

Krystian KALINOWSKI

Edward JACHNIK

ANALIZA STATYSTYCZNA POMIARÓW ZAWARTOŚCI FRAKCJI  
W NADAWIE O UZIARNIENIU 1-20 MM  
PRZEPROWADZONYCH W KWK KNURÓW

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono otrzymane wyniki analizy statystycznej pomiarów przebiegów czasowych zawartości frakcji w nadawie. Wyznaczono funkcje gęstości prawdopodobieństwa i autokorelacji. Przeprowadzono również badania stacjonarności tych przebiegów.

## 1. Wstęp

Własności przebiegu zmian zawartości frakcji ciężarowych i ich zapobieżenia w węglu surowym decydują częściowo o rozwiązaniu technologicznym procesu, doborze parametrów układów automatycznej regulacji, jak i doborze optymalnych nastaw maszyn wzbogacających. W artykule tym przedstawione zostaną otrzymane wyniki badań funkcji gęstości prawdopodobieństwa i funkcji autokorelacji przebiegów czasowych zawartości frakcji ciężarowych w nadawie. Opublikowane badania w tym kierunku są bardzo ubogie.

## 2. Opis pomiarów

Dla przeprowadzenia badań zostały pobrane próbki z przesypu taśmociągu doprowadzającego nadawę do jednej z osadzarek. Czas pomiędzy pobieraniem kolejnej próbki wynosił 240 s. Masa pojedynczej próbki wynosiła około 5 kg. Od każdej próbki oddzielono węgiel o uziarnieniu 0-1 mm, a następnie wykonano analizę densymetryczną każdej próbki i wyznaczono zawartość czterech frakcji ciężarowych:

- $Y_1$  - zawartość frakcji o gęstości  $1,3 \text{ t/m}^3$
- $Y_2$  - zawartość frakcji o gęstości  $1,3 - 1,5 \text{ t/m}^3$
- $Y_3$  - zawartość frakcji o gęstości  $1,5 - 1,8 \text{ t/m}^3$
- $Y_4$  - zawartość frakcji o gęstości  $1,8 \text{ t/m}^3$ .

### 3. Estymacja wartości średniej, wariancji i funkcji korelacji

Na rys. 1 przedstawiono graficznie otrzymane doświadczalnie rozkłady prawdopodobieństwa, a na rys. 2 funkcje autokorelacji frakcji Y1, Y2, Y3 i Y4. Do obliczeń przyjęto założenie o stacjonarności i normalności procesu. Przyjęto postać funkcji korelacji typu:

$$R(\tau) = \sigma_y^2 \cdot r(\tau) = \sigma_y^2 \cdot \exp(+|\tau|/T) \quad (3.1)$$

gdzie:

$\sigma_y^2$  - wariancja procesu,  
T - stała czasowa.

Założenia te zostaną poniżej sprawdzone. W celu wyznaczenia wartości średniej, wariancji i unormowanej funkcji korelacji posłużono się estymatorami

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_y)^2$$

$$r_1 = \frac{p_1}{p_0}$$

$$p_1 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - \bar{x}_y) \cdot (x_{i+1} - \bar{x}_y)$$

gdzie:

$\bar{x}$  - wartość średnia wyznaczona z próby,

$\bar{x}_y$  - wartość średnia dokładna

$\sigma^2$  - wariancja wyznaczona z próby

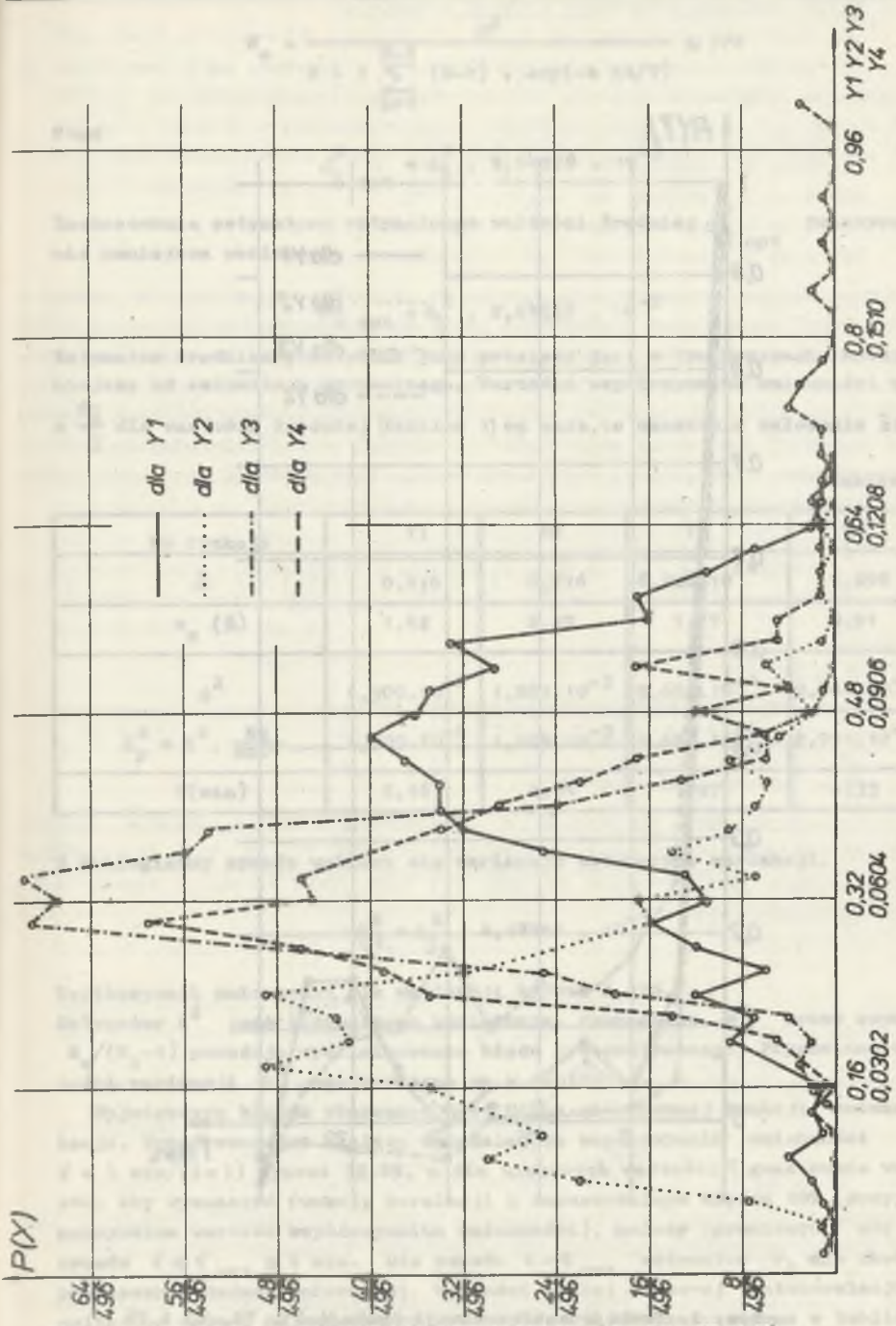
N - liczba pomiarów (496)

$\Delta t$  - krok pomiarów (4 min)

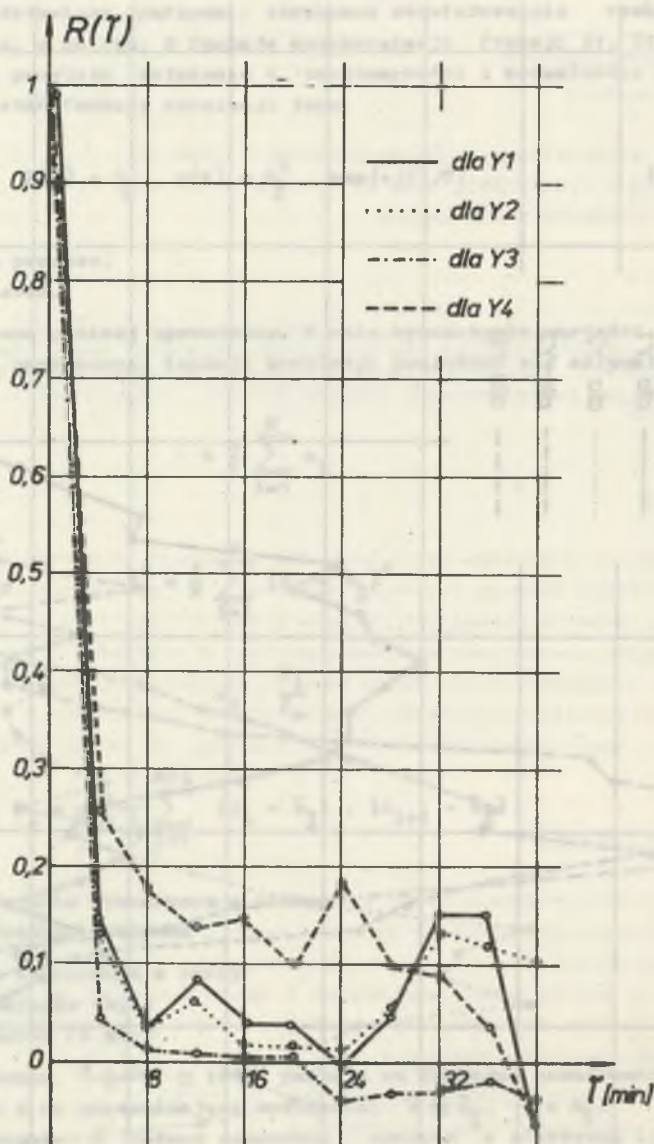
Duża wartość stosunku  $\frac{N \cdot \Delta t}{T} \approx 1000$  pozwala na dokładne oszacowanie parametrów rozkładu i na upraszczające założenia:  $\bar{x} \approx \bar{x}_y$ ,  $\sigma = \sigma_y$ .

Dokładność wyznaczeni  $\bar{x}$  możemy oszacować oparcie o efektywną liczbę pomiarów  $N_0$ . Wariancja estymatora  $\bar{x}$  wynosi

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_y^2}{N_0}$$



Rys. 1. Rozkłady prawdopodobieństwa frakcji Y1, Y2, Y3 i Y4



Rys. 2. Funkcje autokorelacji frakcji Y1, Y2, Y3 i Y4

$$N_0 = \frac{N^2}{N + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \cdot \exp(-k \Delta t/T)} \approx 378$$

Stąd

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \text{ opt} = \sigma_y^2 \cdot 2,64578 \cdot 10^{-3}$$

Zastosowanie estymatora optymalnego wartości średniej  $\sigma_{\bar{x}}^2 \text{ opt}$  praktycznie nie zmniejsza wariancji:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \text{ opt} = \sigma_y^2 \cdot 2,64558 \cdot 10^{-3}$$

Estymator średnioarytmetyczny jako prostszy jest w tym przypadku korzystniejszy od estymatora optymalnego. Wartości współczynnika zmienności  $v_x = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}$  dla wartości średniej (tablica 1) są małe, co uzasadnia założenie  $\bar{x} \approx \bar{x}_0$

Tablica 1

Nr frakcji	Y1	Y2	Y3	Y4
$\bar{x}$	0,414	0,216	$6,926 \cdot 10^{-2}$	0,298
$v_x$ (%)	1,42	2,47	1,77	0,91
$\sigma^2$	$1,300 \cdot 10^{-2}$	$1,081 \cdot 10^{-3}$	$5,683 \cdot 10^{-4}$	$2,784 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_p^2 = \sigma^2 \cdot \frac{N_0}{N_0-1}$	$1,303 \cdot 10^{-2}$	$1,084 \cdot 10^{-3}$	$5,698 \cdot 10^{-4}$	$2,791 \cdot 10^{-3}$
T(min)	2,16	2,04	1,27	4,33

W analogiczny sposób wylicza się wariancję estymatora wariancji.

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^4 \cdot 4,18241 \cdot 10^{-3}$$

Współczynnik zmienności dla wariancji wynosi 6,47%.

Estymator  $\sigma^2$  jest estymatorem obciążonym. Pomnożenie  $\sigma^2$  przez czynnik  $N_0/(N_0-1)$  powoduje wyeliminowanie błędu systematycznego. Poprawione wartości wariancji  $\sigma_p^2$  zamieszczone są w tablicy 1.

Największym błędem obarczona jest ocena unormowanej funkcji autokorelacji. Przeprowadzona analiza wykazała, że współczynnik zmienności dla  $\tau = 4 \text{ min.} (i=1)$  wynosi 32,8%, a dla większych wartości  $\tau$  gwałtownie wzrasta. Aby wyznaczyć funkcję korelacji z dopuszczalnym błędem 10% (przyjęta maksymalna wartość współczynnika zmienności), należy ograniczyć się do czasów  $\tau \leq \tau_{\text{max}} \approx 2 \text{ min.}$  Dla czasów  $\tau > \tau_{\text{max}}$  estymator  $r_1$  nie zawiera praktycznie żadnej informacji. Wartości stałej czasowej autokorelacji T wyliczono metodą najmniejszych kwadratów. Wyniki zamieszczone w tablicy 1. Do obliczeń przyjęto dla wszystkich frakcji jednakową wartość  $T = 2 \text{ min.}$

#### 4. Testy rozkładu zawartości frakcji w nadawie

495 pomiarów zawartości każdej z frakcji podzielono na 5 serii po 99 pomiarów (pominięto ostatnią 496-tą realizację) wg schematu:

seria nr 1 - pomiary nr 1, 6, 11, ..., 491

seria nr 2 - pomiary nr 2, 7, 12, ..., 492

seria nr 3 - pomiary nr 3, 8, 13, ..., 493

seria nr 4 - pomiary nr 4, 9, 14, ..., 494

seria nr 5 - pomiary nr 5, 10, 15, ..., 495

Dwa sąsiednie pomiary w jednej serii są oddzielone od siebie w czasie o 20 minut, co zapewnia praktycznie pełną niezależność ich realizacji (wynika to z przeprowadzonej analizy funkcji autokorelacji). Jednocześnie każda seria przesunięta jest o 4 min. w czasie w stosunku do sąsiedniej (transformacja względem osi czasu). Przeprowadzono testy wartości średniej i wariancji zawartości poszczególnych frakcji poprzez sprawdzenie wartości średniej i wariancji wszystkich serii. Test wartości średniej przeprowadzono wg nierówności:

$$P(\bar{x}_y - K \cdot \frac{\sigma_p}{\sqrt{N-1}} < \bar{x}_y < \bar{x}_y + K \cdot \frac{\sigma_p}{\sqrt{N-1}}) = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

gdzie:

$N = 99$

$\sigma_p$  - dyspersja wyznaczona dla badanej serii,

$\bar{x}_y$  - średnia wyznaczona dla badanej serii,

$\alpha$  - wybrany poziom ufności.

Ze względu na duże  $N$  wartość  $K$  odczytywano z tablic rozkładu normalnego. Dla wszystkich serii pomiarowych frakcji  $Y_1, Y_2, Y_3$  i  $Y_4$  spełnienie warunku (4.1) uzyskano już dla  $\alpha = 0,05$ . Test wariancji przeprowadzono wg nierówności:

$$P(K_1 < \frac{N \cdot \sigma_p^2}{\sigma_y^2} < K_2) = 1 - \alpha$$

przyjmując rozkład typu  $\chi^2$  i warunek tzw. przedziału centralnego:

$$P(\chi_{N-1}^2 < K_1) = P(\chi_{N-1}^2 > K_2) = \frac{1}{2} \alpha$$

Ze względu na duże  $N$  nie korzystano z tablic rozkładu chi kwadrat, lecz z tablic rozkładu normalnego dla zmiennej  $U$ , utworzonej wg wzoru:

$$P(\chi_N^2 > k) \approx P(U > \sqrt{2k} - \sqrt{2N-1}) \quad (4.2)$$

Dla serii pomiarowych frakcji  $Y_1$ ,  $Y_2$ , i  $Y_4$  spełnienie warunku (4.2) uży- skano już przy  $\alpha = 0,05$ , za wyjątkiem pierwszej serii frakcji  $Y_4$ , dla której nastąpiło to przy zmianie poziomu ufności do wartości  $\alpha = 0,032$ .

$Y_3$  jest frakcją o stosunkowo małej wartości oczekiwanej. Dla takich frak- cji reprezentatywność próby jest dużo mniejsza. Wśród 496 pomiarów frak- cji  $Y_3$  znajdują się dwa pomiary:

nr 29 z  $Y_3 = 0,4333$  (seria 4)

nr 51 z  $Y_3 = 0,9991$  (seria 1)

które wyklucza się z obliczeń. W ich miejsce wstawiamy dwa wygenerowane przez komputer wyniki pomiarów. Dla pierwszej i drugiej serii wariancja spełnia warunek (4.2) przy  $\alpha = 0,05$ . Dla trzeciej serii warunek (4.2) jest spełniony przy  $\alpha = 0,02$ , a dla piątej serii - z  $\alpha = 0,01$ . Dla serii czwar- tej warunek (4.2) pozostał niespełniony.

Przy przeprowadzaniu powyższych testów korzystano z założenia o roz- kładzie normalnym badanych zawartości frakcji. Założenie to sprawdzono przeprowadzając test chi kwadrat. Każdą serię pomiarową podzielono na prze- działy tak, aby długość przedziału była wielokrotnością liczby 0,004 (za- wartość może się zmieniać w granicach od 0 do 1) i aby w każdym z prze- działów częstość empiryczna była co najmniej równa 5. Otrzymane wyniki przedstawia tablica 2.

Tablica 2

Nr serii	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1	48,84	25,19	21,50	7,45
2	24,36	28,05	40,47	19,49
3	20,03	32,41	34,28	21,28
4	14,10	40,82	67,46	14,28
5	27,16	29,30	28,01	16,94

Wartość krytyczna testu chi kwadrat dla  $\alpha = 0,01$  wynosi 34,81. Jak wi- dać z tablicy 2 w szesnastu wypadkach nie przekroczono wartości krytycznej.

## 5. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych testów wartości średniej, wariancji i dystry- buanty potwierdzają prawidłowość założenia rozkładu normalnego zawartość frakcji w nadawie i niezmienniczość tego rozkładu przy transformacji wzglę- dem osi czasu - stacjonarność procesu. Należy dosyć ostrożnie traktować założenie o funkcji autokorelacji postaci (3.1) ze stałą czasową  $T$  jedna- kową dla wszystkich frakcji. W celu dokładniejszego sprawdzenia funkcji

autokorelacji należy przeprowadzić badania z krokiem  $\Delta t$  nie większym niż 90 sekund, zwracając szczególną uwagę na reprezentatywność prób. Ilość prób powinna być nie mniejsza niż 250. Spełnienie tych warunków zapewni maksymalnie 10% wartość współczynnika zmienności estymatora funkcji autokorelacji. Należy podkreślić fakt, że stacjonarność procesu została sprawdzona w dość krótkim przedziale czasu. Przy zmianach organizacyjno-produkcyjnych, poziomów wydobywczych w kopalni itp. może nastąpić zmiana własności nadawy nie mieszcząca się w modelu stacjonarnym.

Recensent: Doc. dr hab. inż. Stanisław CIERPISZ

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1983 r.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ КАЧЕСТВА ФРАКЦИЙ  
В ИСХОДНОМ МАТЕРИАЛЕ С РАСМЕРНОСТЬЮ ЗЕРНА 1-20 ММ  
ПРОВЕДЕННЫХ В ШАХТЕ КАМЕННОГО УГЛЯ "КНУРОВ"

Р е з ю м е

В работе представлены полученные результаты статистического анализа измерений временных зависимостей количества фракций в исходном материале. Определена функция плотности распределения и автокорреляции. Проведены также исследования стационарности этих процессов.

STATISTICAL ANALYSIS OF MEASUREMENTS OF FRACTIONS CONTENTS  
IN A MATERIAL FED FOR CRUSHING AND DRESSING WITH 1-20 MIN  
GRAINING MADE IN THE COAL MINE KNURÓV

S u m m a r y

The results of statistical analysis of the time functions contents in a material fed for crushing and dressing are presented. Probability distribution functions and autocorrelations have been found. Stationarity has been tested for the time functions.