonego sąsiedztwa $N(x^k)$, (ii) losowaniu kandydata $z^k \in N(x^k)$, (iii) obliczeniu harmonogramu szczegółowego związanego z z^k oraz wykonaniu kroku akceptacji/odrzućenia kandydata wynosił około 25 s na mikrokomputerze IBM AT (12MHz).

Punktem startowym x^0 było początkowe uszeregowanie operacji wyznaczone metodą heurystyczną. Po rozwiązaniu minimalnokosztowego zadania ustalenia harmonogramu y^0 wartość funkcji celu wyniosła $F(x^0) = 15\,304$. Dla zapewnienia kryterium stopu algorytmu (dostatecznego obniżenia temperatury) wymagana była zbyt duża liczba iteracji (rzędu wielu tysięcy). Po przyjęciu standardowych parametrów metody algorytm zatrzymano po 4 tys. iteracji. Wyniki przedstawiono w Tabelcy 3.

k	$F(x^k)$
0	15 304.00
1000	9 447.50
2000	9 433.00
3000	9 432.50
4000	7 999.00

Tabelca 3. Rezultaty obliczeń algorytmu symulowanego wyżarzania dla Przykładu 2. Results of computations of simulated annealing algorithm for Problem 2.

Podsumowanie. Metoda symulowanego wyżarzania jest tylko jedną z możliwych do wykorzystania metod optymalizacji dyskretnej i jej zastosowanie do rozwiązywania złożonych problemów harmonogramowania produkcji jest ograniczone ze względu na dość dużą pracochłonność algorytmu. W pracy przedstawiono implementację algorytmu oraz sposoby zwiększające możliwości jego wykorzystania podczas rozwiązywania złożonych problemów harmonogramowania. Z naszych doświadczeń wynika, że algorytm symulowanego wyżarzania winien być częścią bardziej złożonego schematu poszukiwań wykorzystującego odpowiednie dla danego problemu metody strukturalne optymalizacji dyskretnej oraz metody poszukiwań oparte na technikach sztucznej inteligencji.

Literatura

- [1] Jagiełło S., Toczyłowski E., 'Szczegółowe minimalnokosztowe harmonogramowanie produkcji w gnieździe produkcyjnym z maszynami równoległymi', materiały tej konferencji.
- [2] Johnson D. R., Aragon C. R., McGeoch L. A. and Schevon C., "Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation (Part 1 and Part 2)", Technical Report, 1987.
- [3] Laarhoven P.J.M., Aarts, E.H.J., *Simulated Annealing: Theory and Applications*, D. Reider Publishing Company, 1988.
- [4] Mitra D., Romeo F. and Sangiovanni-Vincentelli A., "Convergence and finite time behavior of simulated annealing", *J. Advances in Applied Probability*, 18 (1986), pp. 747-771.
- [5] Lundy M. and Mees A., "Convergence of the annealing algorithm", *Mathematical Programming* 34 (1986), pp. 111-124.
- [6] Syski W., *Instrukcja użytkownika pakietu symulowanego wyznaczania DOA*, raport Instytutu Automatyki PW, 1989.
- [7] Toczyłowski E., *Niektóre strukturalne metody optymalizacji do sterowania w dyskretnych systemach wytwarzania*, WNT, Warszawa, 1989.

Recenzent: Doc.dr inż.F.Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

Search Strategies with Simulated Annealing

Summary

Methods of using the simulated annealing algorithm in the course of seeking approximate solutions of difficult discrete optimization problems of production scheduling. The theoretical and computational properties of the simulated annealing algorithm is discussed and an implementation of the algorithm is presented. It was also shown how to use the algorithm in a restricted search scheme which uses structural properties of the problem.

СТРАТЕГИЯ ПОИСКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИМУЛИРОВАННОГО ПРОКАЛИВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлены способы использования алгоритма симулированного прокаливания для приблизительного решения трудных задач дискретной оптимизации, возникающих во время составления графика производства. В работе рассмотрены теоретические и вычислительные свойства алгоритма, а также представлено его внедрение. Представлен способ использования алгоритма симулированного прокаливания в методе ограниченных поисков приблизительных решений, использующий структурные свойства рассматриваемого класса задач.