ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 117 1061

Maciej SIWCZYŃSKI

Wyższa Szkoła Inżynierska
w Zielonej Górze

DETERMINISTYCZNE I PROBABILISTYCZNE RÓWNANIA RÓŻNICOWE LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWEJ

Streszczenie. W pracy wprowadzono pojęcie przestrzeni logiki N-wartościowej i zdefiniowano w niej półgrupowe działania. W przestrzeni tej zdefiniowano równanie różnicowe opisujące dynamikę układu cyfrowego działającego w logice wielowartościowej. Pokazano przykład zastosowania równań różnicowych do syntezy automatów pracujących w logice wielowartościowej i sformułowano ogólny algorytm takiej syntezy. Następnie wprowadzono pojęcia stanów probabilistycznych w logice wielowartościowej oraz probabilistycznej przestrzeni logiki wielowartościowej. Zdefiniowano półgrupowe działania w przestrzeni logiki probabilistycznej i wprowadzono pojęcie probabilistycznego równania różnicowego logiki wielowartościowej w postaci normalnej Cauchy'ego. Wykazano, że rozwiązanie takiego równania sprowadza się do rozwiązania sprzężonego równania splotowego cyklicznego w przestrzeni probabilistycznej. Przedyskutowano zagadnienie istnienia rozwiązań takich równań.

1. Równania różnicowe logiki wielowartościowej

W pracach [1, 4, 5, 6] bada się dynamikę układów binarnych, tj. złożonych z elementów, które mogą przyjmować dwa stany 0,1. Trajektorie takich układów otrzymywane są jako rozwiązania binarnych równań różnicowych i przebiegają w przestrzeni:

$$B_2^n = \{x = (x^1,\dots,x^n):\ x^i \quad B_2 = 0,1, \quad i=1,\dots,n\}$$

Binarne równania różnicowe są wygodną i ogólną formą opisu matematycznego dynamiki układów cyfrowych działających według logiki dwuwartościowej ze względu na daleko idące analogie do klasycznych, ciągłych układów dynamicznych.

Ostatnio, w pracach [5 i 6], wprowadzono pojęcie dwuwartościowej logiki "rozmytej", w której stany określone są prawdopodobieństwami. Dynamikę takich układów bada się za pomocą równań różnicowych w przestrzeni rozmytej:

$$B_{R2}^n = \{x = (x^1,\dots,x^n):\quad 0 \leqslant x^i \leqslant 1, \quad i=1,\dots,n\}$$

i stosuje się ją do układów dwustanowych działających w sposób niepewny. Elementy tych układów przyjmują położenia 0 lub 1 z określonym prawdopodobieństwem. Według sformułowania stosowanego w [5] i [6] składowa $x^i \in [0,1]$ wektora stanu x jest równa prawdopodobieństwu tego, że i-ty bit wektora (bajtu) x przyjmuje wartość 1.

Ostatnio wzrasta zainteresowanie logikami wielowartościowymi, w których przy tej samej liczbie elementów pamięci maleje długość słów.

W logice wielowartościowej elementy mogą znajdować się w jednym z N stanów:

$$B_N = \{0,1,\dots,N\}$$

W B_N zdefiniujemy następujące działania

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y, & x+y \in B_N \\ x+y-N, & x+y \notin B_N \end{cases} \qquad \text{dodawania modulo } N$$

$$x \ominus y = \begin{cases} x-y, & x-y \in B_N \\ x-y+N, & x-y \notin B_N \end{cases} \qquad \text{odejmowanie modulo } N$$

$$x \odot y = \begin{cases} xy, & xy \in B_N \\ \mathrm{rest}(xy/N), & xy \notin B_N \end{cases}$$

$$x \otimes y = \min(x,y)$$

Nietrudno udowodnić łączność działań:

$$(x \oplus y) \oplus z \begin{cases} (x+y) \oplus z, \quad x+y \in B_N = \begin{cases} x+y+z, & x+y+z \in B_N \\ x+y+z-N, & x+y+z \notin B_N \end{cases} \\ (x+y-N) \oplus z, \quad x+y \notin B_N = \begin{cases} y+y+z-N, & x+y+z-N \in B_N \\ x+y+z-2N, & x+y+z-N \notin B_N \end{cases} \end{cases} = x \oplus (y \oplus z)$$

Aby udowodnić łączność $\odot$, zauważmy że

$$\mathrm{rest}(xy/N) = xy - pN \in B_N$$

gdzie $p \in Z_+$ (zbiór liczb całkowitych nieujemnych).
Otrzymamy:

$$(x \odot y) \odot z = (xy-pN) \odot z = (xy-pN)z - qN = xyz-(pz+q)N = xyz - sN \in B_N, \quad s \in Z_+$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (yz-pN) = x(yz-pN)-qN = xyz-(xp+q)N = xyz-sN \in B_N, \quad s \in Z_+$$

stąd wynika, że

$$x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$$

Dodawanie i odejmowanie są wzajemnie odwrotne:

$$(x \oplus y) \ominus y \begin{cases} (x+y) \ominus y\ , & x+y \in \mathbf{B}_N \\ (x+y-N) \ominus y, & x+y \notin \mathbf{B}_N \end{cases} = \begin{cases} x\ , & x \in \mathbf{B}_N \\ x+N\ , & x \notin \mathbf{B}_N\ (*) \end{cases} \quad \begin{cases} x-N\ , & x-N \in \mathbf{B}_N (*) \\ x\ , & x-N \in \mathbf{B}_N \end{cases} = x$$

(przypadki oznaczone znakiem (*) są sprzeczne z założeniem: $x \in \mathbf{B}_N$)

Tablice działań w $\mathbf{B}_4$:

$$\begin{array}{c|cccc} x \oplus y & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} x \ominus y & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} x \odot y & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} x \otimes y & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Przestrzeń n-wymiarową logiki N-wartościowej definiujemy:

$$\mathbf{B}_N^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) ; \quad x^i \in \{0, 1, \dots, N-1\} = \mathbf{B}_N, \quad i = 1, \dots, n\}$$

Działania w $\mathbf{B}_N^n$

$$(x \bigcirc y)^i = x^i \bigcirc y^i$$

gdzie $\bigcirc \in \{\oplus, \ominus, \odot, \otimes\}$

Jeżeli $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych, to funkcja

$$\mathbb{Z} \ni t \longrightarrow y(t) \in \mathbf{B}_N^n$$

nazywa się $\mathbf{B}_N^n$ - wartościowym sygnałem, natomiast

$$dy(t) = y(t+1) \ominus y(t) = y^*(t) \ominus y(t) \tag{1}$$

jego różnicą. Jeżeli f jest funkcją typu

$$\mathbf{B}_N^n \times \mathbb{Z} \ni (y, t) \longrightarrow f(y, t) \in \mathbf{B}_N^n$$

to równaniem różnicowym w postaci normalnej nazwiemy równanie

$$dy = f(y, t) \tag{2}$$

gdzie y jest szukaną funkcją (sygnałem). Według sformułowania stosowanego w [6] równanie różnicowe (2) opisuje w $\mathbf{B}_N^n$ parametryczne pole przesunięć, zwane też portretem fazowym.

Podobnie jak w [6], łatwo wykazać, że trajektorię równania (2) w B_N^n określa formuła rekurencyjna:

$$y(t) = y(0) \oplus \bigoplus_{r=0}^{t-1} f(y(r),r) \tag{3}$$

Tak jak w przypadku logiki binarnej, ważnym zagadnieniem jest reprezentacja algebraiczna B_N - wartościowej funkcji zadanej na B_N^n. Jego rozwiązanie umożliwi syntezę układów cyfrowych w logice wielowartościowej. Dla funkcji $B_N \longrightarrow B_N$ zachodzi

$$\frac{(x \ominus 0) \otimes (x \ominus 1) \otimes .. \otimes (x \ominus (N-1))}{(x \ominus u)} = \begin{cases} 1, & x=u \\ 0, & x \neq u \end{cases}$$

gdzie $x \in B_N$, a "kreska ułamkowa" oznacza usunięcie z iloczynu czynnika $(x \ominus u)$. Zatem funkcja $B_N \longrightarrow B_N$ posiada algebraiczną reprezentację

$$f(x) = \bigoplus_{u \in B_N} f(u) \odot \left(\frac{(x \ominus 0) \otimes (x \ominus 1) \otimes ... \otimes (x \ominus (N-1))}{x \ominus u}\right)$$

Reprezentację tę można rozszerzyć na funkcję $f: B_N^n \longrightarrow B_N$

$$f(x^1,...,x^n) = \bigoplus_{(u^1,...,u^n) \in B_N^n} f(u^1,...,u^n) \odot \left(\frac{\bigotimes\limits_{\substack{i \in \{1,...,n\} \\ v \in \{0,1,...,N-1\}}} (x^i \ominus v)}{\bigotimes\limits_{i \in \{1,...,n\}} (x^i \ominus u^i)}\right) \tag{4}$$

Na przykład funkcja $B_3^2 \longrightarrow B_3$ zadana przy pomocy tablicy wartości:

x^1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x^2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$f(x^1,x^2)$	1	0	2	1	2	0	1	1	2

posiada następującą reprezentację algebraiczną:

$$\begin{aligned} f(x^1,x^2) = \; & (x^1 \ominus 1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 2) \\ & \oplus 2 \odot ((x^2 \ominus 1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes x^2 \otimes (x^2 \ominus 1)) \\ & \oplus x^1 \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 2) \\ & \oplus 2 \odot (x^1 \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes x^2 \otimes (x^2 \ominus 2)) \\ & \oplus x^1 \otimes (x^1 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 2) \\ & \oplus x^1 \otimes (x^1 \ominus 1) \otimes x^2 \otimes (x^2 \ominus 2) \\ & \oplus 2 \odot (x^1 \otimes (x^1 \ominus 1) \otimes x^2 \otimes (x^2 \ominus 1)) \end{aligned}$$

Stosując reprezentację (4) do równania różnicowego (2) otrzymuje się formę z wielomianową prawą stroną:

$$dx^i = \bigoplus_{u \in \mathbb{B}_N^n} a^i(u) \odot \left(\frac{\bigotimes\limits_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ v \in \{0,1,\dots,N-1\}}} (x^i \ominus v)}{\bigotimes\limits_{k \in \{1,\dots,n\}} (x^k \ominus u^k)} \right) \qquad i=1,\dots,n \tag{5}$$

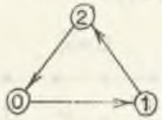
Forma (5) umożliwia prostą syntezę układu cyfrowego o zadanym portrecie fazowym G^f [6] w logice N - wartościowej. Poszczególne kolumny macierzy $[a^i(u)]$ wyznaczamy podstawiają w równaniu (5) $x^i = u^i$:

$$u^{i*} \ominus u^i = a^i(u) \qquad i=1,\dots,n$$

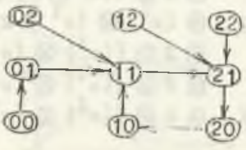
Stąd otrzymuje się wyrażenie na poszczególne kolumny macierzy a:

$$a(u) = u^* \ominus u, \qquad (u,u^*) \in G^f \qquad u \circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\, u^* \tag{6}$$

Jako przykłady przeprowadźmy syntezę automatów: realizującego cykl w B_3 (rys. 1) i cykl graniczny w $\mathbb{B}_3^2$ (rys. 2)



Rys. 1



Rys. 2

Stosując wzór (6) otrzymujemy równanie różnicowe opisujące automat o grafie widocznym na rys. 1:

$$\begin{array}{cccccl} & 0 & & 2 & \longrightarrow u \\ dx = & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & a(u) \\ & \cancel{x \ominus 0} & x \ominus 0 & x \ominus 0 & \\ & x \ominus 1 & \cancel{x \ominus 1} & x \ominus 1 & \\ & x \ominus 2 & x \ominus 2 & \cancel{x \ominus 2} & \end{array}$$

Dla automatu realizującego cykl graniczny w $\mathbb{B}_3^2$:

	0 0	0 1	0 2	1 0	1 1	1 2	2 0	2 1	2 2	$\longrightarrow u$
$dx^1 =$	0	1	1	0	1	1	2	0	0	$a(u)$
$dx^2 =$	1	0	2	1	0	2	0	2	2	
$\odot$	$\cancel{x^1 \ominus 0}$	$\cancel{x^1 \ominus 0}$	$\cancel{x^1 \ominus 0}$	$x^1 \ominus 0$	$x^1 \ominus 0$	$x^1 \ominus 0$	$x^1 \ominus 0$	$x^1 \ominus 0$	$x^1 \ominus 0$	
	$x^1 \ominus 1$	$x^1 \ominus 1$	$x^1 \ominus 1$	$\cancel{x^1 \ominus 1}$	$\cancel{x^1 \ominus 1}$	$\cancel{x^1 \ominus 1}$	$x^1 \ominus 1$	$x^1 \ominus 1$	$x^1 \ominus 1$	
	$x^1 \ominus 2$	$x^1 \ominus 2$	$x^1 \ominus 2$	$x^1 \ominus 2$	$x^1 \ominus 2$	$x^1 \ominus 2$	$\cancel{x^1 \ominus 2}$	$\cancel{x^1 \ominus 2}$	$\cancel{x^1 \ominus 2}$	
$\otimes$	$\cancel{x^2 \ominus 0}$	$x^2 \ominus 0$	$x^2 \ominus 0$	$\cancel{x^2 \ominus 0}$	$x^2 \ominus 0$	$x^2 \ominus 0$	$\cancel{x^2 \ominus 0}$	$x^2 \ominus 0$	$x^2 \ominus 0$	
	$x^2 \ominus 1$	$\cancel{x^2 \ominus 1}$	$x^2 \ominus 1$	$x^2 \ominus 1$	$\cancel{x^2 \ominus 1}$	$x^2 \ominus 1$	$x^2 \ominus 1$	$\cancel{x^2 \ominus 1}$	$x^2 \ominus 1$	
	$x^2 \ominus 2$	$x^2 \ominus 2$	$\cancel{x^2 \ominus 2}$	$x^2 \ominus 2$	$x^2 \ominus 2$	$\cancel{x^2 \ominus 2}$	$x^2 \ominus 2$	$x^2 \ominus 2$	$\cancel{x^2 \ominus 2}$	

albo

$$
\begin{aligned}
dx^1 = \; & (x^1 \ominus 1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 2) \\
& \oplus (x^1 \ominus 1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 1) \\
& \oplus (x^1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 2) \\
& \oplus (x^1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 1) \\
& \oplus 2 \odot ((x^1) \otimes (x^1 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dx^2 = \; & (x^1 \ominus 1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 2) \\
& \oplus 2 \odot ((x^1 \ominus 1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 1)) \\
& \oplus (x^1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2 \ominus 1) \otimes (x^2 \ominus 2) \\
& \oplus 2 \odot ((x^1) \otimes (x^1 \ominus 2) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 1)) \\
& \oplus 2 \odot ((x^1) \otimes (x^1 \ominus 1) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 2)) \\
& \oplus 2 \odot ((x^1) \otimes (x^1 \ominus 1) \otimes (x^2) \otimes (x^2 \ominus 1))
\end{aligned}
$$

2. Wielowartościowa logika rozmyta

Przedstawiona tu teoria jest uogólnieniem ujęcia zaproponowanego w pracy [6]. Stan rozmyty określony jest przez N składowych, i-ta składowa równa się prawdopodobieństwu przyjęcia stanu $i \in \mathbf{B}_N$. Zapiszemy to w postaci:

$$\mathbf{B}_N \ni \tilde{x} \longrightarrow x = (x_0, x_1, \dots x_{N-1}) : \quad x_i = \mathrm{Prob}(\tilde{x} = i)$$

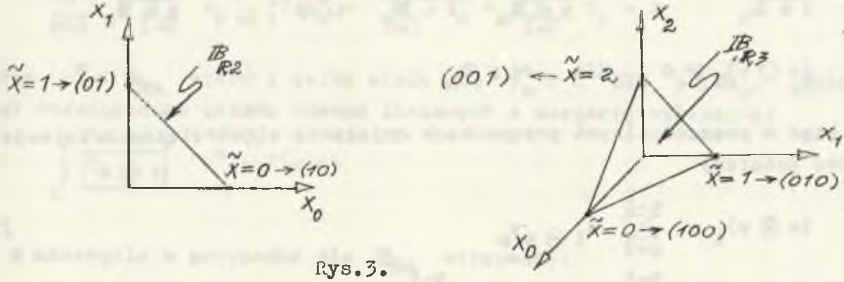
przy czym musi zachodzić warunek

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i = 1$$

Zbiór wszystkich elementów x nazwiemy rozmytą (probabilistyczną) przestrzenią logiki wielowartościowej i oznaczymy ją $\mathbf{B}_{RN}$:

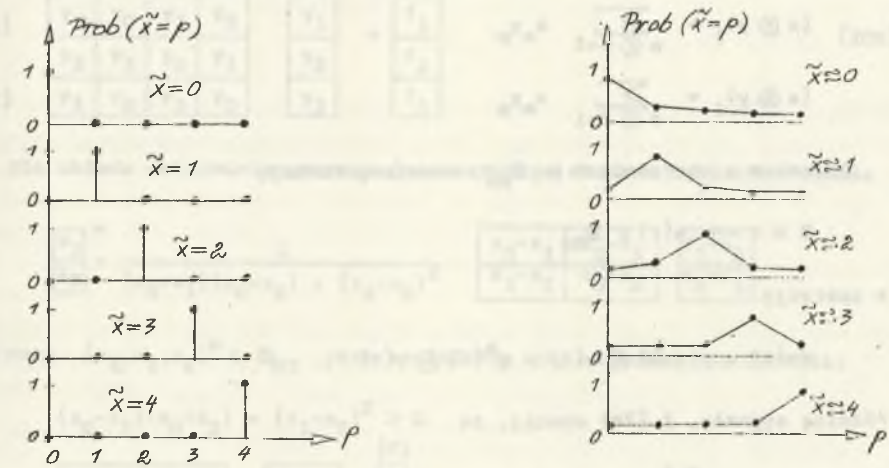
$$B_{RN} = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \ : \ x_i \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{N-1} x_i = 1 \right\}$$

Interpretację geometryczną przestrzeni B_{RN} pokazano na rys. 3. Natomiast rys. 4 podaje binarną interpretację elementów przestrzeni rozmytej logiki wielowartościowej.



Rys.3.

Rys. 3



Stany pewne ("ostre") Stany "rozmyte"

Rys. 4

Działania algebraiczne w B_{RN} zdefiniujemy:

$$(x \bigcirc y)_i = Prob(\tilde{x} \bigcirc \tilde{y} = i) \qquad i \in B_N , \quad x \in B_{RN}, \quad y \in B_{RN}$$

Stąd otrzymamy splot:

$$(x \bigcirc y)_i = \sum_{m \bigcirc p = i} x_m y_p = \sum_{p \in B_N} x_{i \bigcirc p^{-1}} y_p \tag{7}$$

Działania te są wewnętrzne, gdyż:

$$\sum_{i \in B_N} (x \bigcirc y)_i = \sum_{p \in B_N} \Big(\sum_{i \in B_N} x_{i \bigcirc p^{-1}} \Big) y_p = \sum_{p \in B_N} y_p = 1,$$

$$(x \bigcirc y)_i \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad i \in B_N$$

Tak więc w poszczególnych przypadkach działania algebraiczne przyjmują postać splotów:

$$(x \oplus y)_i = \sum_{p=0}^{N-1} x_{i \ominus p} y_p \tag{7a}$$

$$(x \ominus y)_i = \sum_{m=0}^{N-1} x_{i \oplus m} y_m = \sum_{p=0}^{N-1} x_p y_{p \ominus i} \tag{7b}$$

$$(x \odot y)_i = \sum_{m \odot p = i} x_m y_p \tag{7c}$$

$$(x \otimes y)_i = \sum_{m \otimes p = i} x_m y_p \tag{7d}$$

Sygnałem o wartościach w B_{RN} nazwiemy funkcję

$$\mathbf{Z} \ni t \longrightarrow y(t) \in B_{RN}$$

a operację

$$dy(t) = y(t+1) \ominus y(t) = y^{*}(t) \ominus y(t)$$

różnicą sygnału. Z (7b) wynika, że

$$(dy)_i = \sum_{p=0}^{N-1} y_{p \ominus i} y^{*}_p \tag{8}$$

Równaniem różnicowym w B_{RN} nazwiemy

$$dy = f(y,t) \tag{9}$$

gdzie

$$B_{RN} \times \mathbf{Z} \ni (y,t) \longrightarrow f(y,t) \in B_{RN}$$

Zgodnie z wyrażeniem (8) równanie różnicowe przyjmuje postać równania splotowego - cyklicznego:

$$\sum_{p=0}^{N-1} y_{p \ominus i} y_p^{*} = f_i(y,t) \qquad i \in \mathbf{B}_N = \{0,1,\dots,N-1\} \tag{10}$$

Sumując równanie (10) stronami po i, otrzymamy

$$\sum_{p=0}^{N-1} \Big(\sum_{i=0}^{N-1} y_{p \ominus i} \Big) y_p^{*} = \sum_{i=0}^{N-1} y_p^{*} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i = 1$$

zatem $y^* \in \mathbf{B}_{RN}$ wtedy i tylko wtedy gdy $y_p^* \geqslant 0$ dla $p \in \mathbf{B}_N$, gdzie y^* jest rozwiązaniem układu równań liniowych z macierzą cykliczną:

$$\begin{array}{c|c} & \xrightarrow{\quad p \quad} \\ \big\downarrow i & \boxed{y_{p \ominus i}} \end{array} \; y^* = f(y,t) \tag{10a}$$

W szczególn a przypadku dla $\mathbf{B}_{R4}$ otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \tag{10b}$$

Dla układu deterministycznego (nierozmytego) macierz cykliczna układu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{*} = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) + (x_1-x_2)^2} \begin{bmatrix} x_0-x_1 & x_2-x_1 \\ x_1-x_2 & x_0-x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1-x_2 \\ f_2-x_1 \end{bmatrix}$$

Warunek $(x_0,x_1,x_2)^* \in \mathbf{B}_{R3}$ jest spełniony, gdy zachodzą nierówności:

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2) + (x_1-x_2)^2 > 0$$
$$(<)$$

$$\begin{bmatrix} x_0-x_1 & x_2-x_1 \\ x_1-x_2 & x_0-x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1-x_2 \\ f_2-x_1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$(\leqslant)$$

$$\begin{bmatrix} x_0-x_2 & x_0-x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1-x_2 \\ f_2-x_1 \end{bmatrix} \leqslant (x_0-x_1)(x_0-x_2) + (x_1-x_2)^2$$
$$(\geqslant)$$

Aby sformułować pewne ogólne twierdzenie dotyczące istnienia w $\mathbf{B}_{RN}$ rozwiązania równania (10), posłużymy się metodą perturbacyjną. W tym celu zapiszemy równanie (10) w postaci:

$$P(I - C(y))\, y^{*} = f(y,t)$$

gdzie P jest jedną z potęg macierzy przesunięcia cyklicznego. Niech $y^{0} \in B_{N}$. Z twierdzeń algebry Banacha o istnieniu odwrotności elementów [7] wynika, że zawsze można znaleźć ϵ - otoczenie punktu y^{0} : $K(\mathcal{E},y^{0})$ takie, że dla dowolnego $y \in K(\mathcal{E},y^{0})$, y^{*} należy do $\mathbf{B}_{RN}$, a więc równanie różnicowe w otoczeniu $K(\mathcal{E},y^{0})$ opisuje pole przesunięć (zgodnie ze sformułowaniem używanym w [6] w zastosowaniu do rozmytej logiki binarnej).

W zastosowaniach do bardziej złożonych układów trzeba wprowadzić przestrzeń "rozmytą" $\mathbf{B}_{RN}^{n}$ n-wymiarową w logice N-wartościowej, którą określimy jako produkt kartezjański $\mathbf{B}_{RN}$:

$$\mathbf{B}_{RN}^{n} = \left\{(x^{1},\ldots,x^{n}) = ((x_{0}^{1},x_{1}^{1},\ldots,x_{N-1}^{1}),\ldots,(x_{0}^{n},x_{1}^{n},\ldots,x_{N-1}^{n}) : x^{i} \in \mathbf{B}_{RN}\right\}$$

a działania algebraiczne w B_{RN}^{n} zdefiniujemy tak, aby

$$(x \bigcirc y)^{i} = x^{i} \bigcirc y^{i} \qquad i=1,\ldots,n$$

gdzie $x \in \mathbf{B}_{RN}$, $y \in \mathbf{B}_{RN}^{n}$.

Uzyskane dla przestrzeni $\mathbf{B}_{RN}$ wyniki o równaniach różnicowych można łatwo rozszerzyć na $\mathbf{B}_{RN}^{n}$.

LITERATURA

[1] Bochman D., Posthoff Ch.: Binarne dinamische Systeme. Ak. Ver. 1981.

[2] Jabłonskij S.W., Łupanow O.B.: Diskretnaja matiematika, Nauka, 1977.

[3] Malcew A.I.: Algebraiczeskije sistiemy. Nauka, Moskwa, 1970.

[4] Siwczyński M.: Podstawy matematyczne nowej koncepcji przetwarzania sygnałów cyfrowych. Arch. Elektrot. z. 1.2/88.

[5] Siwczyński M.: Deterministyczne i probabilistyczne binarne równania różnicowe SPETO 1988.

[6] Siwczyński M.: Deterministyczne i probabilistyczne binarne równania różnicowe. Monogr.45 Zielona Góra 1988.

[7] Siwczyński M.: Zastosowanie algebr Banacha... Monogr. Elektr.81, Gliwice 1982.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do Redakcji dnia 2 listopada 1989 r.

ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ
УРАВНЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Р е з ю м е

В работе введено понятие пространства N - значной логики и в ней определены полугрупповые алгебраические операции. В таком пространстве с помощью специального типа разностных уравнений описана динамика цифровой системы, действующая на базе многозначной логики. Дальше, введены понятия вероятностных состояний многозначной логики и понятие вероятностного прострaства многозначной логики. В ней можно определить полугрупповые обобщённые алгебраические операции и описать поведение вероятностной цифровой системы с помощью обобщённого разностного уравнения. Показано, что такое уравнение сводится к уравнению типа циклической свёртки. Сформулированы некоторые условия решения такого уравнения.

DETERMINATE AND PROBABILISTIC DIFFERENCE
EQUATIONS IN MULTI - VALUE LOGIC

S u m m a r y

In the paper the N-value logic space has been introduced, and algebraic semigroup operations in this space have been defined. In the logic space the difference equation in normal Cauchy form have been de fined too. The equation describes dynamic behaviour of digital system in multi - value logic. Then the notion of probabilistic states and probabilistic space of N-valued logic have been introduced. The semigroup operations in probabilistic space, and the notion of N-value logic difference equation in Cauchy form in probabilistic space have also been introduced. The been solutions of this probabilistic difference logic equation have been investigated.