ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 117 1061

Zygmunt GARCZARCZYK

Instytut Elektrotechniki
Teoretycznej i Przemysłowej
Politechniki Śląskiej

PREDYKCYJNO-KOREKCYJNA METODA ANALIZY NIELINIOWYCH OBWODÓW REZYSTANCYJNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono zbieżny globalnie algorytm rozwiązywania równań opisujących nieliniowy obwód rezystancyjny. Algorytm ten dotyczy zmodyfikowanych homotopijnie równań węzłowych lub hybrydowych obwodu nieliniowego. Należy on do klasy metod predykcyjno-korekcyjnych i opiera się na modyfikacji predyktora Eulera, a w fazie korekcji rozwiązania na algorytmie Newtona. Pozwala on na adaptacyjny dobór parametru homotopii zmodyfikowanych równań, co zapewnia zmniejszenie nakładu obliczeniowego. Użyteczność przedstawionego algorytmu pokazano rozwiązując numerycznie wybrany obwód nieliniowy.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono algorytm pozwalający na efektywne rozwiązanie równań opisujących nieliniowy obwód rezystancyjny. Równania te mogą mieć postać równań węzłowych

$$F(x) = Ag(A^t x + E) - AJ = 0, \tag{1}$$

ogólniejszych równań hybrydowych

$$F(x) = f(x) - Ax - b = 0 \tag{2a}$$

lub

$$F(x) = A_1 f(x) - A_2 x - b = 0 \tag{2b}$$

czy też najbardziej ogólnych równań tablicowych.

$$F(x) = F(u,i,v) = \begin{pmatrix} Ai \\ u - A^t v \\ h(u,i) \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

gdzie dla równań (1) i (2) $x \in R^n$ jest nieznanym wektorem potencjałów węzłowych lub wektorem prądów i napięć rezystorów nieliniowych, u, i, v - wektory napięć i prądów gałęziowych oraz potencjałów węzłowych, $h(u,i)$ - równania gałęziowe, $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ są wektorami charakterystyk elementów nieliniowych, a pozostałe wielkości reprezentują strukturę obwodu i źródła wymuszające [2], [3].

Skuteczne rozwiązanie równań (1) - (3) wybraną metodą iteracyjną wiąże się z wyborem punktu startowego Wykorzystanie idei metody kontynuacji daje systematyczną metodę wyboru punktu startowego. W metodzie kontynuacji zamiast funkcji $F(x): D \longrightarrow R^n$, gdzie $D \subset R^n$, rozważa się szczególną funkcję $H(x,t): D \times T \longrightarrow R^n$, gdzie $T = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, zwaną homotopią, tzn.

$$\begin{aligned} &H(x(t),t) = 0, \qquad x \in D, \qquad t \in T \\ &H(x,0) = E(x), \quad H(x,1) = F(x) \quad \forall x \in D \end{aligned} \tag{4}$$

przy tym rozwiązaniu $x^o = x(0)$ równania $E(x) = 0$ będące punktem startowym jest znane lub łatwo je uzyskać.

Rozwiązania $x(t)$ wyznaczane dla t rosnącego tworzą ścieżkę (krzywą) w przestrzeni R^n łączącą punkt $x(0)$ z poszukiwanym rozwiązaniem $x^* = x(1)$ równania (1) - (3) [1].

Istnieją różne sposoby konstruowania odwzorowania $H(x,t)$ dla danego równania $F(x) = 0$ (por. [4], [5]). Z twierdzenia o funkcji uwikłanej [1] wynika, że ścieżka homotopii istnieje,jeśli odwzorowanie H jest regularne, tzn. macierz Jacobiego $DH(x,t)$ ma maksymalny rząd dla każdego $(x,t) \in H^{-1}$, gdzie $H^{-1} = \{(x,t) \mid H(x,t) = 0\}$ oznacza zbiór wszystkich rozwiązań $(x,t) \in R^n$ układu (4). Ścieżkę homotopii łączącą wybrany punkt początkowy x^o z punktem końcowym $x^* = x(1)$ można wyznaczać punkt po punkcie przyjmując ciągłe lub dyskretne zmiany parametru t. Poszukując rozwiązania równania $F(x) = 0$ dążymy przede wszystkim do uzyskania punktu $x(1)$ możliwie jak najszybciej, nie zależy nam natomiast na dokładnym wyznaczaniu ścieżki homotopii. Zakładając dyskretne zmiany parametru t przyjmuje się pewien podział odcinka T:

$$0 = t_o < t_1 \ldots < t_N = 1 \tag{5}$$

i poszukuje się rozwiązań równań

$$H(x,t_k) = 0, \quad k = 1,2,\ldots N \tag{6}$$

lokalnie zbieżną metodą iteracyjną (na ogół metodą Newtona) przyjmując pewne przybliżenie początkowe $x^o(t_k)$. To przybliżenie początkowe jest predyktorem punktu $x(t_k)$ na ścieżce homotopii, metoda iteracyjna służy jako korektor dla znalezienia tego punktu. Rozwiązanie ciągu równań (6) będzie zbieżne do rozwiązania równania $F(x) = 0$, jeżeli długość kroku

$$\bar{t}_k = t_{k+1} - t_k, \qquad k = 0,1,\dots,N-1 \tag{7}$$

będzie odpowiednio dobrana. Powinna ona być tak duża, by zapewniała minimalny czas obliczeń konieczny do uzyskania rozwiązania x^*, a jednocześnie taka, by zapewnić zbieżność korektora do punktu na ścieżce homotopii, gdyż poruszanie się po ścieżce homotopii zapewnia uzyskanie rozwiązania x^* [1]. Przedstawiony algorytm opiera się na modyfikacji predyktora Eulera [7]. Predyktor Eulera jest chętnie stosowany, ze względu na jego prostotę. Jednakże, ze względu na to, że wyznacza on punkt $x^o(t_k)$ w kierunku stycznym do ścieżki homotopii, to korekotr taki, jak metoda Newtona, może być rozbieżny, jeśli krok $\bar{t}_k$ będzie duży. Z tego względu stosując predyktor Eulera, przyjmuje się mały krok $\bar{t}_k$, co oczywiście wydłuża proces obliczeniowy. W algorytmie pokazano, że możliwe jest przyspieszenie tego procesu, jeśli predyktor nie leży na kierunku stycznym, a na pewnej krzywej leżącej bliżej ścieżki homotopii. Pozwala to maksymalizować wartości kroku $\bar{t}_k$ przy zachowaniu warunków zbieżności dla korektora.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że odwzorowania H utworzone dla równań (1) - (3) jest regularne. Oznacza to, że analiza dotyczy obwodów nieliniowych z rezystorami o charakterystykach ściśle monotonicznych.

2. Metoda prodyktor - korektor i dobór kroku

Wprowadzimy oznaczenia

$$w = (x,t) \tag{8}$$

Obliczenia rozpoczynają się w punkcie $w^o = (x^o, 0)$. Rozwiązanie x^o jest wyznaczane przez rozwiązanie pewnego obwodu liniowego stowarzyszonego z analizowanym obwodem nieliniowym (por. [4], [5]).

Dla danego punktu w^k na ścieżce homotopii k-ta iteracja przebiega następująco [9]: najpierw wyznacza się wektor d^k styczny do krzywej w punkcie w^k rozwiązując układ n+1 równań [7]:

$$\begin{aligned} &DH(w^k)d^k = 0 \\ &\|d^k\| = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie DH oznacza macierz Jacobiego układu (4), a $\|\cdot\|$ jest normą Euklidesową. Ponieważ układ (9) ma dwa rozwiązania bieżące w przeciwnych kierunkach [8], wybiera się wektor d^k tak, aby $(d^{k-1})^t d^k > 0$,

gdzie t oznacza transpozycję. Dla $k=0$, wybiera się wektor d^o tak, by $d^o_{n+1} > 0$, gdzie d^o_{n+1} oznacza $(n+1)$-szą składową wektora d^o - chodzi o to, by poruszać się w kierunku wzrostu parametr t.
Mając wektor d^k tworzy się predyktor

$$y^k = w^k + v^k, \quad v^k = \delta_k \, d^k \tag{10}$$

gdzie $\delta_k > 0$, $\delta_o = 1$. Wektor (10) wyznacza predyktor wstępny, tzw. predyktor Eulera.
Rozważmy teraz równanie

$$G(w) = \begin{pmatrix} H(w) \\ (d^k)^t \, (w-y^k) \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

Rozwiązaniu równania (9) odpowiada punkt przecięcia ścieżki homotopii z hiperpłaszczyzną prostopadłą do wektora d^k (rys. 1). Nas jednak ten punkt nie interesuje, chcemy natomiast wyznaczyć punkt na hiperpłaszczyźnie leżący bliżej ścieżki homotopii. W tym celu stosujemy jedną iterację metody Newtona do układu (11) z punktem startowym y^k i uzyskujemy nowy punkt $y^k + z^k$, gdzie

$$z^k = - \begin{bmatrix} DH(y^k) \\ (d^k)^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H(y^k) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Jeżeli punkt y^k był blisko ścieżki homotopii, to można oczekiwać, że punkt $y^k + z^k$ będzie jeszcze bliżej. Aby ustalić, czy tak jest, bada się iloraz $\| H(y^k+z^k)\| / \| H(y^k)\|$ jako miarę zbliżenia do ścieżki homotopii.

Rys. 1. Konstrukcja predyktora $(n=1)$
Fig. 1. Construction of the predictor $(n=1)$

Jeżeli nierówność

$$\| H(y^k + z^k) \| / \| H(y^k) \| < \beta < 1 \tag{13}$$

nie jest spełniona, to znaczy, że predyktor y^k jest zbyt daleko od krzywej. W tym przypadku przyjmuje się $\delta_k = 0{,}5\ \delta_k$ i wraca do formuły (10). Jeżeli zachodzi nierówność (13), to konstruuje się nowy predyktor

$$s^k = w^k + \tau_k v^k + \tau_k^2 z^k \tag{14}$$

gdzie τ_k wyznacza się następująco:
jeśli

$$\| H(y^k + z^k) \| / \| H(y^k) \| < \gamma < 1 \tag{15}$$

to $\tau_k = 2\,\tau_{k-1}$. W przeciwnym przypadku $\tau_k = \tau_{k-1}$ $(\tau_o = 1)$. Predyktor s^k pokazano na rys. 1.

Na etapie korekcji rozwiązujemy więc układ równań:

$$\hat{H}(w) = \begin{pmatrix} H(w) \\ (d^k)^t (w - s^k) \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Stosując metodę Newtona z punktem startowym s^k otrzymuje się ciąg:

$$w_{l+1}^k = w_l^k - \begin{bmatrix} DH(w_l^k) \\ (d^k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H(w_l^k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

$$w_o^k = s^k.$$

Jeżeli dla pewnej wartości $l = L$ (np. $L = 5$) nie zachodzi

$$\| H(w_L^k) \| < \varepsilon \tag{18}$$

tzn. algorytm Newtona nie jest zbieżny, zmniejsza się wartość parametru τ_k lub δ_k i powtarza proces formowania predyktora s^k. W szczególności jeśli $\tau_k > 1$ to przyjmuje się $\tau_k = 0{,}5\ \tau_k$ i określa punkt predykcji zgodnie ze wzorem (14). Jeśli $\tau_k = 1$ to przyjmuje się $\delta_k = 0{,}5\ \delta_k$ i powraca do formuły (10) dla wektora y^k.

Z drugiej strony, jeśli algorytm Newtona jest zbieżny do rozwiązania układu (16), to po spełnieniu warunku (18) uzyskany wynik przyjmuje się jako w^{k+1} i przechodzi się do następnej iteracji, ustalając jednocześnie wartość parametru δ_{k+1} według następującej reguły:

jeśli spełniona jest nierówność

$$\|H(y^k + z^k)\| / \|H(y^k)\| \leq \alpha < \beta < 1 \qquad (19)$$

to $\delta_{k+1} = 2\,\delta_k$. W przeciwnym przypadku $\delta_{k+1} = \delta_k$.

Opisana procedura jest kontynuowana do momentu osiągnięcia wektora $w^k = (x^k, 1)$. Poszukiwane rozwiązanie równań (1) - (3) jest równe $x^* = x^k$.

Podsumowując powyższe rozważania można przedstawić następującą metodę predykcyjno-korekcyjną rozwiązania równania $H(x,t) = 0$:

Krok 0. Dobrać $w^0 = (x^0, t_0) = (x^0, 0)$, $0 < \alpha < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$
$\delta_0 > 0$, $\tau_0 = 1$, liczbę całkowitą dodatnią L, ε

Krok 1. Obliczyć wektor d^k z równania (9).

Krok 2. Podstawić $y^k = w^k + \delta_k\, d^k$ i obliczyć z^k według wzoru (12).

Krok 3. Jeżeli nierówność (13) nie zachodzi, to $\delta_k = 0{,}5\,\delta_k$ i przejść do Kroku 2.

Krok 4. Jeżeli nierówność (15) zachodzi to $\tau_k = 2\,\tau_k$.

Krok 5. Utworzyć wektor $s^k = w^k + \tau_k\, v^k + (\tau_k)^2\, z^k$.

Krok 6. Utworzyć ciąg w^k_{l+1} zgodnie ze wzorem (17). Jeśli zachodzi warunek (18), to $w^k_L = w^{k+1}$ i przejść do Kroku 7.
Jeśli warunek (18) nie jest spełniony, to:
dla $\tau_k > 1$ przyjąć $\tau_k = 0{,}5\,\tau_k$ i przejść do Kroku 5,
dla $\tau_k = 1$ przyjąć $\delta_k = 0{,}5\,\delta_k$ i przejść do Kroku 2.

Krok 7. Jeżeli dla $k+1 = N$ zachodzi $w^{k+1}_{n+1} = t_{k+1} = t_N \geq 1$ to zakończyć.

Krok 8. Podstawić $\tau_{k+1} = \tau_k$. Jeżeli zachodzi nierówność (19), to $\delta_{k+1} = 2\,\delta_k$, w przeciwnym przypadku $\delta_{k+1} = \delta_k$. Przyjąć $k = k+1$ i przejść do Kroku 1.

Zauważamy, że jeśli wybiera się predyktor y^k, to $\bar{t}_k \approx \delta_k$, natomiast jeśli konstruujemy predyktor s^k, to krok $\bar{t}_k$ parametru homotopii jest funkcją parametrów τ_k i δ_k i może on być powiększany stosownie do przebiegu ścieżki homotopii. Stwarza to możliwość przyspieszenia procesu obliczeniowego.

3. Przykład

Przedstawiony algorytm wykorzystano do rozwiązania równania hybrydowego obwodu postaci:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 & |x_1| \\ x_2 & |x_2| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Równanie to ma rozwiązanie [4]:

$$x = (0{,}27905620; \quad 1{,}64307144)$$

Równanie przekształcono homotopijnie do postaci

$$H(x,t) = F(x) + (1-t)F(x^0)$$

W algorytmie przyjęto następujące parametry:

$$\alpha = 0{,}05; \quad \beta = 0{,}7; \quad \gamma = 0{,}007; \quad L = 5 \quad \text{oraz} \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

Kryterium zbieżności (18) dla metody Newtona zrealizowano następująco:

$$\| w_l^k - w_{l-1}^k \| < \varepsilon, \qquad l \geq L$$

gdzie $\| \ \| = \max_i |w_i|$

Rozwiązanie równania $F(x) = 0$ poszukiwano stosując predyktor y^k według wzoru (10) oraz predyktora s^k według wzoru (14). Wyniki, jake uzyskano, są następujące:

x^0	y^k		s^k	
	N	L_t	N	L_t
(0,0; 0,0)	19	85	17	92
(5,0; 5,0)	75	281	33	220
(10,0;20,0)	270	813	45	301

gdzie N oznacza liczbę iteracji w cyklu podstawowym, a L_t oznacza sumaryczną liczbę iteracji metody Newtona (17). Uzyskane wyniki wskazują, że zastosowanie predyktora s^k pozwala zmniejszyć nakład obliczeniowy, zwłaszcza gdy x^0 jest odległe od rozwiązania x.

LITERATURA

[1] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York 1970.

[2] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

[3] Chua L.O., Desoer C.A., Kuh E.S.: Linear and Nonlinear Ciruits, Mc Graw - Hill, New York 1987.

[4] Garczarczyk Z.: Globalnie zbieżna analiza hybrydowa, XI SPETO, Wisła 1988.

[5] Garczarczyk Z.: Modified nodal equations of the nonlinear resistive circuits, 4 ISTET, Ilmenau 1987.

[6] Garczarczyk Z.: Dobór długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji ZN Pol.Śl., Elektryka z. 103, 1988.

[7] Allgower E.L., Georg K.: Predictor - corrector and simplicial methods for approximating fixed points and zero points of nonlinear mappings, w A. Bachem, M. Groschel, B. Korte (ed) - Mathematical programming: The State of the Art, Springer, Berlin 1983.

[8] Li T.Y., Yorke J.A.: A simple reliable numerical algorithm for following homotopy path, w: S.I. Robinson (ed) - Analysis and Computation of Fixed Points, Academic Press, New York 1980.

[9] Sagara N., Fukushima M.: An efficient predictor-corrector method for solving nonlinear equations, Journal of Computational and Appleid Mathematics 19, 1987.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 2 maja 1989 r.

ПРОГНОЗНО-КОРРЕКЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлен глобално сходимый алгоритм решения уравнений, описывающих нелинейную резистивную цепь. Этот алгоритм относится к гомотопно модифицированным узловым или гибридным уравнениям цепи. Он принадлежит к классу предикционно-коррекционных методов и основан на модификации предикатора Эйлера, а в фазе коррекций решения на алгоритме Ньютона. Это позволяет адаптивно выбирать параметры гомотопий модифицированных уравнений и в итоге упрощает вычисления. Пригодность алгоритма показана на примере численного решения нелинейной цепи.

PREDICTIVE-CORRECTIVE METHOD OF THE ANALYSIS OF NONLINEAR RESISTIVE CIRCUITS

S u m m a r y

In the paper a globally convergent algorithm for solving equations of nonlinear resistive circuit is presented. The algorithm deals with homotopy-modified nodal or hybrid equations of nonlinear circuit. It belongs to a class of predictive-corrective methods and uses modified Euler's predictor and, in phase of correction of the solution, the Newton algorithm. It permits adaptive control of the homotopy parametr of modified equations which provides decreasing of the computation cost. Usefulness of the presented algorithm has been demonstrated by numerical computation of a selected nonlinear circuit.