ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: GÓRNICTWO z. 129 Nr kol. 784

Marian KOZDRÓJ
Małgorzata KOZDRÓJ-WEIGEL

PROPOZYCJA SKLASYFIKOWANIA POKŁADÓW KOPALŃ ORAZ OBSZARÓW POWIERZCHNI NA TERENACH GÓRNICZYCH POD WZGLĘDEM ZAGROŻENIA TĄPANIAMI I WSTRZĄSAMI

Streszczenie. W części pierwszej artykułu zaprezentowano stochastyczny model badań tąpań i wstrząsów umożliwiający poprzez konkretną liczbową ocenę sklasyfikowanie pokładów kopalń oraz obszarów powierzchni pod względem przedmiotowego zagrożenia. W drugiej części podano przykłady obliczeń wykonane w oparciu o algorytm oprogramowany w języku FORTRAN.

1. Wstęp

Stosowana i obowiązująca obecnie klasyfikacja pokładów lub partii pokładów zakłada podział na trzy stopnie zagrożenia tąpaniami.

Ogólnie, zainteresowani stwierdzają, że przedmiotowa klasyfikacja jest mało precyzyjna i powoduje szeroki wachlarz interpretacji w zaliczaniu pokładów lub ich partii do poszczególnych stopni zagrożenia tąpaniami.

W górnictwie powszechnie wiadomo, że np. przy ustalaniu zagrożenia gazowego pokładu wyznaczone są granice występowania metanu dla poszczególnych kategorii gazowości, zaś wielkość zagrożenia pyłowego ustala się na podstawie zawartości części lotnych w węglu. Natomiast przy klasyfikowaniu pokładów tąpiących nie istnieją granice liczbowe parametrów, które by określały jednoznacznie stopień zagrożenia tąpaniami. Podobnie ocena energetycznego wskaźnika skłonności węgla do tąpań W_{ET} jest jedynie metodą badania próbek i może wyłącznie służyć do uzyskania hipotetycznych danych dla określenia skłonności pokładu do tąpań, albowiem nie obejmuje wszystkich uwarunkowań tego zagrożenia.

Z powyższego wynika, że istnieje konieczność wypracowania takiej metody, która w sposób obiektywny i precyzyjny zakwalifikuje pokłady lub ich części od odpowiedniego stopnia zagrożenia tąpaniami, jak również umożliwi ocenę zagrożenia wstrząsami obiektów na powierzchni wyznaczonych obszarów.

Podstawą niniejszego opracowania będą rozważania matematyczne nad doborem rozkładów prawdopodobieństwa, które dobrze opiszą proces występowania wstrząsów i tąpań w przyjętym przedziale czasu, w oparciu o dane uzyskane ze wszystkich kopalń węgla kamiennego.

Dobór probabilistycznej metody w przedmiotowym zakresie jest uzasadniony tym, że uwzględnia wszystkie czynniki i ich wagę w procesie występowania wstrząsów i tąpań oraz podaje konkretną liczbową ocenę, za pomocą której należy spodziewać się, że:

- zostaną uszeregowane pokłady i ich części wg wzrastającego lub malejącego zagrożenia tąpaniami w czasie,
- umożliwi się sklasyfikowanie nie tylko pokładów, ale i kopalń w zależności od wielkości prawdopodobieństwa występowania wstrząsu o energii większej od wielkości przyjętej jako granicznej (np. $> 10^5$ J), co ułatwi między innymi wyznaczenie kolejności w pierwszeństwie wyposażenia w odpowiednią aparaturę prognostyczną dla profilaktyki przeciw tąpaniowej,
- w oparciu o analizę prawdopodobieństwa występowania wstrząsów o znacznych energiach (np. $> 10^7$ J) będą ocenione zagrożenia dla obiektów na powierzchni i tym samym będzie można wskazać obszary wymagające priorytetowego zabezpieczenia, co jest istotne przy ograniczonych środkach.

2. Stochastyczny model badań wstrząsów w kopalni

2.1. Wprowadzenie

Podstawą oceny wstrząsów w kopalni będzie rozkład $P(x;\ t)$ prawdopodobieństwa zaistnienia x wstrząsów w umownie przyjętym odstępie czasu $(t_o,\ t_o + t)$, gdzie $t > 0$. Rozkład ten wyprowadzimy, przyjmując następujące założenia:

1) Szukane prawdopodobieństwo jest niezależne od wartości t_o - co oznacza, że wstrząsy w kopalni eksploatującej pokłady skłonne do tąpań są niezależne od chwili rozpoczęcia obserwacji.
2) Prawdopodobieństwo zaistnienia $(x + 1)$ - wstrząsów w krótkim wobec t odstępie czasu $(t, t + \Delta t)$ wynosi $\lambda(x,t).\Delta t$, przy czym kształt funkcji $\lambda(x,t)$ jest określony przez:
   a) ogół warunków w danej kopalni,
   b) równość

$$\sum_{x=0}^{N} P(x,t) = 1 \qquad (1)$$

   gdzie:
   N - liczba wszystkich możliwych wstrząsów w czasie t,
   t - dowolna liczba dodatnia.
3) Prawdopodobieństwo zaistnienia najmniej dwóch wstrząsów w kopalni w odstępie czasu $(t, t + \Delta t)$, jeżeli zaistniało już x wstrząsów w odstępie czasu $(t_o, t_o + t)$, wynosi $o(\Delta t)$, które jest małe wobec Δt, zdąża

szybciej do zera niż Δt, można je zatem pominąć. (Uwaga: gdyby bowiem prawdopodobieństwo to nie było małe, oznaczałoby to niedopuszczalnie wysoką częstość wstrząsów).

4) Prawdopodobieństwo zdarzenia, że nie zajdzie ani jeden wstrząs w odstępie czasu $(t, t + \Delta t)$, jeżeli zaistniało już x wstrząsów w odstępie czasu $(t_o, t_o + t)$, wynosi $1 - \lambda(x,t) \cdot \Delta t - o(\Delta t)$.

Z wyżej przyjętych założeń wynikają następujące relacje:

$$P(x,t + \Delta t) = P(x,t) \cdot \left[1 - \lambda(x,t) \cdot \Delta t - o(\Delta t)\right] + \tag{2}$$

$$+ P(x - 1,t) \cdot \lambda(x - 1,t) \cdot \Delta t + \sum_{n=2}^{x} P(x - n,t) \cdot o(\Delta t)$$

i

$$P(0,t + \Delta t) = P(0,t) \cdot \left[1 - \lambda(0,t) \cdot \Delta t\right] \tag{3}$$

Przekształcając (2) i (3) do postaci:

$$\frac{P(x,t + \Delta t) - P(x,t)}{\Delta t} = P(x - 1,t) \cdot \lambda(x - 1,t) - P(x,t) \cdot \lambda(x,t) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{x} P(x - n,t) \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} - P(x,t) \cdot \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \tag{4}$$

i

$$\frac{P(0,t + \Delta t) - P(0,t)}{\Delta t} = -P(0,t) \cdot \lambda(0,t) \tag{5}$$

a następnie przechodząc do granicy przy $\Delta t \to o$, otrzymujemy rekurencyjny układ równań różniczkowych liniowych:

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = - \lambda(0,t) \cdot P(0,t) \tag{6}$$

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = \lambda(x - 1,t) \cdot P(x - 1,t) - \lambda(x,t) \cdot P(x,t) \tag{7}$$

Rozwiązanie tego układu winno spełniać warunki początkowe:

$$P(0,0) = 1 \tag{8}$$

$$P(x,0) = 0 \quad \text{dla} \quad x = 1,2,3,\ldots \tag{9}$$

i jest zależne od kształtu funkcji $\lambda(x,t)$.

Układ równań (6) i (7) przedstawia pewien typ procesu stochastycznego z czasem ciągłym. Jest to tzw. proces Markowa, jednorodny w czasie. Jak dalej pokażemy, trzy różne postacie funkcji $\lambda(x,t)$ prowadzą do rozwiązań spełniających warunek (1).

2.2. Rozkład Poissona (rozwiązanie pierwsze)

Załóżmy, że:

$$\lambda(x,t) = \lambda = \text{const} > 0 \tag{10}$$

Hipoteza ta jest równoważna przypuszczeniu, że wstrząsy w kopalni są losowo niezależne. Układ równań (6) i (7) przyjmuje wówczas postać:

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\lambda \cdot P(0,t), \tag{11}$$

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = \lambda \cdot \left[P(x-1,t) - P(x,t)\right] \quad x = 1,2,3,\ldots \tag{12}$$

Z (11) oraz (8) otrzymujemy:

$$P(0,t) = e^{-\lambda t} \tag{13}$$

Następnie z (12) oraz (9) otrzymujemy rekurencyjnie $P(1,t)$, $P(2,t)$ itd. Rozwiązania te wyrażają się wzorem:

$$P(x,t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \tag{14}$$

określającym tzw. proces jednorodny Poissona. Warunek (1) jest tu spełniony, gdyż:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = 1 \tag{15}$$

a więc wzór (14) określa rozkład prawdopodobieństwa. Rozkład ten możemy otrzymać z rozkładu Poissona, określonego wzorem:

$$P(x = r) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} \quad r = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

przyjmując:

$$\mu = \lambda \cdot t \tag{17}$$

Zmienna losowa rozkładu (16) ma wartość średnią:

$$\bar{x} = \mu \tag{18}$$

oraz wariancję σ_x^2 równą wartości średniej, czyli:

$$\sigma_x^2 = \bar{x} = \mu \tag{19}$$

Zmienna losowa rozkładu (14) ma zatem wartość średnią $\bar{x}(t)$ i wariancję $\sigma_x^2(t)$ określone wzorami:

$$\bar{x}(t) = \lambda t, \qquad \sigma_x^2(t) = \lambda t, \tag{20}$$

więc:

$$\bar{x}(t) = \sigma_x^2(t) \tag{21}$$

Ponadto:

$$\frac{P(x+1,t)}{P(x,t)} = \frac{(\lambda t)^{x+1}}{(x+1)!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{x!}{(\lambda t)^x} \cdot e^{\lambda t} = \frac{\lambda t}{x+1} \tag{22}$$

Stąd wynika, że ciąg prawdopodobieństw $P(0,t,)$, $P(1,t)$, $P(2,t)$,... rośnie dopóki $x < \lambda t - 1$, a maleje, gdy $x > \lambda t - 1$. W przypadku więc gdy wstrząsy w kopalni mają rozkład Poissona, najbardziej prawdopodobną liczbą $x_0(t)$ wstrząsów (w odstępie czasu o długości t) jest $x_0(t) = C(\lambda t-1)$ Przyjmując, że $t = t_2 - t_1 > 0$, Oznaczmy przez:

$$P_{ij}^{(t)} = P\left\{x_{t_2} = j \,\middle|\, x_{t_1} = i\right\}$$

prawdopodobieństwo warunkowe, że jeżeli w odstępie czasu $(t_0, t_0 + t_1)$ zaistniało $x_{t_1} = i$ wstrząsów, to w odstępie czasu (t_1, t_2) zaistnieje $(j - i)$ wstrząsów.

Ponieważ wstrząsy w kopalni są losowo niezależne:

$$P_{ij}^{(t)} = P(x_{t_2} = j \mid x_{t_1} = i) = \frac{P(x_{t_1} = i)\, P(x_{t_2} - x_{t_1} = j - i)}{P(x_{t_1} = i)} =$$

$$= P(x_{t_2} - x_{t_1} = j - i),$$

a więc:

$$P_{ij}^{(t)} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \tag{23}$$

dla

$$i = 0,1,2,\ldots, \qquad j - i = 0,1,2,\ldots$$

funkcja $P_{ij}^{(t)}$ jest też rozkładem Poissona.

Z własności ogólnych rozkładów prawdopodobieństw wynika, że:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(t)} = 1 \tag{24}$$

$$P_{ii}^{(t)} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \tag{25}$$

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}^{(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!\, e^{\lambda t}} = 0 \tag{26}$$

Zauważmy relacje:

$$q_i = \lim_{t \to 0(+)} \frac{1 - P_{ii}^{(t)}}{t} = \lim_{t \to 0(+)} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0(+)} \frac{-\lambda(1 - e^{-\lambda t})}{-\lambda t} = \lambda \tag{27}$$

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0(+)} \frac{P_{ij}^{(t)}}{t} = \lim_{t \to 0(+)} \frac{(\lambda t)^{j-i} \cdot e^{-\lambda t}}{t(j-i)!} =$$

$$= \begin{cases} \lambda & \text{dla} \quad j = i + 1 \\ 0 & \text{dla} \quad j \neq i + 1 \end{cases} \tag{28}$$

Wyrażenia q_i i q_{ij} nazywane są intensywnościami badanego procesu stochastycznego. Relacja (27) $1 - P_{ii}^{(t)}$ wyraża prawdopodobieństwo, że w odstępie czasu $(t_1, t_1 + 1)$ zdarzy się choć jeden wstrząs, jeżeli w odstępie czasu $(t_0, t_0 + t_1)$ zdarzyło się i wstrząsów ($t_0 > 0$ i $t_1 > 0$ dowolne).

2.3. Rozkład Furry'ego-Yulé'a (rozwiązanie drugie)

Załóżmy, że:

$$\lambda(x,t) = \lambda x \qquad \lambda \text{ - stała dodatnia} \tag{28'}$$

tj. że $\lambda(x,t)$ jest funkcją liniową, rosnącą niezależną od czasu t. Tym samym odrzucamy hipotezę niezależności losowej wstrząsów, ale zachowujemy hipotezę, że ogół warunków w danej kopalni nie zmienia się w czasie prowadzonych badań w sposób istotny.

Można łatwo spostrzec, że z (28') wynika konieczność przyjęcia, że od chwili $t_o = 0$ zaistniał przynajmniej jeden wstrząs. W przeciwnym bowiem razie układ (6) i (7) zredukowałby się do równania trywialnego:

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = 0 \tag{29}$$

o rozwiązaniu:

$$P(x,t) = \text{const}$$

nie mogącym spełnić warunku (1). Wynik ten jest oczywisty.

Przy rozpatrywaniu ciągu wstrząsów jako "epidemii" musimy założyć, że epidemia ta została zapoczątkowana.

Załóżmy więc, że od chwili $t_o = 0$ zaszło k wstrząsów (k=1,2,3,...) Prawdopodobieństwo $P(x,t)$, że w kolejnym odstępie czasu $(0,t)$ zaistnieje jeszcze x wstrząsów, jest określone przez układ równań:

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\lambda k \cdot P(0,t), \tag{30}$$

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = -\lambda \cdot (x+k) \cdot P(x,t) + \lambda \cdot (x+k-1) \cdot P(x-1,t) \tag{31}$$

gdzie: $k = 1,2,3,...,$ $x = 1,2,3$. Rozwiązanie układu (30) i (31) winno spełniać warunki początkowe:

$$P(x,0) = 0 \quad \text{dla} \quad x = 1,2,3,... \tag{32}$$

i

$$P(0,0) = 1 \tag{33}$$

Stosując metodę analogiczną do użytej przy rozwiązywaniu układu (11) i (12), otrzymujemy:

$$P(x,t) = \binom{x+k-1}{x} e^{-k\lambda t} (1-e^{-\lambda t})^x \tag{34}$$

$x = 0,0,1,2,...$

Zauważmy, że:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} e^{-k\lambda t} (1-e^{-\lambda t})^x = e^{-k\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} (1-e^{-\lambda t})^x = 1$$

Podstawiając bowiem $z = 1 - e^{-\lambda t}$, otrzymujemy

$$\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{x}(1-e^{-\lambda t})^{x} = \sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{x} z^{x} =$$

$$= 1 + \binom{k}{1}z + \binom{k+1}{2}z^{2} + \binom{k+2}{3}z^{3} + \ldots = (1-z)^{-k} = e^{k\lambda t}$$

Ostatecznie:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{x} e^{-k\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{x} = e^{-k\lambda t}\cdot e^{k\lambda t} = 1$$

Widzimy zatem, że związek (34) określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, zwany rozkładem Furry'ego-Yule'a. Wartość oczekiwana zmiennej losowej X podlegającej rozkładowi Furry'ego-Yule'a:

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}(t) = ke^{\lambda t} \tag{35}$$

a wariancja

$$6_{x}^{2} = 6_{x}^{2}(t) = k(e^{2\lambda t} - e^{\lambda t}) \tag{36}$$

Stosując oznaczenie analogiczne do użytych we wzorach (23) do (28), załóżmy, że do chwili t zaistniało $k \geqslant 1$ przypadków wystąpienia wstrząsów i oznaczmy przez $P_{kj}^{(t)}$ prawdopodobieństwo, że od chwili $t = (t_o + t_1)$, gdzie $t_1 > t_o$, zaistnieje jeszcze $x = j-k$ wstrząsów. Jest:

$$P_{kj}^{(t)} = P(j-k, t), \tag{37}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_{kj}^{(t)} = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots, \quad j \geqslant k) \tag{38}$$

$$q_{k} = \lim_{t\to 0(+)} \frac{1 - P_{kk}^{(t)}}{t} = k\lambda \tag{39}$$

$$q_{kj} = \lim_{t\to 0(+)} \frac{P_{kj}^{(t)}}{t} = \begin{cases} k & \text{dla} \quad j = k+1 \\ 0 & \text{dla} \quad j \neq k, k+1 \end{cases} \tag{40}$$

Intensywności q_k i q_{kj} procesu Furrye'go-Yule'a są niezależne od czasu t, ale zależne od liczby k wstrząsów w kopalni do chwili t_o.

Wzór (34) upraszcza się znacznie przy przyjęciu $k = 1$, tj. przy przyjęciu, że początek serii wstrząsów zgadza się z początkiem obranego przedziału czasu $(0,t)$. Przyjęcie to jest dopuszczalne na mocy hipotezy o dowolności odbioru momentu t_o. Otrzymujemy wówczas wzór:

$$P(x,t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^x \qquad x = 0,1,2,... \tag{41}$$

Zauważmy, że:

$$\lim_{x \to \infty} P(x,t) = 0 \tag{42}$$

oraz:

$$P(0,t) > P(1,t) > P(2,t)...$$

Dla zmiennej losowej X o rozkładzie (41) wartość oczekiwana wyraża się wzorem:

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = e^{\lambda t} \tag{43}$$

a wariancja:

$$\sigma_x^2 = \sigma_x^2(t) = e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1) \tag{44}$$

a więc:

$$\sigma_x^2 = \bar{x}(\bar{x} - 1) \tag{45}$$

Jeżeli $\bar{x} > 2$, wówczas $\sigma_x^2 > \bar{x}$.

2.4. <u>Rozkład Poly'a</u> (rozwiązanie trzecie)

Załóżmy, że:

$$\lambda(x,t) = \frac{v + x}{a + t} \qquad (a,v - \text{stałe}) \tag{46}$$

Rozwiązanie to przyjmuje postać tzw. rozkładu Poly'a:

$$P(x,t) = c \cdot \binom{v+x-1}{x} \left(\frac{t}{a+t}\right)^x \qquad x = 0,1,2,... \tag{47}$$

gdzie:

$$P(0,t) = c = \left(\frac{a}{a+t}\right)^v \tag{48}$$

Dla zmiennej losowej X o rozkładzie (47):

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \frac{v\ t}{a} \tag{49}$$

$$6_x^2 = 6_x^2(t) = \frac{v\ t}{a} \cdot \left(1 + \frac{t}{a}\right) \tag{50}$$

Dla oszacowania $\bar{x}$ oraz 6_x^2 wykorzystujemy estymatory m_1 i S^2, a następnie ze wzorów (49) i (50) wyrażamy stałe a i v przez $\bar{x}$ i 6_x^2. Otrzymujemy wówczas:

$$a = \frac{\bar{x}\ t}{6_x^2 - \bar{x}} \tag{51}$$

$$v = \frac{\bar{x}^2}{6_x^2 - \bar{x}} \tag{52}$$

Ze wzorów tych wynika, że stałe a i v mają zawsze jednakowe znaki $a > 0$ i $v > 0$, gdy $6_x^2 > \bar{x}$, zaś $a < 0$ i $v < 0$, gdy $6_x^2 < \bar{x}$.

Z teoretycznego punktu widzenia interesujące jest zagadnienie, czy można znaleźć inne praktyczne przydatne rozkłady liczby wstrząsów spełniające warunki (6) do (9) oraz warunek (1). Otóż można stwierdzić drogą efektywnego rozwiązania równań (6) i (7), że przy dowolnym obiorze ciągu funkcji:

$$\lambda(0,t), \quad \lambda(1,t), \quad \lambda(2.t), \ldots \tag{53}$$

można otrzymać rozwiązania spełniające warunki początkowe (8) i (9). Jednak rozwiązania te mogą nie spełniać warunku (1). Z rozważań naszych wynika, że przy ustalonym t ciąg (53) jest niemalejący. Jeżeli ciąg (53) jest rosnący, to wzrastanie nie może być zbyt szybkie. Mówi o tym twierdzenie: "Na to, aby wzór (1) był spełniony dla wszystkich t, potrzeba i wystarczy, by szereg:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x,t)} \tag{54}$$

był rozbieżny".

Wynika stąd, że tempo wzrastania ciągu (53) może być co najwyżej liniowe jak w rozkładach Furry'ego-Yule'a i Poly'a, co wynika z przyjęć (28) i (46), bo szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest rozbieżny dla $0 < \alpha \leq 1$, zaś zbieżny dla $\alpha > 1$.

Gdyby ciąg (53) wzrastał szybciej niż liniowo, otrzymalibyśmy prawdopodobieństwo nieskończenie wielu strząsów w kopalni w skończonym odcinku czasu, co spowodowałoby lawinowy charakter wstrząsów.

3. Zestawienie uzyskanych wyników

1. Uzyskane rozkłady mogą być wykorzystane do stawiania prognoz wstrząsów w kopalni i oceny tych wstrząsów w danej kopalni.
Z prawdopodobieństwem:

$$\sum_{x=k_1+1}^{k_2} P(x,t)$$

należy oczekiwać, że w przedziale czasowym $(t_o, t_o + t)$ zdarzy się najmniej k_1, a najwięcej k_2 wstrząsów. Miernikiem probabilistycznym wstrząsów w kopalni może być:

$$P_o^{(t)} = 1 - P(0,t)$$

prawdopodobieństwo, że w przedziale czasowym $(t_o, t_o + 1)$ zaistnieje choć jeden wstrząs. Jeśli w badanym zbiorze danych kopalń wszystkie wartości $P_o^{(t)}$ są bliskie 1, wówczas za miernik wstrząsów można przyjąć:

$$P_k^{(t)} = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} P(x,t)$$

gdzie k obieramy tak duże, by otrzymane dla różnych kopalń wartości mierników różniły się w sposób nieprzypadkowy i dały się dzięki temu uszeregować według wielkości.

2. Gdy dla danego rozkładu empirycznego otrzymamy (po ustaleniu wartości t) wartość średnią istotnie różną od wariancji, to wyrównanie tego rozkładu za pomocą wzoru teoretycznego (14) jest niecelowe.

Spostrzeżenie to oszczędzi nam niejednokrotnie testowania (np. za pomocą χ^2) zgodności rozkładu empirycznego z przyjętym rozkładem teoretycznym.

W przypadku braku istotnej różnicy między $\bar{x}$ a 6_x^2 przyjmujemy prowizorycznie hipotezę, że rozkładem teoretycznym jest (14), dla którego najbardziej wiarygodną wartość obliczamy ze pomocą wzoru (29), czyli:

$$\lambda = \frac{\bar{x}}{t}$$

Wiarygodność hipotezy rozkładu (14) oceniamy testem χ^2. Przy obliczaniu poszczególnych prawdopodobieństw można korzystać z gotowych tablic rozkładu Poissona; zwykle jednak pociąga to za sobą konieczność zaokrąglenia faktycznie otrzymanej wartości λt. Dokładniejsze wartości prawdopodobieństw $P(x,t)$ możemy uzyskać na podstawie wzoru (14), posługując się tablicami logarytmów silni.

3. Z faktu, że zarówno rozkład dwumienny, jak rozkład Poissona są (w dość szerokich granicach zmienności swych parametrów) przybliżone przez rozkład normalny - wynika, że posiadają one szereg własności podobnych do własności rozkładu normalnego. W szczególności prawdopodobieństwo, że zmienna losowa w rozkładzie Poissona przekracza swą wartość średnią o conajmniej 3σ, jest znikowe.

Istotnie, z tablic dystrybuanty rozkładu Poissona znajdujemy np.:

a) $\bar{x} = 1, \quad \sigma = \sqrt{1} = 1, \quad \bar{x} + 3\sigma = 4$

$P(x > 4) = 1 - P(x \leqslant 4) = 1 - 0{,}996 = 0{,}004$

b) $\bar{x} = 4, \quad \sigma = \sqrt{4} = 2, \quad \bar{x} + 3\sigma = 10,$

$P(x > 10) = 1 - P(x \leqslant 10) = 1 - 0{,}997 = 0{,}003$

c) $\bar{x} = 5, \quad P(x > 11{,}708) = 0{,}000$

Podobne wyniki otrzymujemy dla innych wartości $\bar{x}$.

Wynik ten oznacza, że jest bardzo mało prawdopodobne, by w odstępie czasu o długości t liczba wstrząsów przekroczyła wartość $\lambda t + 3\sqrt{\lambda t}$. Jeśli więc fakt tak mało prawdopodobny zaistnieje, należy przypuścić, że rozkład nie jest poissonowski.

4. Warunkiem koniecznym stosowalności rozkładu (34) jest spełnianie przez wartość średnią i wariancje rozkładu empirycznego - choćby w przybliżeniu - równości:

$$6_x^2 = \frac{1}{k} \cdot \bar{x}^2 - \bar{x} \tag{55}$$

wynikającej z (35) i (36). Podobnie, warunkiem koniecznym stosowalności rozkładu (41) jest spełnianie przez wartość średnią i wariancję rozkładu empirycznego - choćby w przybliżeniu - równości (45).

Wzór (41) przekształcony do postaci:

$$P(x;t) = \frac{1}{\bar{x}}\left(1 - \frac{1}{\bar{x}}\right)^{x} \qquad x = 0,1,2,\ldots \tag{56}$$

jest bardzo dogodny dla przeprowadzania obliczeń rachunkowych - czym góruje zarówno nad rozkładem Poissona jak i rozkładem Poly'a. Oczywiście prostotę wzoru (41) w porównaniu z (34) opłaca się mniejszą pozycją oszacowań parametru $\bar{x}$, co może mieć znaczenie w przypadku stawiania prognoz długoterminowych.

5. Rozkład (47) jest dwuparametrowy (zależy od dwóch stałych a i v), co pozwala na ogół lepiej dobrać go do danego rozkładu empirycznego, niż to jest możliwe dla rozkładów (14) i (43) czy (41), zależnych od jednej stałej. W przypadku jednak, gdy dla danego rozkładu empirycznego zachodzi - choćby w przybliżeniu - równość:

$$\sigma_x^2 = \bar{x}$$

wówczas stosowanie (47) jest mało celowe, gdyż oszacowania stałych a i v uzyskanych ze wzorów (51) i (52) są mało wiarygodne (z wysokim prawdopodobieństwem są obarczone bardzo dużymi błędami).
Natomiast, gdy:

$$\sigma_x^2 > \bar{x}$$

wówczas należy stosować rozkład (47).

6. Z badania własności teoretycznych znalezionych rozkładów wynika, że

- rozkład Poissona stosujemy, gdy

$$\bar{x} \geqslant \sigma_x^2$$

- rozkład Poly'a stosujemy, gdy

$$\bar{x} < \sigma_x^2$$

- rozkład Furry'ego-Yule'a stosujemy, gdy

$$\sigma_x^2 = \bar{x}\cdot(\bar{x} - 1).$$

LITERATURA

[1] Kozdrój M.: Metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej w organizacji produkcji górniczej. "Śląsk", Katowice 1969.

[2] Poradnik Górnika: Tąpania i wstrząsy. Tom 2. "Śląsk" Katowice 1975.

[3] Volk W.: Statystyka stosowana dla inżynierów. WNT, Warszawa 1965.

[4] Kubik L.T.: Rachunek prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1973.

[5] Hellwig Z.: Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1975.

Recenzent: Prof. dr inż. Adam Szczurowski

Wpłynęło do redakcji w lipcu 1983 r.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ СИСТЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЗАЛЕЖЕЙ УГЛЯ В СВЯЗИ
С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ВЫСТУПЛЕНИЯ ТЕКТОНИЧЕСКИХ УДАРОВ
А ТАКЖЕ В СВЯЗИ С РАЙОНАМИ ПОВЕРХНОСТИ НА ТЕРРИТОРИИ
ШАХТ ПОДВЕРГНУТОЙ СОТРЯСЕНИЯМ

Р е з ю м е

В работе предложена стохастическая модель тектонических ударов и сотрясений, позволяющая на базе полученной конкретной числовой оценки, склассифицировать залежи шахт а также районов поверхности подвергнутых сотрясениям

A PROPOSAL OF THE PRINCIPLES FOR COAL BEDS CLASSIFICATIONS
CONSIDERING CRUMPS HAZARD AND REGIONS IN THE MINING AREAS
CONSIDERING SHOCK HAZARDS

S u m m a r y

A stochastic model of crumps and shocks testing has been presented which enables classification of coal beds and regions considering subject hazard. The paper in preparation will present examples of computations based on the algorithm programmed in Fortran.