

Andrzej Świerniak, Jadwiga Sęsała  
 Politechnika Śląska w Gliwicach

## SYSTEM CAD STEROWANIA MANIPULATOREM ROBOTA PLANARNEGO

**Streszczenie.** Zasadniczym zagadnieniem omawianym w pracy jest rozwiązanie problemu sterowania układem napędowym robota w warunkach niepewności. Specyfika w podejściu do modelu dynamiki, jak również postaci zaprezentowanego sterowania wynika z nieznaności wielkości obciążenia robota. Zaprojektowany system umożliwia wspomaganie projektowania i symulację sterowania gwarantowanego dla modelu manipulatora o 2 stopniach swobody. Ze względu na silną nieliniowość oraz niepewność parametrów modelu prawo sterowania ma charakter złożony. Charakteryzuje się ono kompensacją nieliniowości, "odpornością" na niepewność oraz przede wszystkim zapewnieniem nadążania za zadaną trajektorią.

### 1. Ogólny model dynamiki manipulatora

W literaturze modele dynamiki robotów formułuje się zazwyczaj w oparciu o równania Kane'a [4] bądź równania Lagrange'a mechaniki analitycznej [2], [3]. W pracy skorzystano z modelu wyprowadzonego z uogólnionych równań Lagrange'a.

Rozważając manipulator o  $n$  stopniach swobody jako obiekt sterowania, można go opisać następującym macierzowym równaniem różniczkowym [11]

$$D(q(t))\ddot{q}(t) = P(\dot{q}(t), q(t), t)\dot{q}(t) + G(q(t), t) + u(t) + h(t) \quad (1)$$

gdzie:

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{jest } n \text{ wymiarowym wektorem współrzędnych reprezentujących położenie oraz prędkość kątową}$$

$u$  jest  $n$  wymiarowym wektorem sterowań,  $D$  i  $P$  są funkcjami macierzowymi o wymiarach  $n \times n$ , natomiast wektory  $h$  i  $G$  reprezentują zakłócenia, obciążenia i momenty grawitacyjne.

Jak łatwo zauważyć, manipulator o  $n$  stopniach swobody opisuje układ  $n$  nieliniowych równań różniczkowych 2 rzędu. Właściwość ta jest cechą charakterystyczną dla tego typu układów dynamicznych.

Ze względu na zmienność i niepewność parametrów modelu (wynikającą z nieznanymi oddziałującymi zakłóceniami oraz obciążeniami) przyjęcie powyższej postaci równań dynamiki jest nieprzydatne dla syntezy prawa sterowania. Z tego też względu zaprezentowany model podlega modyfikacjom i przekształceniom - zależnym od realizowanego algorytmu sterowania.

Jednym ze sposobów rozwiązania postawionego zagadnienia jest linearyzacja równań modelu wokół zadanej trajektorii  $q_2$ , wprowadzenie nowego stanu zdefiniowanego jako  $x = \Delta q = q - q_2$  [5] i wreszcie doprowadzenie modelu do postaci, w której można wyróżnić część nominalną oraz część niepewną.

Innym rozwiązaniem wykorzystanym w pracy jest obniżenie do 1. rzędu macierzowego równania różniczkowego kosztem wprowadzania dodatkowych zmiennych stanu będących pochodnymi współrzędnych uogólnionych. Następnie należy wymnożyć układ równań przez macierz odwrotną  $D^{-1}$  (zakładając jej nieosobliwość), po czym wydzielić część nominalną oraz część niepewną. Oznaczając zatem nowy wektor stanu jako  $x$  i przyjmując, że

$$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}] = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]$$

$$x = x(t)$$

otrzymuje się

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + \Delta f(x(t), t, r(t)) + [B + \Delta B(x(t), t, r(t))]u(t) \quad (2)$$

z warunkiem początkowym

$$x(t_0) = x^0$$

gdzie:

$x(t)$   $2n$  wymiarowy wektor stanu,

$u(t)$   $n$  wymiarowy wektor sterowań,

$r(t)$  funkcja mierzalna w sensie Lebesgue'a,

$f(x(t), t) + Bu(t)$  część nominalna,

$\Delta f(x(t), t, r(t)) + \Delta B(x(t), t, r(t))u(t)$  część reprezentująca niepewność.

Ponadto zakłada się, że zawsze można wyróżnić z funkcji  $f(x(t), t)$

część liniową i nieliniową

$$f(x(t), t) = Ax(t) + Bg(x, t) \quad (3)$$

przy czym

$A, B$  to macierze stanowiące parę sterowalną,  $g(x(t), t)$  to funkcja nieliniowa.

Po uwzględnieniu zależności (3) we wzorze (2) macierzowe równanie dynamiki przyjmuje postać



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_g(x(t), t) + \Delta f(x(t), t, r(t)) + \Delta B(x(t), t, r(t))u(t) \quad (4)$$

Zatem układ równań opisujących dynamikę można przedstawić jako strukturę zawierającą część liniową, nieliniową oraz niepewną, a więc odpowiednią z punktu widzenia algorytmu sterowania gwarantowanego (sterowanie odporne składa się z analogicznych części jak zmodyfikowany model dynamiki).

## 2. Szczegółowa analiza modelu dynamiki - na przykładzie robota planarnego o 2 stopniach swobody

Charakterystyczna postać równań dynamiki z wyszczególnieniem członu liniowego, nieliniowego oraz niepewnego jest wyprowadzona dla modelu robota planarnego o dwóch stopniach swobody. Przyjęto, iż manipulator ten składa się z obrotowej kolumny, do której przymocowane zostało ramię posiadające możliwość wysuwania i cofania. Ramię zakończone jest chwytakiem umożliwiającym unieruchomienie przenoszonego obciążenia podczas ruchu wykonywanego przez manipulator. Dynamika elementów chwytaka jest pomijana. Dla uproszczenia we wzorach pomijana będzie zależność  $x$  od  $t$ .

### 2.1. Wyprowadzenie równań Lagrange'a

Przyjmując oznaczenia:  $C$  - środek ciężkości ramienia,  $O$  - punkt, przez który przechodzi oś obrotu kolumny,  $M$  - nieznanne obciążenie,  $V_1$  - siła napędowa,  $V_2$  - moment obrotowy,  $q_1, q_2$  - współrzędne opisujące położenie środka ciężkości, zakłada się, że w trakcie ruchu masa ramienia sprowadzona do środka ciężkości  $C$  nie ulega przemieszczeniu, w związku z tym odległość pomiędzy środkiem ciężkości a końcem ramienia obciążonego masą jest stała. Ponieważ rozpatrywany jest model robota planarnego, całkowita energia układu ma charakter kinematyczny. Zatem

$$V = 0 \quad L = E_k - V = E_k \quad (5)$$

Niechaj

- $\mu$  - oznacza całkowitą masę ramienia skupioną w  $C$ ,
- $J_1$  - moment bezwładności kolumny względem osi przechodzącej przez środek obrotu  $O$ ,
- $J_2$  - moment bezwładności ramienia względem osi przechodzącej przez środek ciężkości  $C$ ,
- $a$  - stałą odległość masy obciążenia  $M$  od środka ciężkości  $C$ ,
- $M(a+q_1)^2$  - moment bezwładności masy obciążenia  $M$  względem osi przechodzącej przez punkt  $O$ .

Moment bezwładności ramienia względem osi przechodzącej przez punkt  $O$

wyraża się zależnością [14]:

$$J = J_2 + \mu q_1^2 \quad (6)$$

Całkowita energia kinetyczna układu jest więc sumą następujących składników:

$$E_k = \frac{J_1(\dot{q}_2)^2}{2} + \frac{(J_2 + \mu q_1^2)(\dot{q}_2)^2}{2} + \frac{M(a + q_1)^2(\dot{q}_2)^2}{2} + \frac{(M + \mu)(\dot{q}_1)^2}{2} \quad (7)$$

Zatem równania Lagrange'a przyjmują postać

$$(M + \mu)\ddot{q}_1 - (\mu q_1 + M(a + q_1)) \dot{q}_2^2 = v_1 \quad (8)$$

$$(J_1 + J_2 + \mu q_1^2 + M(a + q_1)^2) \ddot{q}_2 + 2(\mu q_1 + M(a + q_1)) \dot{q}_1 \dot{q}_2 = v_2 \quad (9)$$

Otrzymane równania ruchu posiadają cechy charakterystyczne dla modeli dynamiki robotów tj.: nieliniowość oraz 2-gi rząd, potwierdzając tym samym uogólnienia przedstawione w podrozdziale 2.1.

## 2.2. Modyfikacja modelu dla celu sterowania

W celu uzyskania odpowiedniej, ze względu na algorytm sterowania, postaci modelu należy wprowadzić dodatkowe 2 zmienne stanu odpowiadające pierwszemu pochodnym zmiennych uogólnionych. Zapisując nowy wektor stanu jako

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T \quad (10)$$

oraz wydzielając równania przez wyrażenia stojące przy najwyższej pochodnej zmiennych stanu otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ (\mu + M)^{-1} R(x_1, M) x_4^2 + (\mu + M)^{-1} v_1 \\ - (I(x_1, M))^{-1} 2R(x_1, M) x_3 x_4 + (I(x_1, M))^{-1} v_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie:



$$R(x_1, M) = \mu x_1 + M (a + x_1)$$

$$I(x_1, M) = J_1 + J_2 + \mu x_1^2 + M (a + x_1)^2$$

Jedyną zmienną niepewną występującą w modelu jest nieznaną masę obciążenia  $M$ . Zakłada się, iż niepewność ta jest ograniczona, tzn. że znana jest górna i dolna dopuszczalna wartość obciążenia

$$0 \leq \underline{M} \leq M \leq \bar{M} \quad (12)$$

Przyjmuje się ponadto, iż masa nominalna wynosi

$$M^0 = \frac{1}{2} (\underline{M} + \bar{M}) \quad (13)$$

Przekształcenia i uproszczenia, jakim podlega model, pokazane zostaną na przykładzie równania dla zmiennej stanu  $x_3$ . Aby wyróżnić część nominalną i niepewną, lewa strona równania zostanie pomnożona przez wyrażenie  $(\mu + M^0)(\mu + M^0)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & (\mu + M^0)^{-1} (\mu x_1 + M^0 (x_1 + a)) x_4^2 + (\mu + M^0)^{-1} (\mu + M)^{-1} (M - M^0) \mu a x_4^2 + \\ & + (\mu + M^0)^{-1} (\mu + M)^{-1} v_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Oznaczając  $u_1 = (\mu + M^0)^{-1} v_1$  i wprowadzając do wzoru (14) otrzymuje się zmodyfikowane wyrażenie na  $\dot{x}_3$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & (\mu + M^0)^{-1} R(x_1, M^0) x_4^2 + (\mu + M^0)^{-1} (\mu + M)^{-1} (M - M^0) \mu a x_4^2 + \\ & + (1 - (\mu + M)^{-1} (M - M^0)) u_1 \end{aligned} \quad (15)$$

Dokonując analogicznych przekształceń na równaniu dla zmiennej  $x_4$  przekształca się je do postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & - (I(x_1, M^0))^{-1} 2 (\mu x_1 + M^0 (x_1 + a)) x_3 x_4 + 2 (M - M^0) (x_1 + a) \cdot \\ & \cdot (\mu a x_1 - J_1 - J_2) (I(x_1, M))^{-1} x_3 x_4 + (1 - (I(x_1, M))^{-1} (M - M^0) (x_1 + a)) u_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Definiując

$$u = [u_1 \quad u_2]^T = [(\mu + M^0)^{-1} v_1 \quad (I(x_1, M^0))^{-1} v_2]^T \quad (17)$$

$$f(x,t) = [x_3 \quad x_4 \quad f_3(x,t) \quad f_4(x,t)]^T$$

$$f_3(x,t) = (\mu + M^0)^{-1} R(x_1, M^0) x_4^2 \quad (18)$$

$$f_4(x,t) = - (I(x_1, M^0))^{-1} 2 R(x_1, M^0) x_3 x_4$$

$$\Delta f(x,t,M) = [0 \quad 0 \quad \Delta f_3(x,t,M) \quad \Delta f_4(x,t,M)]^T$$

$$\Delta f_3(x,t,M) = (\mu + M)^{-1} (\mu + M^0)^{-1} (M - M^0) \mu a x_4^2 \quad (19)$$

$$\Delta f_4(x,t,M) = [I(x_1, M^0)]^{-1} (I(x_1, M))^{-1} 2 (M - M^0) (x_1 + a) \cdot$$

$$\cdot (\mu a x_1 - J_1 - J_2) x_3 x_4$$

układ równań (11) można doprowadzić do postaci ogólnej, w której wyróżnia się część nominalną (znaną) oraz niepewną

$$\dot{x} = f(x,t) + \Delta f(x,t,M) + (B + \Delta B(x,t,M)) u(t) \quad (20)$$

gdzie:

B oraz  $\Delta B$  są macierzami o wymiarze  $4 \times 2$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta B(x,t,M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -(\mu + M)^{-1} (M - M^0) & 0 \\ 0 & - (I(x_1, M))^{-1} (M - M^0) (x_1 + a) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Część nominalną modelu rozбивa się dodatkowo na liniową oraz nieliniową. Przyjmując zatem, że

$$g(x,t) = [f_3(x,t) \quad f_4(x,t)]^T \quad (22)$$



i wprowadzając macierz o wymiarach  $4 \times 4$  taką, iż

$$f(x, t) = Ax + Bg(x, t)$$

uzyskuje się model układu dynamicznego, który można już bezpośrednio wykorzystać w formułowaniu prawa sterowania odpornego na niepewność, ze względu na występowanie składnika liniowego, nieliniowego oraz niepewnego

$$\dot{x} = Ax + B u(t) + Bg(x, t) + \Delta f(x, t, M) + \Delta B(x, t, M) u(t) \quad (23)$$

### 3. Algorytm sterowania

#### 3.1. Założenia wstępne

Problem sterowania układem napędowym robota jest rozważany przy pominięciu stałej czasowej napędów. Przyjęcie powyższego założenia wydaje się słuszne dla przypadku, gdy szybkość nadążania za zadaną trajektorią jest mała w porównaniu z częstotliwością zmian impulsów sterujących napędami. Jak wykazano w pracy [10], obecnie stosowane silniki czynią zadość postawionemu wymaganiu.

W pracy ograniczono się do przypadku znajomości z góry zadanej trajektorii ruchu (dany jest przebieg w czasie zadanej trajektorii). Przyjmuje się także, iż robot nadąża za celem wolno zmieniającym się, a główna trudność w ujęciu zagadnienia wynika z nieznaności masy obciążenia. Nie analizuje się natomiast problemu nadążania za szybko zmieniającym się obiektem o nieznannej trajektorii ruchu.

Ponadto żąda się, aby zadaną trajektorię ruchu można było zapisać w postaci:

$$\dot{x}_z = Ax_z + B\theta^f \quad (24)$$

gdzie:

$x_z$  - n wymiarowy wektor współrzędnych zadanych stanu, A i B to macierze występujące w modelu obiektu sterowania danym zależnością (4),  $\theta^f$  - r wymiarowy wektor drugich pochodnych zmiennych stanu.

Wówczas do syntezy prawa sterowania można wprowadzić sprzężenie zwrotne od uchybu rozumianego jako różnica pomiędzy wartościami aktualnymi a zadanymi, sprowadzając tym samym problem nadążania do problemu stabilizacji stanu na poziomie zera.

### 3.2. Synteza prawa sterowania

Dla modelu dynamiki opisanego zależnością (4) formułuje się prawo sterowania w oparciu o problem liniowo-kwadratowy. Rozwiązaniem tego problemu jest sterowanie liniowo zależne od stanu rozumianego jako różnica pomiędzy wartościami aktualnymi a zadanymi. Prawo to jednakże jest słuszne dla modelu liniowego, a rozpatrywany układ dynamiczny jest opisany równaniami różniczkowymi silnie nieliniowymi, w związku z tym do tak określonego sterowania wprowadza się poprawkę.

Minimalizowany wskaźnik jakości można zapisać w postaci:

$$J = \int_0^T (x(t) - x_k)^T Q(x(t) - x_k) + (u(t) - u_k)^T R (u(t) - u_k) dt \quad (25)$$

gdzie:

$x(t)$  jest  $n$  wymiarowym wektorem stanu,  $u(t)$  -  $r$  wymiarowym wektorem sterowań,  $Q$  - symetryczną macierzą dodatnio półokreśloną o wymiarze  $n \times n$ ,  $R$  - symetryczną macierzą dodatnio określoną o wymiarze  $r \times r$ .

Horyzont sterowania  $T$  jest długi. Problem sprowadza się do doprowadzenia i utrzymania układu w zadanym położeniu końcowym  $x_k$ . Sterowanie minimalizujące zatem wskaźnik (25) przyjmie postać [12]

$$\Delta u_{opt}(t) = -R^{-1}B^T P(t)\Delta x(t) = -K(t)\Delta x(t) \quad (26)$$

gdzie:

$P(t)$  jest rozwiązaniem nieliniowego macierzowego równania różniczkowego zwanego równaniem Riccatiego, które ma postać:

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q \quad (27)$$

z warunkiem końcowym  $P(T) = 0$

$A$  - macierzą o wymiarze  $n \times n$

$B$  - macierzą o wymiarze  $n \times r$

Macierze te opisują liniową część modelu dynamiki robota (4). Zgodnie z założeniami podanymi w podrozdziale 3.1, sterowanie optymalne w sensie przyjętego wskaźnika jakości realizowane jest w układzie zamkniętym w postaci sprzężenia zwrotnego od uchybu nadążania  $\Delta x$ .

Jak już wspomniano, otrzymane sterowanie wymaga korekcji. Jednym z najczęściej stosowanych sposobów kompensacji nieliniowości modelu jest ich wprowadzenie do prawa sterowania z przeciwnym znakiem [6], [7].

Zapewnienie nadążania wzdłuż zadanej trajektorii realizowane jest poprzez wyznaczenie sterowania "programowego", które odpowiada drugiej pochodnej zmiennych zadanego wektora stanu, a więc przyspieszeniu na trajektorii



zadanej. Ze względu na występującą nieznaną wielkość aktualnie przenoszonego obciążenia, w celu zagwarantowania nadążania programowego niezbędne jest dołączenie do prawa sterowania poprawki odpornej na niepewność.

Algorytm sterowania można zatem przedstawić w następującej postaci:

$$\dot{\varphi}(t) = \underbrace{-K(t)\Delta x(t)}_a - \underbrace{g(x,t)}_b + \underbrace{\theta^f(t)}_c + \underbrace{p_E(x,t)}_d \quad (28)$$

gdzie poszczególne składniki odpowiednio oznaczają sterowanie

a - liniowe w układzie zamkniętym ze sprzężeniem zwrotnym od uchybu nadążania,

b - kompensujące nieliniowości ( w układzie otwartym ),

c - "programowe",

d - gwarantujące odporność na niepewność.

Szczegółowego omówienia wymaga określenie sposobu obliczania poprawki  $p_E$ . Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności jest omawiana w pracach [6], [7], [9], [10], [11]. Jednym ze sposobów rozwiązania postawionego zagadnienia jest algorytm ślizgowy. Opiera się on na nieciągłym sterowaniu zmieniającym strukturę po osiągnięciu hiperpłaszczyzny przełączającej. W rezultacie daje to tzw. ruch ślizgowy na rozmałości, w której wyróżnia się przełączające hiperpłaszczyzny. Zasadniczymi zaletami tego typu algorytmów są: odporność na zakłócenia, znikomo mała wrażliwość na dynamiczne zmiany parametrów obiektu, jak również możliwość linearyzacji obiektu [9], [10].

W artykułach [6], [7] nadążanie robota za zadaną trajektorią w warunkach niepewności realizowane jest przez algorytm stabilizowalności praktycznej układu dynamicznego, dla którego prawo sterowania ma postać analogiczną do (28). Różnica wyraża się w odmiennym sposobie wyznaczania  $K(t)$  oraz  $p_E$ .

W oparciu o rozważania przeprowadzone w publikacji [11] w niniejszej pracy przyjęto następującą postać składnika gwarantującego odporność sterowania na niepewność.

$$p_E = -U \frac{B^T F \Delta x}{\|B^T F \Delta x\|} \quad \text{dla } B^T F \Delta x \neq 0 \quad (29)$$

$$p_E = 0 \quad \text{dla } B^T F \Delta x = 0$$

gdzie:

U jest diagonalną macierzą stałych o wymiarze  $r \times r$ .

W przypadku gdy  $\Delta x$  jest wektorem jednoelementowym,  $p_E$  ma charakter przekąźnikowy. Koszt składnika  $p_E$  nie jest uwzględniony we wskaźniku jakości, ale jest ograniczony. Graniczna wartość każdego z elementów

wektora  $p_E$  nie przekracza odpowiadającej mu wartości elementu na przekątnej głównej diagonalnej macierzy  $U$ .

$$\forall_i p_{E_i} \leq u_{ii} \quad \text{gdzie } i = 1 \dots r \quad (30)$$

Wprowadzając zatem sterowanie (28) do modelu dynamiki (4) otrzymuje się

$$\dot{x} = Ax + Bg(x,t) + \Delta f(x,t,M) + B(-K(t)\Delta x - g(x,t) + \theta^f(t) + p_E) + \Delta B(x,t,M) \phi(t) \quad (31)$$

Kompensując nieliniowość modelu oraz korzystając z założenia o postaci zadanej trajektorii  $\dot{x}_z = Ax_z + B\theta^f$  modyfikuje się model dynamiki do postaci

$$\dot{x} - \dot{x}_z = A(x - x_z) + \Delta f(x,t,M) - BK(t)\Delta x + Bp_E + \Delta B(x,t,M) \phi(t) \quad (32)$$

Oznaczając przez  $\Delta x = x - x_z$  i wprowadzając do (32) uzyskuje się równanie dynamiki modelu dla odchyłki współrzędnych od wartości zadanych

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x - BK(t)\Delta x + \Delta f(x,t,M) + \Delta B(x,t,M) \phi(t) + Bp_E \quad (33)$$

Z własności modelu (4) wynika, że składniki  $\Delta f$  oraz  $\Delta B$  można zdekompensować do postaci

$$\Delta f(x,t,M) = B F(x,t,M) \quad (34)$$

$$\Delta B(x,t,M) = B E(x,t,M)$$

Zatem

$$\Delta \dot{x} = (A - BK(t))\Delta x + Bp_E + B(F(x,t,M) + E(x,t,M) \phi(t)) \quad (35)$$

Przyjmując, iż całkowitą niepewność modelu przeliczoną na tor sterowania można wyrazić jako

$$e = F(x,t,M) + E(x,t,M) \phi(t) \quad (36)$$

ostatecznie otrzymuje się równanie

$$\Delta \dot{x} = (A - BK(t))\Delta x + B(p_E + e) \quad (37)$$



Aby zaprezentowany algorytm sterowania spełniał podstawową swoją funkcję, tj. nadążanie robota za zadaną trajektorią, wartość  $u_{1i}$  w składniku  $p_E$  dla każdego  $i$  ( $i = 1 \dots r$ ) musi być większa od normy z całkowitej niepewności modelu "przeliczonej na tor sterowania", tzn.

$$\forall_i u_{1i} \geq |e_i| \quad \text{gdzie } i = 1 \dots r \quad (38)$$

Słuszność powyższego warunku można wykazać w oparciu o równania Bellmana - Hamiltona - Jacobiego [11] .

W publikacji [11] przyjęto, iż  $U$  jest równe górnemu ograniczeniu normy z całkowitej niepewności modelu. Podano tam również sposób jego oszacowania. W niniejszej pracy przyjęto, że  $U$  jest macierzą diagonalną, ze względu na możliwość bezpośredniego oddziaływania na każdy tor sterowania. Takie przyjęcie postaci  $U$  wydaje się być uzasadnione, ponieważ w zaprezentowanym algorytmie nie szacuje się wartość  $U$ . Poza tym w przypadku, gdy warunek (38) jest spełniony z dużym nadmiarem, niepotrzebnie wzrasta koszt sterowania, a łatwiej tego uniknąć mogąc oddziaływać na poszczególne tor sterowania oddzielnie .

Istotnym problemem jest zatem dobranie elementów przekątnej głównej diagonalnej macierzy  $U$  . Należy podkreślić, że dla poprawnych w sensie warunku (38) wartości macierzy  $U$  zostanie osiągnięte zadane położenie końcowe, dla błędnych natomiast algorytm będzie się rozbiegał .

Poprawne wartości macierzy  $U$  należy dobrać w wyniku symulacji konkretnego modelu dynamiki robota. W związku z tym zastosowanie algorytmu sterowania do fizycznie istniejącego robota wymaga przeprowadzenia badań symulacyjnych poprzedzających wdrożenie algorytmu do układu regulacji.

### 3.3. Postać prawa sterowania dla rozważanego modelu manipulatora

Prawo sterowania dla modelu robota planarnego o dwóch stopniach swobody wyraża się zależnością (28)

$$\phi(t) = -K(t)\Delta x - g(x,t) + \theta^f(t) + p_E(\Delta x, t)$$

gdzie:

$\phi(t)$ ,  $g(x,t)$ ,  $\theta^f(t)$ ,  $p_E(\Delta x, t)$  są wektorami o wymiarze 2,

$x$  jest wektorem o wymiarze 4,

$K(t) = -R^{-1}B^T P(t)$  jest macierzą o wymiarze  $2 \times 4$ ,

przy czym poszczególne składniki można wyrazić w jawny sposób

$$\Delta x = [x_1 - x_{1z} \quad x_2 - x_{2z} \quad x_3 - x_{3z} \quad x_4 - x_{4z}]^T \quad (39)$$

$$g(x, t) = \begin{bmatrix} (x_1 \mu + M^0(x_1 + a)) x_4^2 (\mu + M^0)^{-1} \\ 2(\mu x_1 + M^0(x_1 + a)) x_3 x_4 (I(x_1, M^0))^{-1} \end{bmatrix} \quad (40)$$

gdzie:

$$I(x_1, M^0) = J_1 + J_2 + \mu x_1^2 + M^0(x_1 + a)^2$$

$$\theta^f(t) = [\theta_1^f(t) \quad \theta_2^f(t)]^T \quad (41)$$

$$PE = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \frac{B^T P \Delta x}{\|B^T P \Delta x\|} \quad (42)$$

$$\phi(t) = [\phi_1(t) \quad \phi_2(t)]^T \quad (43)$$

Całkowitą niepewność przeliczoną na tor sterowania dla tego modelu można opisać jako:

$$\dot{e} = F(x, t, M) + E(x, t, M) \phi(t)$$

gdzie:

$$e = [e_1 \quad e_2]^T$$

$$F(x, t, M) = [\Delta f_3(x, t, M) \quad \Delta f_4(x, t, M)] \quad (44)$$

$$E(x, t, M) = \begin{bmatrix} E_1(x, t, M) & 0 \\ 0 & E_2(x, t, M) \end{bmatrix}$$

Warunek (38) przyjmuje zatem postać

$$u_{11} \geq |\Delta f_3(x, t, M) + E_1(x, t, M) \phi_1(t)| \quad (45)$$

$$u_{22} \geq |\Delta f_4(x, t, M) + E_2(x, t, M) \phi_2(t)|$$

Składniki  $\Delta f_3$  oraz  $\Delta f_4$  opisuje zależność (26). Natomiast  $E_1$  i  $E_2$  oznaczają odpowiednio

$$E_1(x, t, M) = - (M - M^0) / (\mu + M) \quad (46)$$

$$E_2(x, t, M) = - (M - M^0)(x_1 + a)^2 / (J_1 + J_2 + \mu x_1^2 + M(x_1 + a)^2)$$



#### 4. Realizacja programowa algorytmu sterowania

W pracy zasymulowano i przebadano model dynamiki manipulatora o dwóch stopniach swobody. Program realizujący algorytm sterowania gwarantowanego został napisany w języku Turbo Pascal wersja 5.0[15]. Składa się on z programu nadrzędnego dostępnego pod nazwą ROBOT.PAS oraz 6 modułów rezydujących w zbiorach o nazwach: DEF.PAS, FUNC.PAS, POMOC.PAS, GRAFIKA.PAS, TRAJZ-U.PAS oraz OBLICZ.PAS. Umożliwia on zadawanie parametrów modelu dynamiki, wielkości obciążenia, współrzędnych położenia końcowego oraz rodzaju trajektorii. Nadążanie można badać dla trajektorii liniowej lub kwadratowej (w sensie zależności współrzędnej  $y$  od współrzędnej  $x$ ), przy czym zależność odpowiedniej współrzędnej od czasu może być liniowa, kwadratowa lub sześcienna. Po wykonaniu obliczeń przebiegi sterowania, trajektorii zadanej i rzeczywistej w wybranych chwilach czasu obrazowane są w tabelkach, a także graficznie na wykresach. Dodatkowo również w tabelkach podawany jest przebieg uchybu regulacji oraz niepewność modelu. Przy konstrukcji procedur całkowania równań modelu oraz równań Riccatiego korzystano z prac [8] i [12]. Przykładowe wyniki symulacji zawiera dodatek.

#### LITERATURA

- [1] Niederliński A.: Roboty przemysłowe, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1981.
- [2] Brady M. i inni : Robot motion, MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1982.
- [3] Kaczmarczyk A. : Opis matematyczny robotów (wg R.F.Paula: Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control), Biuletyn Przemysłowego Instytutu Automatyki i Pomiarów MERA-PIAP, n.5 -6/124-125, Warszawa 1987.
- [4] Kane Th.R.: The use of Kane's dynamical equations in robotics, International Journal of Robotics Research, v.2, n.3, 1983.
- [5] Saridis G.N.: Intelligent robotics control, IEEE Transaction on Automatic Control, v.AC-28, n.5, s.547-557, 1983.
- [6] Ryan E.P., Leitmann G., Corless M. : Practical stabilizability of uncertain dynamical system: application to robotic tracking, Journal of Optimization Theory and Applications, v.47, n.2, s.235-251, 1985.
- [7] Corless M., Leitmann G., Ryan E.P. : Tracking in the presence of bounded uncertainties, ACADEMIC Press, University of Manchester, 1985.
- [8] Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. : Computer Methods for Mathematical Computation, Englewood Cliffs, 1977.
- [9] Choi S.-B., Jayasuriya S. : A sliding mode controller incorporating matching applied to manipulators, Preprints of IFAC Congress, v.4, subject areas 8.1. s.290-296, Munich 1987.
- [10] Gosiewski A., Szykiewicz W. : Zastosowanie algorytmu ruchu ślizgowego do układu sterowania manipulatora robota, materiały II Krajowej Konferencji Robotyki, tom 1, s.133-140, Wrocław 1988.
- [11] Świerniak A. : Sterowanie robotem w warunkach niepewności parametrów jego układu napędowego, Z.N. Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z.96, s.257-263, 1988.

- [12] Niederliński A.: Układy wielowymiarowe automatyki, WNT, Warszawa 1974.
- [13] Kaczorek T.: Macierze w automatyce i elektronice, WNT, Warszawa, 1984.
- [14] Wilde P., Wizmur M.: Mechanika teoretyczna, WNT, Warszawa, 1977.
- [15] Bielecki J.: Rozszerzony Turbo Pascal wersja 4.0, WKi, Warszawa 1988.

Recenzent: Doc.dr h.inż. W.Mitkowski  
Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

#### CAD SYSTEM FOR PLANAR MANIPULATOR CONTROL

#### S u m m a r y

The main problem considered in the paper consists in control design for a driving system of a manipulator in the presence of uncertainty. A model of dynamics as well as a form of the control law results from an unknown value of the load for the robot. The system enables computer aided design and simulation of a guaranteed cost control for 2-degree of freedom manipulator. Strong nonlinearities, and uncertainty in parameters of the model implies a complicated control strategy. It assures compensation of the nonlinearities, robustness for the uncertainty and tracking along desired trajectory .

#### СИСТЕМА САД УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ПЛАНАРНОГО РОБОТА

#### Р е з ю м е

В работе в основном оговаривается проблема управления приводной системой робота в условиях неопределенности. Характеристический подход к динамической модели а также вида управления исходит из незнакомства величины нагрузки робота. Спроектированная система позволяет на воспомогание проектирования и симуляции гарантированного управления для модели манипулятора с 2-мя степенями свободы. В виду сильной нелинейности а также неопределенности относительно параметров модели, закон управления имеет сложную форму. Характеризуется он компенсацией нелинейности, "стойкостью" от неопределенности и прежде всего слежением за заданной траекторией.



## D O D A T E K

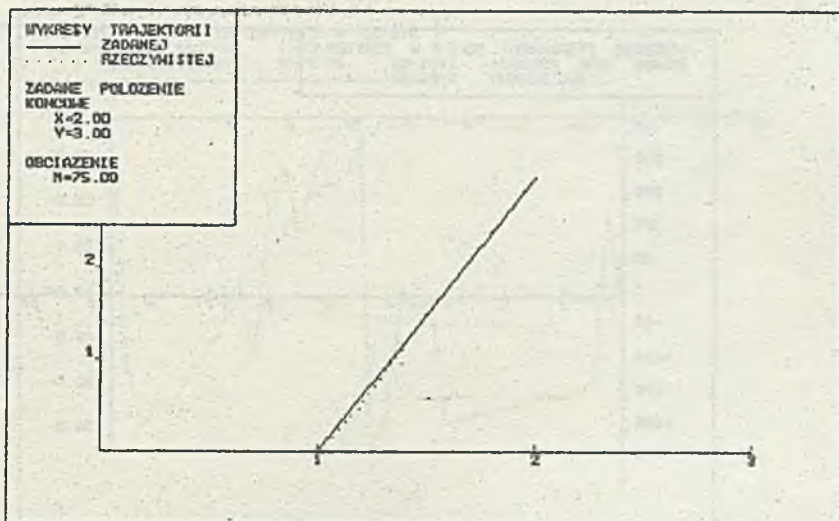
## Przykład 1 - trajektoria liniowa

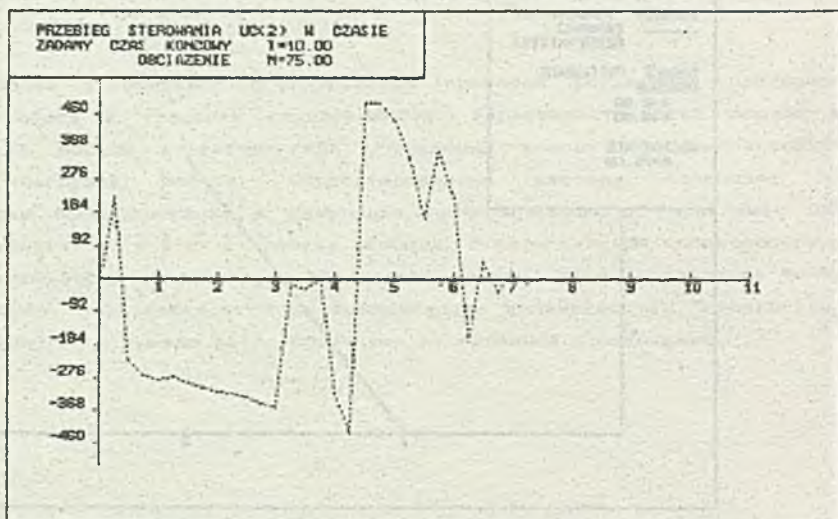
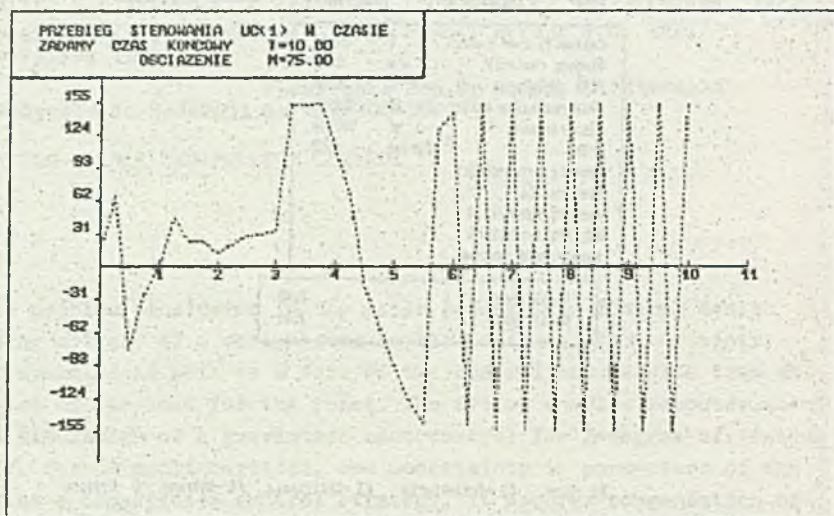
Dane      Trajektorie      Obliczenia      Wykresy      Tabele

Całkowity czas ruchu	T	10.00
Długość ramienia	arm	1.00
Masa obciążenia	M	75.00
Masa nominalna obciążenia	MO	50.00
Masa ramienia	mi	100.00
Krok	tprint	0.25
Momenty bezwładności		
Wzmocnienia		
Macierz dynamiki Q		
Macierz dynamiki R		
Współrzędne końcowe		

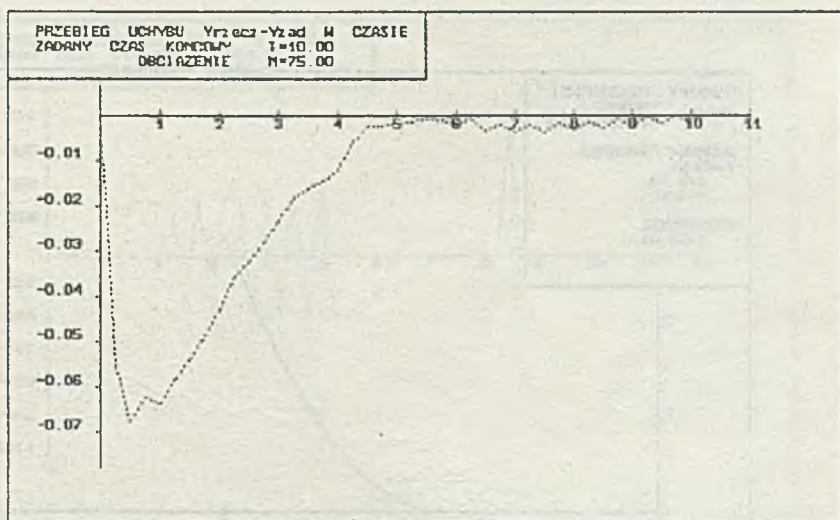
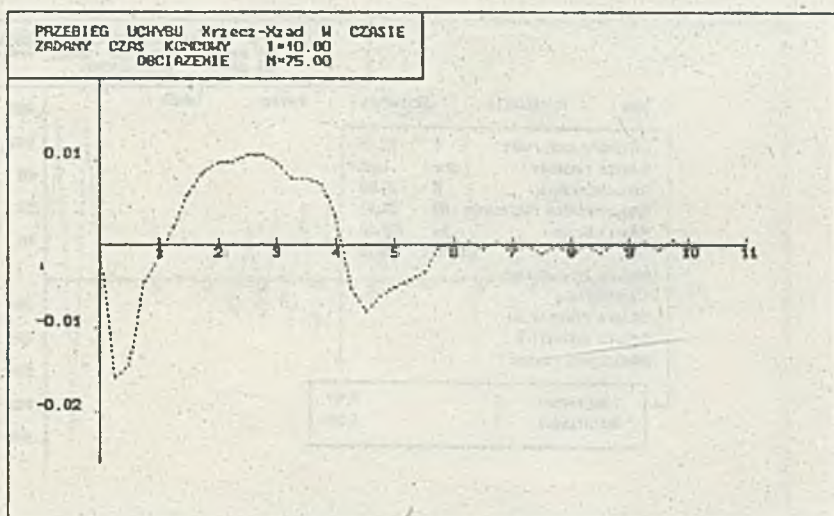
Współrzędna	X	2.00
Współrzędna	Y	3.00

F1 - Dane    F2 - Trajektorie    F3 - Obliczenia    F4 - Wykresy    Q - Wyjście









## Przykład 2 - trajektoria kwadratowa

Dane	Trajektorie	Obliczenia	Wykresy	Tabele																																												
<table border="1"> <tr> <td>Całkowity czas ruchu</td> <td>T</td> <td>11.00</td> </tr> <tr> <td>Długość ramię</td> <td>arm</td> <td>1.00</td> </tr> <tr> <td>Masa obciążenia</td> <td>M</td> <td>45.00</td> </tr> <tr> <td>Masa nominalna obciążenia</td> <td>MC</td> <td>50.00</td> </tr> <tr> <td>Masa ramienia</td> <td>mi</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>Krok</td> <td>tprint</td> <td>0.25</td> </tr> <tr> <td colspan="3">Parametry bezwładności</td> </tr> <tr> <td colspan="3">Wzrostnienia</td> </tr> <tr> <td colspan="3">Macierz dynamiki G</td> </tr> <tr> <td colspan="3">Macierz dynamiki F</td> </tr> <tr> <td colspan="3">Współrzędne końcowe</td> </tr> <tr> <td colspan="5"> <table border="1"> <tr> <td>Współrzędna X</td> <td>X</td> <td>2.00</td> </tr> <tr> <td>Współrzędna Y</td> <td>Y</td> <td>3.00</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>					Całkowity czas ruchu	T	11.00	Długość ramię	arm	1.00	Masa obciążenia	M	45.00	Masa nominalna obciążenia	MC	50.00	Masa ramienia	mi	100.00	Krok	tprint	0.25	Parametry bezwładności			Wzrostnienia			Macierz dynamiki G			Macierz dynamiki F			Współrzędne końcowe			<table border="1"> <tr> <td>Współrzędna X</td> <td>X</td> <td>2.00</td> </tr> <tr> <td>Współrzędna Y</td> <td>Y</td> <td>3.00</td> </tr> </table>					Współrzędna X	X	2.00	Współrzędna Y	Y	3.00
Całkowity czas ruchu	T	11.00																																														
Długość ramię	arm	1.00																																														
Masa obciążenia	M	45.00																																														
Masa nominalna obciążenia	MC	50.00																																														
Masa ramienia	mi	100.00																																														
Krok	tprint	0.25																																														
Parametry bezwładności																																																
Wzrostnienia																																																
Macierz dynamiki G																																																
Macierz dynamiki F																																																
Współrzędne końcowe																																																
<table border="1"> <tr> <td>Współrzędna X</td> <td>X</td> <td>2.00</td> </tr> <tr> <td>Współrzędna Y</td> <td>Y</td> <td>3.00</td> </tr> </table>					Współrzędna X	X	2.00	Współrzędna Y	Y	3.00																																						
Współrzędna X	X	2.00																																														
Współrzędna Y	Y	3.00																																														

F1 - Dane    F2 - Trajektorie    F3 - Obliczenia    F4 - Wykresy    G - Wyjście

WYKRESY TRAJEKTORI I  
 ——— ZADANEJ  
 ..... RZECZYWISTEJ

ZADANE POŁOŻENIE  
 KIERUNEK  
 X=2.00  
 Y=3.00

OBciążENIE  
 M=45.00

