

**KONFERENCJA ŚRODOWISKOWA
SEKCJI MECHANIKI GRUNTÓW I SKAŁ ORAZ FUNDAMENTOWANIA
KOMITETU INŻYNIERII LĄDOWEJ I WODNEJ PAN
"GEOTECHNIKA W OŚRODKU GLIWICKIM"**

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLASKIEJ

1995

Seria: BUDOWNICTWO z. 80

Nr kol. 1288

Stanisław CHMIELNIAK

Katedra Geotechniki
Politechnika Śląska

**MODEL PRĘTOWY DO ANALIZY SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO
WSPÓLDZIAŁANIA BUDOWLI I PODŁOŻA W WARUNKACH ZADANIA
OBROTOWO-SYMETRYCZNEGO**

Streszczenie. W pracy określono założenia teoretyczne i ustalono równania konstytutywne modelu. Założono, że pręty modelu mają ograniczoną wytrzymałość. Po przekroczeniu tej wytrzymałości odpowiednie pręty ulegają uplastycznieniu. Wytrzymałość prętów ustala się na podstawie hipotezy Coulomba. Początkowy moduł sprężystości prętów ustalono z warunku jednakowych osiadań. Można go ustalać w każdym kroku w sposób przybliżony lub na podstawie związków konstytutywnych opracowanych dla modeli teorii plastyczności, np. dla modelu Cam-clay. Zadanie rozwiązuje się metodą przyrostową. Rozwiązanie zilustrowano przykładem zastosowania do analizy stanu naprężenia i rozwoju strefy uplastycznienia w podłożu pod fundamentem aż do wystąpienia stanu granicznego. Rozwiązanie może znaleźć zastosowanie do precyzyjniejszej analizy odkształceń, narastania osiadań oraz rozkładu naprężeń kontaktowych przy dowolnym poziomie obciążenia aż do wyczerpania nośności podłoża.

**APPLICATION OF A TRUSS-TYPE MODEL IN THE ANALYSIS
OF THE ELASTO-PLASTIC INTERACTION OF BUILDING AND SUBSOIL
IN ROTARY-SYMMETRICAL PROBLEMS**

Summary. The paper presents an analysis of stress and plasticization zone development in soil under a foundation. The analysis is based on a simple truss-type model. It is assumed that truss members have limited tensile strength. If the tensile strength is too high, the members undergo plasticization. The problem is solved by means of the incremental method. The solution can be applied to analyze ground settlement and stress distribution in the ground due to the loading from the foundation as well as the conditions for limit states.

СТЕРЖНЕВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧНОГО АНАЛИЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СООРУЖЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ В УСЛОВИЯХ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

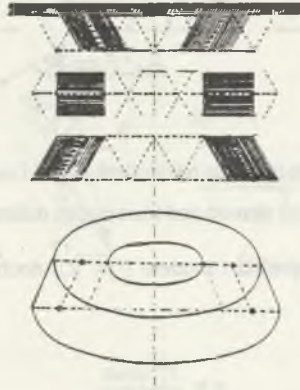
Резюме. Определены теоретические предпосылки и составлены конститутивные уравнения модели. Было принято, что стержни модели обладают ограниченной стойкостью. После превышения этой стойкости соответствующие стержни пластифицируются. Стойкость стержней определяется на основании гипотезы Coulomba. Начальный модуль упругости стержней был установлен из условия одинаковых осадок. Можно его устанавливать в каждом шагу подобным образом или на основании конститутивных связей, разработанных для моделей теории пластичности. Задача решается методом разностей. Решение иллюстрируется примером его применения для анализа состояния напряжения и расширения зоны пластификации в основании под фундаментом вплоть до наступления предельного состояния. Это решение может быть использовано для более точного анализа деформации, нарастания осадок, а также распределения контактных напряжений при любом уровне нагрузки вплоть до исчерпания несущей способности основания.

1. ZAŁOŻENIA I OPIS MODELU

1.1. Wprowadzenie

Do analogowego opisu zachowania się fundamentu i podłoża gruntowego zastosowano strukturalny model prętowy w postaci zastępczej kratownicy przestrzennej zbudowanej z prętów wzajemnie się przenikających. Przyjęto strukturę jednorodną, izotropową, zbudowaną z elementów o jednakowej długości. Budowlę lub fundament wymodelowano wewnątrz struktury przez wprowadzenie grupy prętów o sztywności odpowiadającej sztywności budowli. Fundament i podłoże podzielono na elementy prętowe w postaci wielkowymiarowych pierścieni i odcinków powłok stożkowych - rys. 1. Pręty schematu reprezentują osie elementów struktury. Grubość prętów przyjmuje się równą odległości osi powłok równoległych. Przekroje poprzeczne prętów przyjmuje się jako przekroje odpowiednich pierścieni. W zagadnieniach obrotowo-symetrycznych kratownicę przestrzenną zbudowaną z pierścieni i odcinków powłok stożkowych rozwiązuje się jako symetryczną kratownicę płaską. Dzięki symetrii względem osi obrotu wystarczy rozwiązanie schematu ograniczonego do połowy. Istotny w rozważanych zagadnieniach wpływ ciężaru własnego podłoża uwzględniono obciążając węzły modelu odpowiednio dobranymi obciążeniami skupionymi. Nieograniczoność podłoża uwzględnia się, ustalając duże wymiary struktury w porównaniu z wymiarami budo-

wli oraz zakładając podparcie lub ograniczenie struktury dostatecznie daleko od strefy zaburzenia wywołanej obecnością fundamentu.



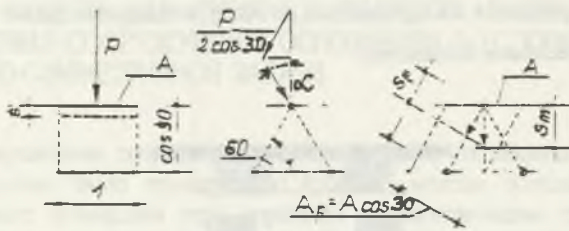
Rys. 1. Podział podłoża na elementy prętowe

Fig. 1. Truss element idealization of soil

Rozmieszczenie podparć struktury, umiejscowienie fundamentu oraz pozostałe założenia szczegółowe pokazano na rysunku przedstawiającym wyniki analizy przykładu testującego - rys. 4a. Mimo wzajemnego przenikania się prętów przyjęto grube założenie upraszczające o niezależności odkształceń poprzecznych poszczególnych prętów składowych. Prostsze zastosowanie modelu do rozwiązania zadania płaskiego przedstawiono w pracach [1],[2].

1.2. Przybliżone oszacowanie parametrów deformacyjnych

Dokładniejsze rozpoznanie parametrów deformacyjnych podłoża jest trudne i pracochłonne. Obecnie w naszym kraju jest jeszcze rzadko stosowane. Aby umożliwić testowanie i ewentualne zastosowanie przedstawionego modelu do analizy zagadnień inżynierskich, proponuje się następujące rozwiązanie uproszczone. Do prowadzonej analizy przyrostowej opartej na krokowym rozwiązywaniu zadania sprężystego proponuje się zastosowanie zastępczego modułu sprężystości podłużnej M_z . W przykładzie testującym zastępczy moduł sprężystości prętów modelu przyjęto na podstawie porównania odkształceń modelu i próbki gruntowej w warunkach badań edometrycznych.



Rys. 2. Porównanie odkształceń próbki i modelu

Fig. 2. Soil element and truss model deformation

Analizując odkształcenia próbki i modelu (rys. 2), dochodzimy do następujących zależności:

$$s = \frac{P \cdot \cos \alpha}{A \cdot M_o} \quad (1)$$

$$s_p = \frac{\frac{0.5 \cdot P}{\cos \alpha} \cdot l}{A \cdot \cos \alpha \cdot M_z} \quad (2)$$

$$s_m = \frac{s_p}{\cos \alpha} = \frac{0.5 \cdot P}{A \cdot \cos^3 \alpha \cdot M_z} \quad (3)$$

Z warunku jednakowych odkształceń próbki i modelu:

$$s_m = s \quad (4)$$

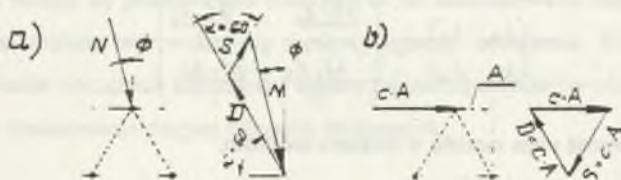
Dla $\alpha = 30^\circ$ otrzymamy:

$$M_z = \frac{0.5 \cdot M_o}{\cos^3 \alpha} = 0.89 \cdot M_o \quad (5)$$

Dla prętów poziomych podlegających w zastosowanym układzie najpierw odprężeniu, a później rozciąganiu zastosowano moduł odprężenia M . Towarzyszące przekroczeniu wytrzymałości gruntu lokalne zmniejszenie się jego modułu ściśliwości uwzględniono w sposób przybliżony przez częściowe obniżenie modułu sprężystości w sąsiednim pręcie ściskanym. W rozwiązaniu testującym przyjęto zmniejszenie dwudziestoprocentowe. Można to interpretować jako przejście od wstępnie założonego modułu ściśliwości edometrycznej M_o do modułu ściśliwości ogólnej E_o .

1.3. Ocena wytrzymałości zastępczej

Wytrzymałość zastępczą prętów modelu ustala się zgodnie z założeniami Coulomba dla modelu w warunkach bezpośredniego ścinania - rys. 3:



Rys. 3. Siły w prętach modelu w warunkach bezpośredniego ścinania

Fig. 3. Truss modell forces in principal stresses

$$D \sin 30 - S \sin 30 = N \sin \phi \quad (6)$$

$$D \cos 30 + S \cos 30 = N \cos \phi \quad (7)$$

$$\frac{D - S}{D + S} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{tg} 30} \quad (8)$$

oznaczając:

$$\frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{tg} 30} = L \quad (9)$$

otrzymamy warunek dla siły mniejszej w parze prętów:

$$S \leq \left| D \frac{1 - L}{1 + L} \right| \quad (10)$$

Po dodaniu wpływu spójności (rys. 3b) $S = c \cdot A$ otrzymamy:

$$S \leq \left| D \frac{1 - L}{1 + L} \right| + cA \quad (11)$$

2. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE MODELU

Dzięki przyjętej jednorodności modelu nawet gęstą siatkę obliczeniową można opisać za pomocą tylko kilku powtarzających się typów prętów. Proste i powtarzające się macierze sztywności prętów mają postać:

$$\begin{pmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_z A_n}{l} & -\frac{M_z A_n}{l} \\ -\frac{M_z A_n}{l} & \frac{M_z A_n}{l} \end{pmatrix} \quad (12)$$

gdzie: k_{ij} - sztywność pręta modelu w układzie lokalnym,

M_z - zastępczy moduł ściśliwości,

A_n - przekrój poprzeczny pręta n.

Standardowymi metodami opracowanymi dla kratownic buduje się globalną macierz sztywności wszystkich elementów układu.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Model kratownicowy rozwiązuje się klasyczną metodą przemieszczeń w ujęciu macierzowym. Wektor odkształceń modelu $\{u\}$ dla założonego wektora obciążeń $\{P\}$ wyznacza się z równania macierzowego:

$$\{u\} \cdot \{K\} = \{P\} \quad (14)$$

3. ALGORYTM ROZWIĄZANIA

Do analogowego opisu zachowania się podłoża proponuje się zastosowanie wyżej opisanego modelu strukturalnego w postaci kratownicy zbudowanej z prętów o ograniczonej wytrzymałości. Po przekroczeniu tej wytrzymałości odpowiedni pręt osiąga stan graniczny. Analizę prowadzi się metodą przyrostową. Efekt uplastycznienia podłoża opisuje się przez wielokrotne rozwiązywanie zadania dla struktury z kolejno uplastyczniającymi się elementami. O uplastycznieniu elementu decyduje przekroczenie w nim umownej wytrzymałości zastępczej

odpowiadającej przekroczeniu wytrzymałości gruntu na ścinanie. W rozwiązaniu numerycznym zastosowano prostsze w realizacji odpowiednie zmniejszenie ich sztywności. Każdorazowo po uplastycznieniu się pręta lub grupy prętów dokonuje się ponownego rozwiązania układu dla tej samej wartości obciążenia celem sprawdzenia, czy samo uplastycznienie lokalne nie spowoduje przekroczenia wytrzymałości na ścinanie w innych prętach. W przypadku przekroczenia stosuje się postępowanie iteracyjne aż do ustabilizowania układu. Dopiero po ustabilizowaniu modelu wprowadza się następny przyrost obciążenia. Przy zastosowaniu małych przyrostów obciążenia sukcesywne uplastycznianie się elementów okazało się płynne i nie wymagało zastosowania długich zabiegów iteracyjnych.

4. PRÓBA ZASTOSOWANIA TEORII PLASTYCZNOŚCI

4.1. Wprowadzenie

W zaproponowanym algorytmie dla każdego kroku przyrostowego można wprowadzić nową wartość zastępczego modułu sprężystości prętów modelu. Dla rozwiązań inżynierskich w prętach sąsiadujących z obszarami przekroczenia wytrzymałości zastępczej proponuje się dwudziestoprocentowe zmniejszanie ich początkowego modułu ściśliwości. Do analiz bardziej wyrafinowanych proponuje się zastosowanie doskonalszych modeli teorii plastyczności. Wprowadzenie ich polega na zastosowaniu w każdym kroku przyrostowym odpowiednio obliczanego modułu zastępczego.

4.2. Równania konstytutywne modelu Cam-clay

Moduł zastępczy dla znanych lub założonych parametrów podłoża należy wyznaczać z odpowiednich związków konstytutywnych modelu. Dla modelu Cam-clay w warunkach 3-D ściskania wyznacza się go na podstawie związków przedstawionych w pracy [3]. Zgodnie z [3] dla modeli stanu krytycznego obowiązują stowarzyszone prawa płynięcia. Równania konstytutywne w przypadku 3-D ściskania upraszczają się do postaci:

$$\tilde{\varphi}' = K^{ep} \delta \varepsilon_v + 3P^{ep} \delta \varepsilon_s \quad (15)$$

$$\tilde{\alpha}q' = 3P^{ep} \delta \varepsilon_v + 3G^{ep} \delta \varepsilon_s \quad (16)$$

W warunkach jednoosiowego ściskania:

$$\delta\sigma_1 \neq 0, \delta\sigma_2 = \delta\sigma_3 = 0 \quad (17)$$

$$\delta\varepsilon_1 \neq 0, \delta\varepsilon_2 = \delta\varepsilon_3 \neq 0 \quad (18)$$

Wtedy z definicji:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{3}(\delta\sigma_1 + 2\delta\sigma_3) \rightarrow \bar{\varphi} = \frac{1}{3}\delta\sigma_1 \quad (19)$$

$$\bar{\alpha} = \delta\sigma_1 - \delta\sigma_3 \rightarrow \delta\sigma_1 \quad (20)$$

$$\delta\varepsilon_v = \delta\varepsilon_1 + 2\delta\varepsilon_3 \quad (21)$$

$$\delta\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_3) \quad (22)$$

Po podstawieniu do związków (15), (16):

$$\delta\sigma_1 = 3(K^{ep} + 2P^{ep})\delta\varepsilon_1 + 6(K^{ep} - P^{ep})\delta\varepsilon_3 \quad (23)$$

$$\delta\sigma_1 = (3P^{ep} + 2G^{ep})\delta\varepsilon_1 + 2(3P^{ep} - G^{ep})\delta\varepsilon_3 \quad (24)$$

Z tego układu wyznaczono związek pomiędzy przyrostami naprężenia i odkształcenia pionowego:

$$\delta\sigma_1 = 3 \frac{(K^{ep} + 2P^{ep})(3P^{ep} - G^{ep}) - (3P^{ep} + 2G^{ep})(K^{ep} - P^{ep})}{(3P^{ep} - G^{ep}) - 3(K^{ep} - P^{ep})} \delta\varepsilon_1 \quad (25)$$

W którym moduły sprężysto-plastyczne zgodnie z [3] wyznaczono z zależności:

$$K^{ep} = \frac{1+e}{\kappa} p' - \frac{\left[M^2 \frac{1+e}{\kappa} p' (2p' - p_c) \right]^2}{Mian} \quad (26)$$

$$G^{ep} = G - \frac{12G^2 q^2}{Mian} \quad (27)$$

$$P^{ep} = \frac{2GM^2 \frac{1+e}{\kappa} p' (2p' - p_c) q'}{Mian} \quad (28)$$

Gdzie:

$$\bar{M}_{ian} = M^* \frac{1+e}{\kappa} p' (2p' - p_c)^2 + 12Gq^2 + M^* \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p_c \theta' p' (2p' - p_c) \exp \frac{e_0' - e'}{\lambda - \kappa} \quad (29)$$

Do analizy numerycznej wprowadzono pojęcie krokowej wartości zastępczego modułu sprężystości:

$$E_{zast} = 3 \frac{(K^{ep} + 2P^{ep})(3P^{ep} - G^{ep}) - (3P^{ep} + 2G^{ep})(K^{ep} - P^{ep})}{(3P^{ep} - G^{ep}) - 3(K^{ep} - P^{ep})} \quad (30)$$

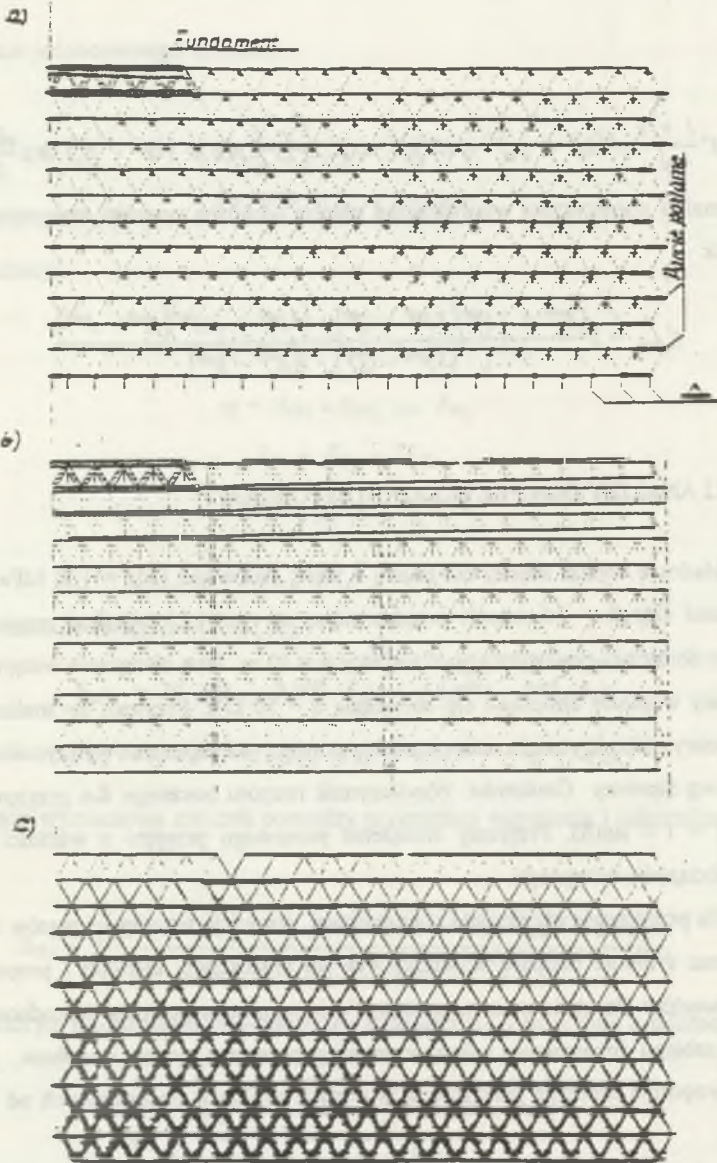
5. WYNIKI ANALIZY DLA PRZYKŁADU TESTOWEGO

Przykładowe wyniki analizy dla gruntu o małej ściśliwości ($M_z = 100$ MPa) i o dużej wytrzymałości (kął $\varphi = 30$ stopni) przedstawiono na rys. 4, 5. Analizę prowadzono dla fundamentu obrotowo-symetrycznego o średnicy $d = 10$ m. Jako obciążenie wstępne przyjęto zastępcze siły węzłowe obliczone dla obciążenia $q = 50$ kPa. Przyjęto, że analizowany jest grunt niespoisty i jako kryterium uplastycznienia przyjęto przekroczenie wytrzymałości gruntu określonej wg hipotezy Coulomba. Współczynnik rozporu bocznego K_0 przyjęto wg zależności: $K_0 = 1 - \sin(\varphi)$. Przyrosty obciążenia pionowego przyjęto o wartości $d = 0.25$ wielkości obciążenia wstępnego.

Rys. 4a przedstawia obraz siatki obliczeniowej, proporcje sztywności prętów i proporcje obciążeń oraz symbole podparć struktury. Rys. 4b przedstawia kierunki i proporcje przemieszczeń węzłów dla obciążenia wstępnego. Poziome przemieszczenia dośrodkowe modelu wynikają z zabiegu dopasowania odkształcalności poprzecznej modelu i podłoża. Na rys. 4c pokazano proporcje naprężeń normalnych, w prętach struktury, pochodzących od obciążenia wstępnego.

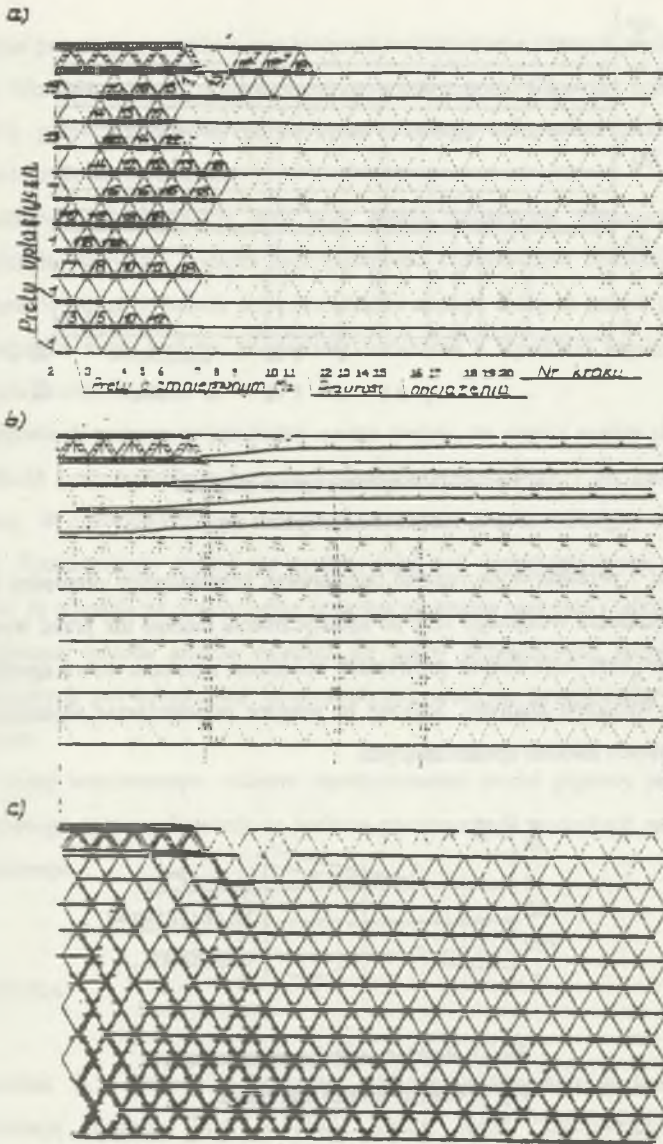
Na rysunku 5a udokumentowano kolejność uplastyczniania się prętów struktury. Na rys. 5b kierunki i proporcje przemieszczeń węzłów po uplastycznieniu tuż przed wyczerpaniem nośności. Na rys. 5c pokazano proporcje naprężeń normalnych, w prętach struktury, pochodzących od obciążenia końcowego o wartości zbliżonej do nośności granicznej.

Na rysunku 6 podano zależność osiadania pionowego fundamentu s od wielkości obciążenia pionowego q .



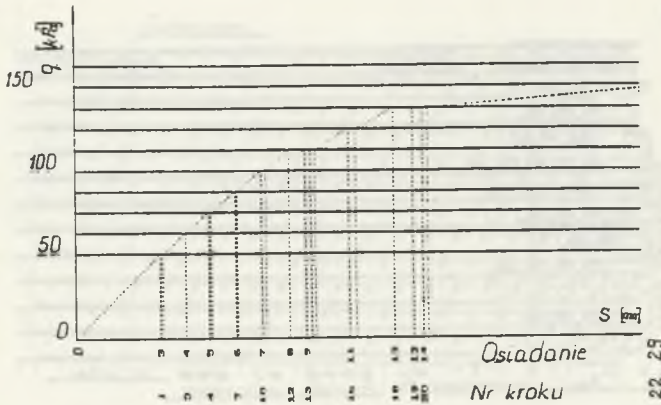
Rys. 4a. Siatka obliczeniowa, sztywności, obciążenie początkowe, podparcie struktury
 4b. Przesunięcia od obciążenia początkowego
 4c. Naprężenia normalne w prętach od obc. początkowego

Fig. 4a. Net calculation, stiffnesses, initial load, fixed support of structure
 4b. Displacement for initial load
 4c. Truss normal stresses for initial load



Rys. 5a. Kolejność uplastyczniania się prętów struktury
 5b. Przemieszczenia po uplastycznieniu od obc. końcowego
 5c. Naprężenia normalne w prętach od obciąż. końcowego

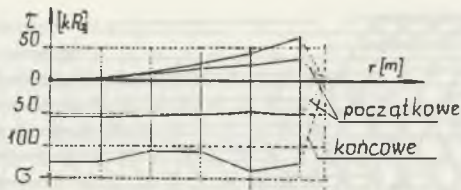
Fig. 5a. Sequence plasticization truss of structure
 5b. Displacement for final load
 5c. Truss normal stresses for final load



Rys. 6. Zależność obciążenie-osładanie

Fig. 6. Results of displacement test

Na rysunku 7 przedstawiono rozkład oddziaływań kontaktowych pomiędzy budowlą a podłożem dla obciążenia wstępnego oraz po uplastycznieniu modelu tuż przed wystąpieniem stanu granicznego. Przy dość dużych przyrostach obciążenia uzyskano dobrą zgodność wyników obliczeń z wynikami znanymi. Stanowi to wstępne potwierdzenie słuszności i dopuszczalności przyjętych założeń upraszczających.



Rys. 7. Rozkład oddziaływań kontaktowych

Fig. 7. Contact stresses distribution

6. WNIOSKI

1. Zaproponowany model pozwala analizować zmiany stanu naprężenia i odkształcenia podłoża oraz określać zmiany rozkładu oddziaływań kontaktowych pomiędzy budowlą a podłożem w całym zakresie obciążenia aż do wyczerpania nośności.

2. W analizie precyzyjnej możliwe jest krokowe wykorzystanie różnych modeli teorii plastyczności. Możliwość wyżej opisanego zastosowania modelu Cam-clay przeanalizowano w pracy [4], gdzie zastosowano go do opisu przebiegu odkształceń próbki gruntowej w aparacie trójosiowego ściskania.
3. Do zastosowań inżynierskich oraz przy braku dokładnych parametrów opisujących odkształcenia plastyczne podłoża zaproponowane postępowanie uproszczone wydaje się obiecujące. Wymaga to jednak przeprowadzenia szeregu dalszych testów porównawczych. Rozstrzygające może być np. porównanie rozwiązań z wynikami uzyskiwanymi metodą elementów skończonych.
4. Na podstawie dotychczasowych badań można wnosić, że wyniki analizy są mało wrażliwe na wielkość przyjmowanego przyrostu obciążenia pionowego i na gęstość siatki obliczeniowej. W dotychczasowych badaniach testowych proces iteracyjny okazał się szybko zbieżny. Przedstawiony model ma tę przewagę nad dotychczasowymi modelami inżynierskimi, że pozwala na równoczesne śledzenie narastania naprężeń i odkształceń.
5. Przedstawiona metoda analizy należąca do grupy przybliżonych rozwiązań statycznie dopuszczalnych jest przejrzysta, komunikatywna oraz ma pewne walory dydaktyczne i poznawcze.
6. Dzięki wyżej wymienionym zaletom zaproponowany model prętowy jest przydatny do uproszczonego opisu zachowania się podłoża gruntowego w warunkach zadania obrotowo-symetrycznego.

LITERATURA

- [1] Chmielniak S.: Rozwój odkształceń podłoża gruntowego budowli wywołanych eksploatacją górnictwem, Mat. V Nauk. Techn. Konf. "Budownictwo na terenach górniczych" Kamień k. Rybnika maj 1990.
- [2] Chmielniak S.: Uproszczona analiza odkształceń niesprężystych podłoża gruntowego budowli w warunkach eksploatacji górnictwem, Prace ITB Kwartalnik nr 1-2, (77-78)1991.
- [3] Gryczmański M.: Sprężysto-plastyczne modele ośrodków rozdrobionych, Mat. Seminarium Katedry Geotechniki na Wydz. Budownictwa Pol. Śl. w Gliwicach 1994.

- [4] Chmielniak S.: Sprawozdanie z wykonania pracy: Nauk.-Bad. BW-68/RB-2/94 Z.3. "Sprężysto-plasyczny model prętowy podłoża w analizie zagadnień osiowo-symetrycznych" (Prace Inst. Konstr. Bud. Kat. Geotechniki, nie publikowane).
- [5] Furmańczyk S.: Oszacowania rozwiązań dla ciała przez siły w prętach kratownicy. Mat. XXXVII KN ŁÓDŹ - KRYNICA 1991.

Recenzent: Dr hab. Zbigniew Sikora
Prof. Politechniki Gdańskiej

Wpłynęło do Redakcji 1. 05. 1995 r.

Abstract

The paper contains the theoretical assumption, description and constitutive equations of the model. A method of approximate estimation of its deformative and resistant parameters has been presented. It is assumed that the truss members are of limited strength and the members of exceeded strength got plastified. The strength of the truss member has been fixed according to the Coulomb-hypothesis and the initial modulus of elasticity has been derived from the soil sample conditions of equal settlement and from the model. The problem will be solved using incremental method i.e. by iterative analyzing of the structure of successive plastifying truss members. An attempt of application of constitutive relations for the plasticity theory models has also been made. It is based on the estimation of the step value of the virtual modulus of elasticity of the model's truss members. An exact description of Cam-Clay-Model application has been shown. The solution of the problem is illustrated by an example to analyses the state of stress and the increase of the plastification zone in the subsoil (under the foundation) up to the limit state. The said solution can be applied in more precise analysis of strains, increase of settlements and distribution of contactual stresses by any load level until the load-carrying ability of the subsoil is spent.