KONFERENCJA ŚRODOWISKOWA
SEKCJI MECHANIKI GRUNTÓW I SKAŁ ORAZ FUNDAMENTOWANIA
KOMITETU INŻYNIERII LĄDOWEJ I WODNEJ PAN
„GEOTECHNIKA W OŚRODKU GLIWICKIM"

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: BUDOWNICTWO z. 80 Nr kol. 1288

Lidia FEDOROWICZ, Jan FEDOROWICZ

Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych
Politechnika Śląska

NUMERYCZNE MODELOWANIE INTERAKCYJNEGO ZADANIA BUDOWLA-PODŁOŻE

Streszczenie. W pracy podano analityczne sformułowanie procesu iteracyjnego prowadzonego między podukładami budowla-podłoze. Dla podanego algorytmu postępowania iteracyjnego przedstawiono jego fizyczną i inżynierską interpretację.

NUMERICAL MODELLING OF THE INTERACTIVE TASK BUILDING-SUBSOIL

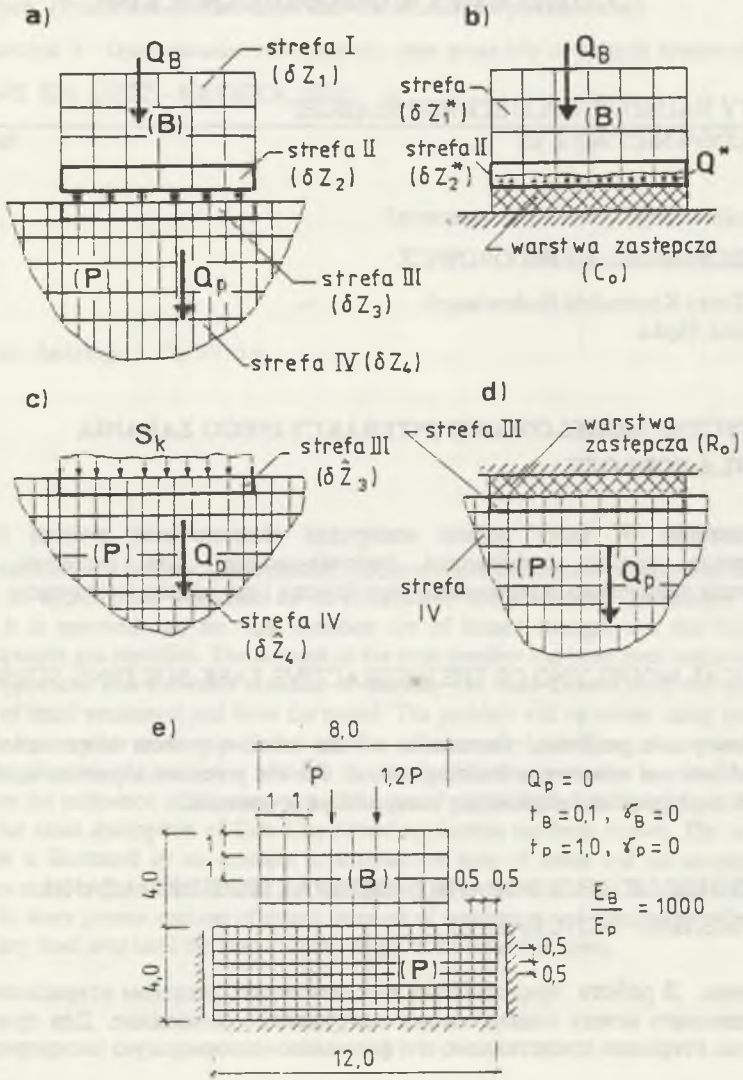
Summary. An analytical formulation of the iterative process is presented which is conducted between subsystems building-subsoil. For the proposed algorithm of the iterative procedure its physical and engineering interpretation is presented.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНОЙ ЗАДАЧИ СООРУЖЕНИЕ - ОСНОВАНИЕ

Резюме. В работе представлено аналитическое решение итерационного процесса веденного между подсистемами сооружение - основание. Для приведенного алгоритма итерации представлено его физическо-инжинерскую нитерпретацию.

1. WSTĘP

W pracy poszukiwane jest rzeczywiste rozwiązanie zadania kontaktowego budowla-podłoze poprzez postępowanie iteracyjne. Rozwiązania globalne całego układu (B)-(P), pojawiające się współcześnie dzięki zastosowaniu Metody Elementów Skończonych (MES),


a)
Q_B
strefa I
(δZ_1)
(B)
strefa II
(δZ_2)
(P)
Q_p
strefa III
(δZ_3)
strefa IV (δZ_4)
b)
Q_B
strefa
(δZ_1^*)
(B)
strefa II
(δZ_2^*)
Q^*
warstwa zastępcza
(C_o)
c)
S_k
strefa III
$(\delta \hat{Z}_3)$
(P)
Q_p
strefa IV
$(\delta \hat{Z}_4)$
d)
strefa III
warstwa
zastępcza (R_o)
(P)
Q_p
strefa
IV
e)
8,0
P
1,2P
1 1
1
1
4,0
(B)
0,5 0,5
4,0
(P)
0,5
0,5
12,0
$Q_p = 0$
$t_B = 0{,}1$, $\sigma_B = 0$
$t_p = 1{,}0$, $\gamma_p = 0$
$\frac{E_B}{E_p} = 1000$

Rys.1

są ciągle rzadkie i dotyczą głównie przypadków projektowania szczególnie odpowiedzialnych budowli. Poszukiwanie zatem możliwie uniwersalnego algorytmu postępowania iteracyjnego, dającego równocześnie mozliwość opisu podukładów (B) i (P) modelami o właściwościach dostosowanych do potrzeb analizowanego zadania, wydaje się podejściem racjonalnym. Praktycznie iteracyjne "zeszycie" podukładów o znacząco różnych sztywnościach jest jednak bardzo trudne. Na błędy natury numerycznej nakładają się bowiem błędy wynikające ze wstępnej, często nieprawidłowej redystrybucji wielkości wewnętrznych - sił w budynku (B) i przemieszczeń w podłożu (P). W związku z tym podjęto próbę sformułowania procesu iteracyjnego analitycznie. Wychodząc od sformułowania zadania globalnego poprzez odpowiednie przekształcenie równań i wykorzystanie sformułowań zadań samodzielnych dla podukładów (B) - (P), uzyskano algorytm postępowania iteracyjnego, dochodząc zdaniem autorów do implikacji fizycznych postawionego zadania.

2. ANALITYCZNY ZAPIS PROCESU ITERACYJNEGO

Postępowanie sformułowano dla postawionego następująco zadania:

- w przypadku nieliniowości fizycznej układu (B)-(P) lub jednego z podukładów analiza przeprowadzana będzie metodą przyrostową,
- podukład (B) opisywany będzie metodą SES [1,2,3], w której wektor niewiadomych zawiera przemieszczenia środków elementów dyskretnych modelu,
- podukład (P) modelowany będzie metodą MES.

Na rys.1 pokazano schematycznie modele obu podukładów, przedstawiając zadanie w stanie 2D, co nie przeczy ogólności prowadzonych rozważań. Definiując przyrost wektora obciążeń układu siłami zewnętrznymi i masowymi w rozpatrywanym kroku przyrostowym jako $\underline{Q}$, mozemy zapisać układ równań, niezależnie od metody w postaci:

$$K \cdot \delta Z = \underline{Q} \tag{1}$$

Przyjmując, ze budowla oddziałuje na podłoze jedynie siłami pionowymi, dzielimy cały układ (B)-(P) na cztery strefy I-IV (rys.1). Z fizycznej interpretacji równań (1) wynika, że siły wzajemnego oddziaływania na siebie podukładów (B) i (P) wyrażają się poprzez różnicę pionowych przemieszczeń (środków elementów SES i węzłów styku MES) dyskretnych elementów II i III strefy. Dokonując przegrupowania macierzy sztywności K oraz wektora przemieszczeń δZ i obciązen $\underline{Q}$, a następnie ich podziału, tak aby w strefach II i III zawarte były jedynie równania opisujące pionowe przemieszczenia elementów strefy kontaktu (B)-(P), oraz uwzględniając pasmową budowę macierzy sztywności, równanie (1) zapiszemy:

$$\left.\begin{aligned} B_{11}\cdot\delta Z_1 + B_{12}\cdot\delta Z_2 &= \Delta_1 \\ B_{21}\cdot\delta Z_1 + B_{22}\cdot\delta Z_2 + B_{23}\cdot\delta Z_3 &= \Delta_2 \\ B_{32}\cdot\delta Z_2 + B_{33}\cdot\delta Z_3 + B_{34}\cdot\delta Z_4 &= \Delta_3 \\ B_{43}\cdot\delta Z_3 + B_4\cdot\delta Z_4 &= \Delta_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

gdzie wektory przyrostów przemieszczeń i obciążeń mają postać:

$$\delta Z = \left\{\delta Z_1^T\ \delta Z_2^T\ \delta Z_3^T\ \delta Z_4^T\right\}^T, \tag{3}$$

$$Q = \left\{\Delta_1^T\ \Delta_2^T\ \Delta_3^T\ \Delta_4^T\right\}^T. \tag{4}$$

Po wyeliminowaniu z równań (2) wektorów δZ_1 i δZ_2 otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} (B_{22} - B_{21}B_{11}^{(-1)}B_{12})\cdot\delta Z_2 + B_{23}\cdot\delta Z_3 &= \Delta_2 - B_{21}B_{11}^{(-1)}\Delta_1 \\ B_{32}\cdot\delta Z_2 + (B_{33} - B_{34}B_{44}^{(-1)}B_{43})\cdot\delta Z_3 &= \Delta_3 - B_{34}B_{44}^{(-1)}\Delta_4 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Rozpatrzmy teraz dwa zadania pomocnicze α_1 i α_2.

Zadanie α_1

Dla podukładu (B) (rys.1b) spoczywającego na zastępczej (kontaktowej) warstwie sprężystej i obciążonego w strefie II dodatkowo pionowym obciążeniem Q^* zapisano w sposób analogiczny do zadania całego (2) układ równań, z którego po wyeliminowaniu wektora δZ_1^* otrzymuje się dla strefy kontaktu:

$$(C_{22} - C_{21}C_{11}^{(-1)}C_{12})\cdot\delta Z_2^* = (\Delta_2 - C_{21}C_{11}^{(-1)}\Delta_1) + Q^*. \tag{6}$$

Blok C_{22} można z kolei przedstawić jako sumę bloku macierzy sztywności opisującej strefę kontaktową bez uwzględnienia współpracy budowli z podłożem - C_{22}^0, i macierzy diagonalnej C_0 - wpływu warstwy kontaktowej na budowlę:

$$C_{22} = C_{22}^0 + C_0. \tag{7}$$

Zadanie α_2

Dla podukładu (P) (rys.1c) obciążonego dodatkowo w linii (powierzchni) kontaktu siłami S_K zapisano analogicznie jak porzednio przegrupowany układ równań. Dokonując odpowiedniego podziału na bloki i eleminując wektor $\delta\hat{Z}_4$, otrzymamy:

$$(D_{33} - D_{34}D_{44}^{(-1)}D_{43})\cdot\delta\hat{Z}_3 = (\Delta_3 - D_{34}\cdot D_{44}^{(-1)}\Delta_4) + S_K. \tag{8}$$

Jeżeli wzajemne oddziaływanie podukładów (B) i (P) w zadaniu pełnym (2) ogranicza się do sił pionowych, to wówczas macierze B_{22} i B_{33} w równaniu (5) można przedstawić w postaci:

$$B_{22} = C_{22}^0 + R_0, \quad \text{oraz} \quad B_{33} = D_{33} + R_0; \tag{9}$$

gdzie R_0 - jest macierzą diagonalną wyrażającą wzajemny wpływ na siebie podukładów (B) i (P).

Porównamy teraz zadanie (5) z zadaniami (6) i (8), uwzględniając zapisy (7) i (9), oraz fakt, że:

$$B_{32} = B_{23}^{T} = -R_0 \ ,$$

oraz $B_{21} = C_{21}$, $B_{12} = C_{12}$, $B_{11} = C_{11}$, $B_{44} = D_{44}$, $B_{43} = D_{43}$, $B_{34} = D_{34}$.

Układ równań (5) otrzymujemy w postaci:

$$\left.\begin{aligned} (K_B + R_0)\cdot\delta Z_2 &= \Delta_B + R_0\cdot\delta Z_3 \\ K_P\cdot\delta Z_3 &= \Delta_P - R_0\cdot(\delta Z_3 - \delta Z_2) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

lub w postaci symetrycznej:

$$\left.\begin{aligned} (K_B + R_0)\cdot\delta Z_2 &= \Delta_B + R_0\cdot\delta Z_3 \\ (K_P + R_0)\cdot\delta Z_3 &= \Delta_P + R_0\cdot\delta Z_2 \end{aligned}\right\}; \tag{10a}$$

gdzie: $K_B, K_P, \Delta_B, \Delta_P$ - sprowadzone macierze sztywności i wektory obciążeń budowli i podłoża bez uwzględnienia wzajemnej współpracy:

$$\begin{aligned} K_B &= C_{22}^{0} - C_{21}C_{11}^{(-1)}C_{12}, \\ K_P &= D_{33} - D_{34}D_{44}^{(-1)}D_{43}, \\ \Delta_B &= \Delta_2 - C_{21}C_{11}^{(-1)}\Delta_1, \\ \Delta_P &= \Delta_3 - D_{34}D_{44}^{(-1)}\Delta_4. \end{aligned} \tag{11}$$

Jeżeli zachodzi identyczność macierzy R_0 z układu (10) z macierzą C_0 z równania (7) i gdy odpowiednie składniki sum prawej strony (10) potraktujemy jako obciążenia dodatkowe, $Q^* = R_0\cdot\delta Z_3$ występujące w (6) oraz $S_K = -R_0\cdot(\delta Z_3 - \delta Z_2)$ w (8), to układ (10) rozpada się na dwa niezależne równania równoważne postaciom równań (6) i (8) z zadań α_1 i α_2.

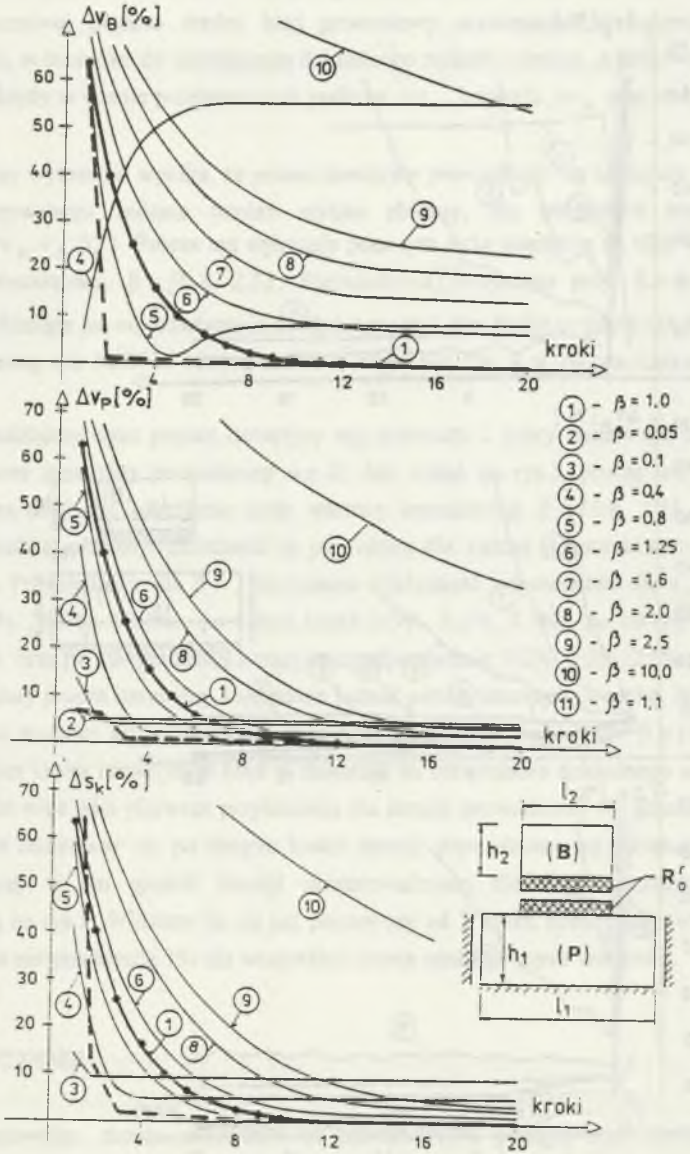
W podobny sposób można rozdzielić układ (10a). Zachodzi to, gdy przy identyczności macierzy R_o i C_0 odpowiednie składniki sum prawej strony (10a) potraktujemy jako obciążenie dodatkowe $Q^* = R_0\cdot\delta Z_3$ występujące w (6) oraz obciążenie $S_K^* = R_0\cdot\delta Z_2$ w (8). W przypadku analizy (10a) obciążenie w równaniu drugim odpowiadające podukładowi (P) wynika z wymuszenia deformacji linii kontaktu podukładów (B)-(P) przyrostem δZ_2, a zachodzi to za pośrednictwem warstwy kontaktowej opisanej parametrem R_0 (rys. 1d).

Z powyższych spostrzeżeń wynika, że można uzyskać drogą iteracyjną rozwiązanie całego układu opisanego równaniami (10) lub (10a) posługując się równaniami (6) i (8), zapisanymi

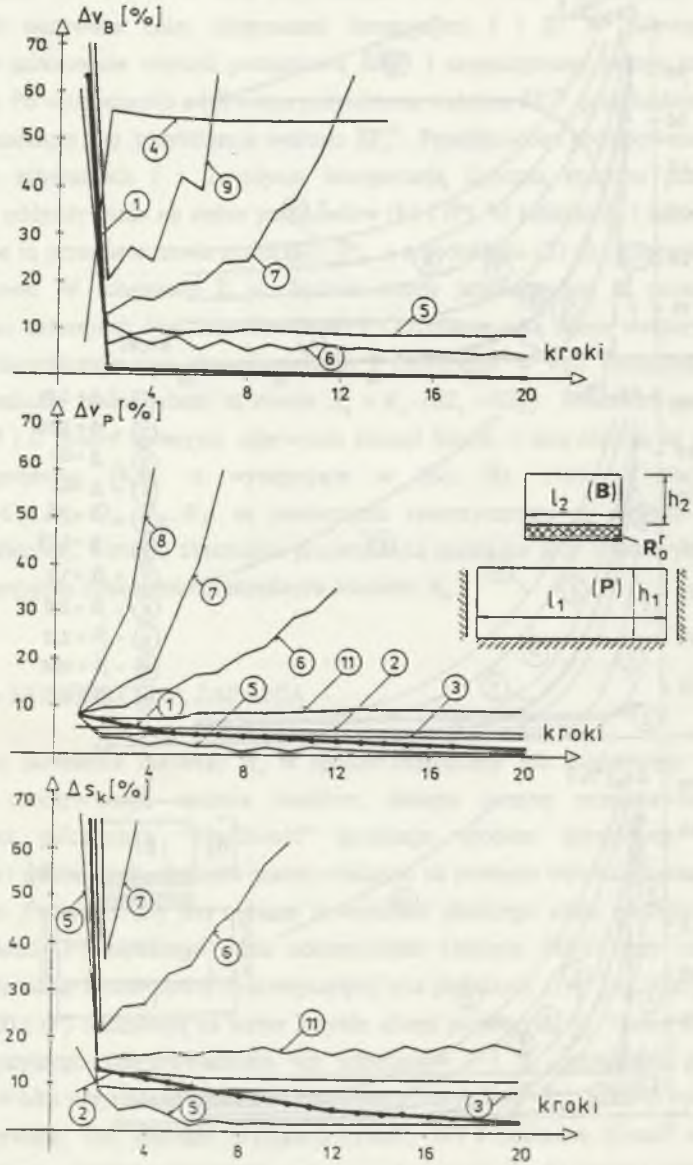
dla podukładów (B) i (P). W obu przypadkach (10) i (10a) przyjmujemy identyczne postępowanie nazywane dalej schematami iteracyjnymi I i II. W pierwszym kroku przyjmujemy mianowicie wartość początkową $\delta Z_3^{(0)}$ i rozpoczynamy proces iteracyjny od równania (6). Po wyznaczeniu z (6) *i-tego* przybliżenia wektora $\delta Z_2^{(i)}$ przechodzimy do (8), z którego wyznaczamy *i-te* przybliżenie wektora $\delta Z_3^{(i)}$. Przedstawione postępowanie iteracyjne różni się w schematach I i II jedynie interpretacją fizyczną sposobu przekazywania wzajemnego oddziaływania na siebie podukładów (B) i (P). W schemacie I na podukład (B) przekazywane są przemieszczenia podukładu (P), a z podukładu (B) na (P) przekazywane są siły kontaktowe. W schemacie II w obydwie strony przekazywane są przemieszczenia opisujące stan deformacji linii kontaktu (B)-(P). Otrzymane taką drogą wektory δZ_2 i δZ_3 określają jednoznacznie stan przemieszczenia i naprężenia w obu podukładach, a siły kontaktowe między podukładami są równe $S_k = R_0 \cdot (\delta Z_3 - \delta Z_2)$. Ponieważ przedstawiony schematami I i II proces iteracyjny odpowiada iteracji Seidla, z taką różnicą że prowadzona jest ona grupowo [4,5], a występujące w (6), (8), (10) i (10a) macierze $C_{22}, C_{22}^0, C_0, C_{11}, D_{33}, D_{44}, K_B, K_P$ są macierzami symetrycznymi o dodatnio określonej formie kwadratowej, warunki zbieżności procesu będą spełnione przy właściwym, zależnym od sposobu przyjętej dyskretyzacji określeniu macierzy R_0.

3. ANALIZA NUMERYCZNA ZADANIA

Ponieważ określenie macierzy R_0 w sposób analityczny lub numeryczny nie zawsze będzie dla rzeczywistego zadania możliwe, dlatego poniżej przedstawiono analizę parametryczną pokazującą "wrażliwość" przebiegu procesu iteracyjnego na dobór (oszacowanie) macierzy R_0. Badania przeprowadzono na pewnym wyidealizowanym zadaniu kontaktowym. Podukład (B) jest opisany równaniami płaskiego stanu naprężenia (metodą SES), podukład (P) płaskiego stanu odkształcenia (metodą MES) przy zastosowaniu równomiernej siatki kwadratowej dyskretyzującej oba podukłady (rys. 1e). Przyjęto, że oba podukłady (B) i (P) oddziałują na siebie jedynie siłami pionowymi S_K. Numeryczną analizę procesu iteracyjnego przeprowadzono wg schematów I i II, przyjmując, że warstwa kontaktowa w obu przypadkach jest określona macierzą $R_0^r = \beta \cdot R_0$, gdzie β – jest dowolną liczbą rzeczywistą. Do obliczeń przyjęto $\beta \in [0.05,\ 10]$. Dokładną postać macierzy R_0 określono poprzez redukcję układu równań zadania pełnego (2) do postaci (10), w sposób opisany w pkt. 2. Wybrane wyniki przeprowadzonej analizy, określające wpływ trafnego doboru cech warstwy kontaktowej na rozwiązanie końcowe i przebieg procesu iteracyjnego


Δv_B [%]
Δv_P [%]
Δs_k [%]
kroki
1 - β = 1.0
2 - β = 0.05
3 - β = 0.1
4 - β = 0.4
5 - β = 0.8
6 - β = 1.25
7 - β = 1.6
8 - β = 2.0
9 - β = 2.5
10 - β = 10.0
11 - β = 1.1
l2
h2
(B)
R_o^r
h1
(P)
l1

Rys. 2



Rys. 3

przedstawiono na rysunkach. Dla iteracji wg schematu II na rys.2, dla schematu I na rys.3. Na osi pionowej podano średni błąd procentowy rozwiązania w kolejnych krokach iteracyjnych, w stosunku do rozwiązania dokładnego zadania pełnego. Analizowano przy tym oddzielnie błędy w ocenie przemieszczeń podłoża Δv_P, budowli Δv_B oraz sił kontaktowych ΔS_K.

Z analizy wykresów wynika, że proces iteracyjny prowadzony wg schematu II (rys.2) jest dla rozpatrywanego zadania bardzo szybko zbieżny, dla wszystkich rozpatrywanych wielkości (v_B, v_P, S_K). Proces ten wykazuje poza tym dużą tolerancję na błąd w ocenie cech warstwy kontaktowej $\beta \in [0.8,\ 2.5]$. Przykładowo, otrzymano przy $\beta = 1$ rozwiązanie iteracyjne różniące się od rozwiązania dokładnego: w 2-gim kroku o mniej niż 40%, w 5-tym kroku o mniej niż 10%, w 10-tym kroku o mniej niż 1%, a w 20-tym kroku o mniej niż 0,01%.

Przeanalizujmy teraz proces iteracyjny wg schematu I, który zachowuje się odmiennie aniżeli proces iteracyjny prowadzony wg II. Jak widać na rys.3, proces ten jest bardziej wrażliwy na dokładne określenie cech warstwy kontaktowej $\beta \in [0.8,\ 1.1]$, a także jest znacznie wolniej zbieżny. Zbieżność ta jest różna dla każdej z poszukiwanych wielkości v_B, v_P, S_K. Przykładowo, dla $\beta = 1$ otrzymano dokładność odpowiednio dla v_B, v_P, S_K po 2 kroku 1.1% , 6.5%, 12.4%, po 5-tym kroku 0.9%, 5.1%, 9.7%, po 10-tym kroku 0.6%, 3.4%, 6.5% oraz po 20-tym kroku iteracyjnym odpowiednio: 0.2%, 1.3%, 2.5%.

Omawiany proces iteracyjny I wykazuje jednak pewną interesującą cechę. Jeżeli w ocenie właściwości warstwy kontaktowej nie popełnimy większego błędu (tzn. $\beta \in [0.8,\ 1.1]$), to już w drugim kroku iteracyjnym błąd w stosunku do rozwiązania dokładnego nie przekracza 13%. Można więc jako pierwsze przybliżenie dla iteracji prowadzonej wg schematu II przyjąć rozwiązanie otrzymane np. po drugim kroku iteracji prowadzonej wg schematu I. Przebieg skorygowanej w ten sposób iteracji przeprowadzonej dla $\beta = 1$ przedstawiono linią przerywaną na rys.2. Widzimy tu, że już począwszy od 3 kroku iteracyjnego wielkość błędu rozwiązania nie przekracza 1% dla wszystkich trzech analizowanych wielkości.

4. ZAKOŃCZENIE

Podsumowując, można stwierdzić, że przedstawione postępowanie iteracyjne (I i II) wskazuje na możliwość otrzymania rozwiązania zbieżnego w każdym przypadku zadania rzeczywistego, jeżeli iteracja prowadzona będzie na podukładach poprzez odpowiednio określoną warstwę kontaktową. Z przeprowadzonych dotychczas testów pomocniczych dla

analizowanego zadania wynika, że przy zastosowaniu „fizycznej" (rzeczywistej) różnicy sztywności między podukładami (B)–(P) i wprowadzeniu możliwie regularnej siatki dyskretnej w strefie kontaktu parametry R_0 możliwe do określenia analitycznie lub numerycznie zawierają się w granicach optymalnego doboru warunków budowy macierzy R_0, zapewniającej szybką zbieżność procesu iteracyjnego.

LITERATURA

[1] Fedorowicz L., Fedorowicz J.: Obliczanie ścianowych układów quaziprzestrzennych metodą sztywnych elementów skończonych. Inżynieria i Budownictwo nr 7, 1987, s. 221–225.

[2] Fedorowicz L.: Modelowanie numeryczne w analizie statycznej budynków o konstrukcji ścianowej posadowionych na podłożu górniczym. OTG nr 8, 1987, s. 13–21.

[3] Fedorowicz L., Fedorowicz J.: Wall structures affected by the static effects of mining operations. 4th International Conference on Ground Movements and Structures. Sessions I–IV, paper No 23, Cardiff, VII 1991.

[4] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. 1, PWN, Warszawa 1957.

[5] Położy G. N. i inni: Metody przybliżonych obliczeń. WNT, Warszawa 1966.

Recenzent: dr hab. Zbigniew Sikora
Prof. Politechniki Gdańskiej

Wpłynęło do Redakcji 1.05.1995 r.

Abstract

There has been investigated a solution of contact structure–subsoil task by an iterative approach. An analytical formulation of the process has been formulated under assumption that:

- the analysis has been led with progressive method,
- the subsystem (B) has been defined with SFE (Stiff Finite Element),
- the subsystem (P) has been modeled with FEM.

For the derived algorithm of the iterative approach its physical and engineer interpretations has been presented.