

Andrzej DRYGAJŁO

Instytut Elektroniki  
Politechniki Śląskiej

BANKI FILTRÓW WYKORZYSTUJĄCE  
SZYBKIE TRANSFORMACJE HADAMARDA-HAARA

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodę generowania modułowych struktur drzew  $N$ -punktowych transformacji Hadamarda-Haara (HHT) o złożoności obliczeniowej od  $2(N-1)$  do  $N \log_2 N - N/2$  operacji dodawania i odejmowania. W oparciu o strukturę drzewa HHT wykorzystującego opóźnienia zbudowano analizujące i syntezyzujące motylkowe banki filtrów stosując technikę eliminacji operacji motylkowych. Pozwoliło to na otrzymanie banków filtrów o zadanej liczbie kanałów. Wyodróżniono filtry komplementarne i filtry subpasmoste o ważonych kanałach oraz podano ich opis częstotliwościowy i sekwencyjnościowy.

### 1. Wprowadzenie

Praktyczna przydatność dyskretnych transformacji, przede wszystkim dla potrzeb cyfrowego przetwarzania sygnałów, jest uwarunkowana możliwością budowy skutecznych algorytmów obliczeniowych do wyznaczenia prostych i odwrotnych transform. Oprócz złożoności obliczeniowej coraz częściej rozpatrywane są modułowość, możliwość bieżącego wykonywania algorytmów szybkich transformacji oraz właściwości filtracyjne transformacji pozwalające na wykorzystanie ich w wielokanałowym przetwarzaniu sygnałów za pomocą banków filtrów. Struktury drzew zapewniające modułowość, bieżącą realizację oraz filtrację wielokanałową można złożyć ze struktur prostych filtrów cyfrowych. Podejście to, wykorzystane w przypadku algorytmów szybkich transformacji Fouriera (FFT) i Walsh (FWT), oparte jest na faktoryzacji wielomianów [1], [2], [3].

W niniejszej pracy zastosowano podejście wielomianowe w celu przekształcenia algorytmów szybkich transformacji Hadamarda-Haara w banki filtrów. Rezultatem są motylkowe banki filtrów o strukturze drzewa służące do filtracji subpasmostej. Technika eliminacji operacji motylkowych prowadzi w tym przypadku do zmiany liczby kanałów banku filtrów oraz do zmiany tłumienia poszczególnych składowych subpasmostych. Tym samym uzyskuje się

ogólniejszą klasę filtrów motylkowych [4] łączących cechy filtrów transformacyjnych i subpasmych.

## 2. Dwukanałowy motylkowy bank filtrów

Podstawowe modułowe struktury drzew algorytmów prostej szybkiej transformacji Hadamarda (FHT) [3] składają się z elementów, których transmittancje dla  $N=2$  mogą być opisane następującym równaniem macierzowym

$$\begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

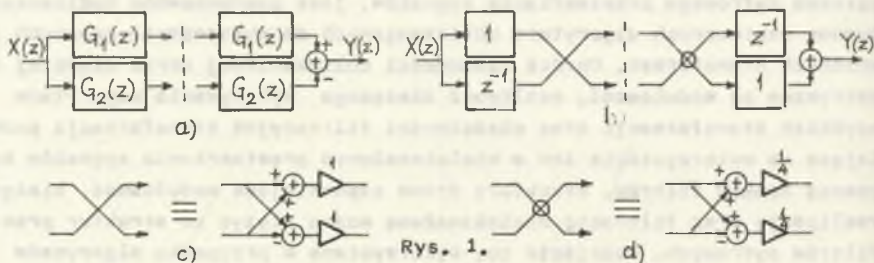
Z kolei odwrotną transformację IFHT dla  $N=2$  opisuje zależność

$$\begin{bmatrix} G'_1(z) & G'_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Połączenie kaskadowe prostej i odwrotnej transformacji daje dwukanałowy bank filtrów o transmitancji

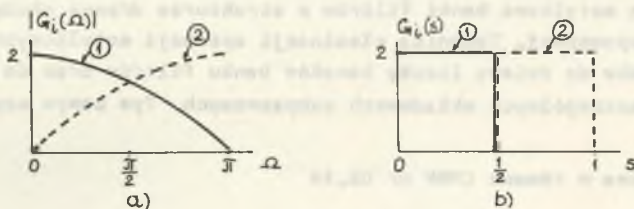
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \begin{bmatrix} G'_1(z) & G'_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = 1 \cdot z^{-1} \quad (3)$$

W tak opisanej strukturze podanej na rys. 1 a) i b) można wyróżnić operacje motylkowe składające się z operacji dodawania, odejmowania i skalowania (rys. 1 c i d).



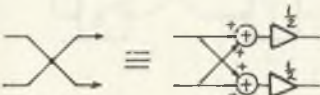
Rys. 1.

Odpowiedzi częstotliwościowe  $G_1(\Omega)$ ,  $G_2(\Omega)$  i sekwencyjnościowe  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  opisujące poszczególne kanały banku filtrów z rys. 1 przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

Z prezentowanej analizy wynika, że dwukanałowy motylkowy bank filtrów jest cyfrowym filtrem wszechprzepustowym składającym się z pary prostych filtrów: dolnoprzepustowego i górnoprzepustowego. Można również zauważyć, że poprzez zastąpienie operacji motylkowych z rys. 1 c i d przez operację z rys. 3 uzyskuje się komplementarny bank filtrów [5] spełniający następujące zależności:



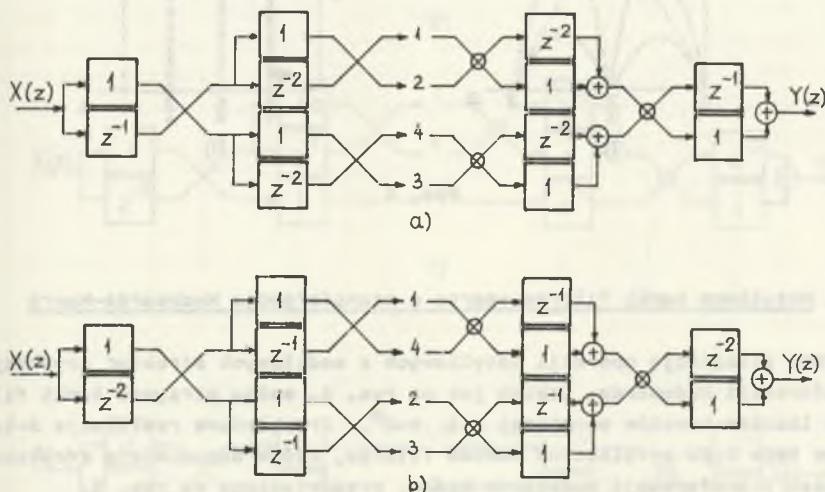
$$|G_1(\Omega) + G_2(\Omega)| = 1 \quad (4)$$

$$|G_1(\Omega)|^2 + |G_2(\Omega)|^2 = 1 \quad (5)$$

Rys. 3

### 3. N-kanałowy bank filtrów wykorzystujący transformację Hadamarda

N-kanałowy motylkowy bank filtrów dla  $N > 2$ ,  $N=2^p$ ,  $p=2,3,\dots$ , można zbudować opierając się na modułowym podejściu do algorytmów szybkiej transformacji Hadamarda [3]. Dla  $N=4$  przykładowe możliwe dwie struktury przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

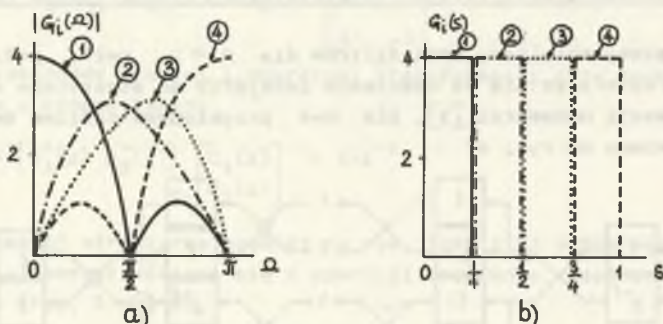
Odpowiedzi częstotliwościowe i sekwencyjne poszczególnych kanałów mogą być wyrażone w zależności od kombinacji odpowiedzi par prostych filtrów cyfrowych o postaci  $1 \pm z^1$  (rys. 4a) i  $1 \pm z^{p-1+1}$  (rys. 4b) występujących w poszczególnych gałęziach struktury drzewa odpowiadających i-ty

etapom przetwarzania dla algorytmów szybkich transformacji. Dla  $N=4$  transmitancję banku filtrów oraz transmitancje dla poszczególnych kanałów wyrażają zależności:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \\ G_3(z) \\ G_4(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

a odpowiadające im odpowiedzi częstotliwościowe i sekwencyjne przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

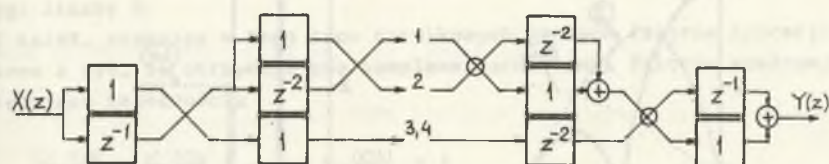
#### 4. Motylkowe banki filtrów oparte o transformację Hadamarda-Haarsa

Przez eliminację operacji motylkowych z modułowych struktur szybkiej transformacji Hadamarda, takich jak na rys. 4, można otrzymać banki filtrów o liczbie kanałów mniejszej niż  $N=2^P$ . Przykładowe realizacje 3-kanałowe tego typu motylkowych banków filtrów, które odpowiadają strukturze szybkiej transformacji Hadamarda-Haarsa, przedstawiono na rys. 6.

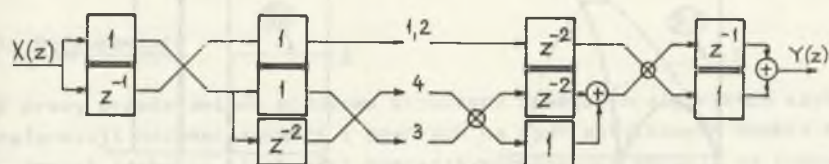
Odpowiedzi częstotliwościowe i sekwencyjne charakteryzujące poszczególne kanały zilustrowano na rys. 7.

Transmitancje opisujące poszczególne kanały można wyrazić jako kombinacje liniowe transmitancji danych wzorem (7). Przykładowo dla struktury z rys. 6a)  $G_1''(z) = G_1(z)$ ,  $G_2''(z) = G_2(z)$ ,  $G_3''(z) = G_3(z) + G_4(z)$ . Transmitancja banku filtrów wyrażona wzorem (6) pozostaje bez zmian.

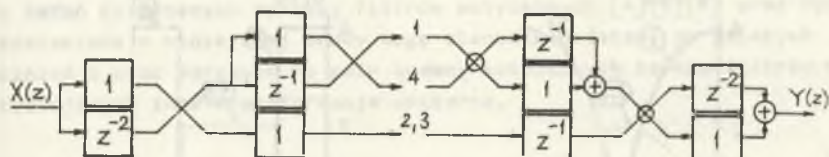




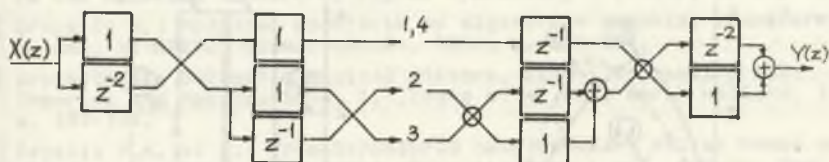
a)



b)

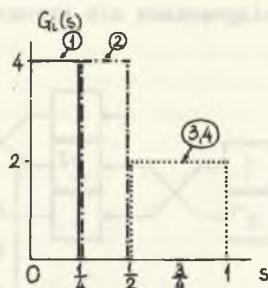
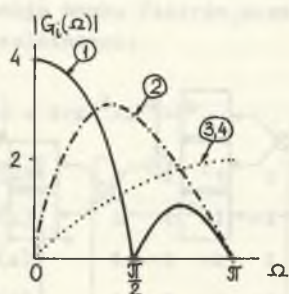


c)

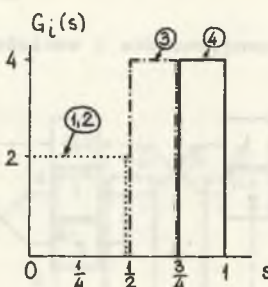
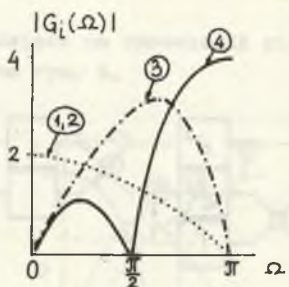


d)

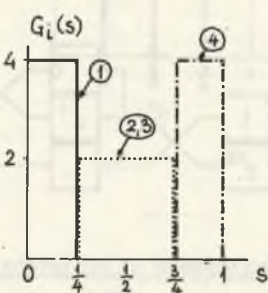
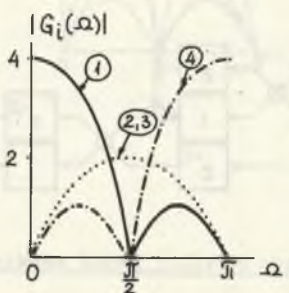
Rys. 6



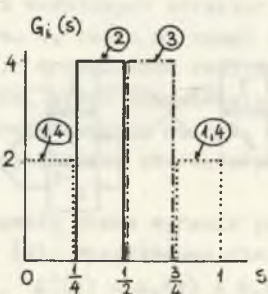
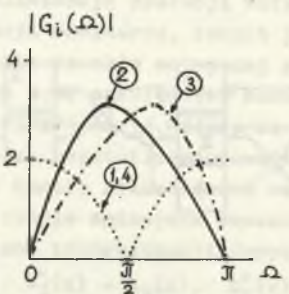
a)



b)



c)



d)

Z przedstawionych przykładów wynika, że wykorzystując modułowe struktury algorytmów szybkich transformacji Hadamarda-Haara można budować banki filtrów o zadanej liczbie ważonych kanałów, gdzie wagami są całkowite potęgi liczby 2.

Z kolei, stosując w tego typu motylkowych bankach filtrów operacje motylkowe z rys. 3, otrzymuje się komplementarne banki filtrów spełniające następujące zależności:

$$|G_1(\Omega) + G_2(\Omega) + \dots + G_M(\Omega)| = 1 \quad (8)$$

$$|G_1(\Omega)|^2 + |G_2(\Omega)|^2 + \dots + |G_M(\Omega)|^2 = 1 \quad (9)$$

gdzie  $M \leq N=2^P$ .

## 5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono modułowe struktury bieżących algorytmów szybkich transformacji Hadamarda-Haara i opartych na nich motylkowych banków filtrów. Prosta technika eliminacji operacji motylkowych pozwala na budowanie banków filtrów o zadanej liczbie kanałów. Tego typu banki filtrów mogą mieć kanały ważne lub być bankami komplementarnymi. Dotychczasowe rezultaty badań dotyczących syntezy filtrów motylkowych [4][6][7] oraz wyniki przedstawione w niniejszej pracy mogą stanowić podstawę do dalszych uogólnień i prac mających na celu budowę motylkowych banków filtrów wykorzystujących inne transformacje unitarne.

## LITERATURA

- [1] Bruun G.: z-Transform DFT Filters and FFT's. IEEE Trans., vol. ASSP-26, Feb. 1978, s. 56-63.
- [2] Vetterli M.: Tree Structures for Orthogonal Transforms and Application to the Hadamard Transform. Signal Processing 5 (1983), s. 473-484.
- [3] Drygajło A.: Modułowe podejście do algorytmów szybkiej transformacji Walsha. XI SPETO, Gliwice-Wisła, 1988, s. 129-134.
- [4] Drygajło A.: Butterfly Digital Filters. Signal Processing III: Theories and Applications, I.T.Young et al ed., North Holland, 1986, s. 191-194.
- [5] Regalia P.A. et al: Tree-Structured Complementary Filter Banks Using All-Pass Sections. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-34, Dec. 1987.
- [6] Drygajło A.: An Application of the Fast Hartley Transform to Digital Signal Filtering. Proc. ECCTD-87, Paris, Sept. 1987, s. 263-268.

- [7] Drygajło A.: Butterfly Slant Filters. Signal Processing IV: Theories and Applications, J.L.Lacoume et al ed., North Holland, 1988, s. 1497-1500.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 20 kwietnia 1989 r.

БАНКИ ФИЛЬТРОВ ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ БЫСТРЫЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАДАМАРА-ХААРА

Р е з ю м е

В работе представлен метод генерации модульных структур деревьев для  $N$ -точек преобразований Хадамара-Хаара (ННТ), которые требуют выполнения от  $2N-1$  до  $N\log_2 N - N/2$  операций сложения и вычитания. На базе структуры дерева ННТ использующего задержки временных выборок построены анализирующие и синтезирующие банки фильтров с применением техники не требующей баттерфляйных операций. Предложенный метод даёт банки фильтров о заданном числе каналов. Для выделенных комплементарных и субполосовых фильтров с взвешиваемыми каналами представлено частотное и последовательное их описание.

FILTER BANKS USING  
FAST HADAMARD-HAAR TRANSFORMS

S u m m a r y

In the paper a method of generating modular tree structures of  $N$ -point Hadamard-Haar transforms (HNT) of complexity  $N\log_2 N - N/2$  or less up to  $2(N-1)$  additions/subtractions is presented. Simple technique of elimination of butterfly operations from delay tree-structure of HNT has been developed to achieve analysis and synthesis filter banks. It has allowed to obtain butterfly filter banks with assigned number of channels. Complementary and sub-band filters with weighted channels have been distinguished and described in frequency and sequential domains.