ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: GÓRNICTWO z. 129 Nr kol. 784

Anna WALASZEK-BABISZEWSKA

BADANIE FUNKCJI GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA DWUWYMIAROWEJ ZMIENNEJ LOSOWEJ (Γ, λ), CHARAKTERYZUJĄCEJ WŁASNOŚCI NADAWY

Streszczenie. W opracowaniu zastosowano aparat statystyki matematycznej do badań charakterystyki nadawy rozumianej jako zależność sumarycznego wychodu frakcji gęstościowych od zapopielenia. Pomiary wychodów i zapopielenia frakcji gęstościowych w węglu zostały przedstawione jako realizacje dwuwymiarowej zmiennej losowej (Γ, λ). Wyznaczono ślad i widmo empirycznego rozkładu badanej zmiennej losowej.

Wstęp

Własności nadawy, transportowanej do agregatów wzbogacających są zmienne w czasie. Charakter tych zmian jest losowy. W związku z tym deterministyczne charakterystyki węgla są niewystarczające dla analizy i prognozowania efektów wzbogacania w przypadku automatycznego sterowania procesów wzbogacania węgla. Praca niniejsza jest próbą zastosowania aparatu statystyki matematycznej dla tworzenia probabilistycznej charakterystyki nadawy.

1. Krzywe wzbogacalności a losowy charakter zmian własności nadawy

W zagadnieniach praktycznych przeróbki mechanicznej węgla przyjęto posługiwać się krzywymi wzbogacalności węgla jako podstawowymi charakterystykami surowca. Jedną z charakterystyk, opisujących własności węgla istotne w procesie wzbogacania jest zależność sumarycznego wychodu Γ frakcji lekkiej w funkcji zapopielenia λ. Współrzędne punktów krzywej $\Gamma(\lambda)$ oblicza się ze wzorów [1], [3]

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \tag{1}$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{l} \gamma_i \cdot \alpha_i}{\sum_{i=1}^{l} \gamma_i} \tag{2}$$

gdzie:

γ_i - wychód i-tej frakcji ciężarowej ziarn o gęstości mniejszej niż δ_i,

α_i - zapopielenie i-tej frakcji,

l - liczba wyznaczonych frakcji.

Uzupełnieniem tej charakterystyki jest krzywa $\Gamma(\delta)$.
W strumieniu nadawy, cechy γ_i, α_i są zmiennymi losowymi.

W wyniku pomiarów w różnych momentach czasu t_n otrzymuje się realizację losową wielowymiarowego procesu stochastycznego, który dla danej klasy ziarnowej możemy zapisać:

$$z(t) = \left\{ \gamma(\delta_i, t_n), \quad \alpha(\delta_i, t_n) \right\}_{\substack{i=1,2,\ldots l \\ n=1,2,\ldots N}} \tag{3}$$

gdzie:

N - ilość pobranych prób.

Dla każdej j-tej próby można wyznaczyć zgodnie z wzorami (1) i (2) zależność $\Gamma_j(\lambda_j)$, a zakładając stacjonarność i ergodyczność procesu (3) można badać zależność stochastyczną zmiennych losowych (Γ, λ). Zbiór punktów (Γ_n, λ_n), =1,2,...N na płaszczyźnie jest graficznym obrazem zależności stochastycznej pomiędzy zmiennymi losowymi Γ i λ, podczas gdy zależność deterministyczna wyraża się krzywą. Zbiór ten stanowi obszar Q, który jest jednocześnie dziedziną empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(\Gamma, \lambda)$.

2. Ślad i widmo rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej (Γ, λ)

Śladem rozkładu zmiennej losowej dwuwymiarowej (Γ, λ) nazywamy [2] obszar Q_ξ taki, że dla obranej liczby ξ bliskiej zeru prawdopodobieństwo, że punkt (Γ, λ) leży poza obszarem Q_ξ jest równe ξ:

$$P\left[(\Gamma, \lambda) \in Q_\xi\right] = 1 - \xi \tag{4}$$

co oznacza dla funkcji gęstości rozkładu:

$$f(\Gamma_o, \lambda_o) > f(\Gamma_p, \lambda_p),$$

gdzie:

(Γ_o, λ_o) - dowolny punkt leżący wewnątrz obszaru Q_ξ,

(Γ_p, λ_p) - dowolny punkt leżący poza obszarem Q_ξ.

Każdej liczbie $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ odpowiadają krzywe jednakowego prawdopodobieństwa w funkcji gęstości $f(\Gamma, \lambda)$, ograniczające odpowiednie obszary $Q_{\xi_1}, Q_{\xi_2}, \ldots Q_{\xi_k}$.

Zbiór krzywych jednakowego prawdopodobieństwa nazywa się widmem rozkładu. Pozwala przedstawić na płaszczyźnie przestrzenny wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(\Gamma, \lambda)$. Ślad i widmo rozkładu empirycznego wyznacza się w oparciu o serię N pomiarów zmiennej losowej (Γ, λ), przez wyznaczanie tzw. losowych otoczeń każdego punktu. W tym celu, dla każdego punktu (Γ_i, λ_i) oblicza się odległość od jego najbliższego sąsiada, jako minimum normy Euklidesowej:

$$C_i = \min_j \sqrt{(\Gamma_i - \Gamma_j)^2 + (\lambda_i - \lambda_j)^2} \qquad (5)$$

gdzie $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots N$.

Jeżeli wokół punktu (Γ_i, λ_i) zatoczy się koło o promieniu Ci, to stanowi ono otoczenie losowe tego punktu. Zbiór wszystkich punktów danej próby z ich otoczeniami stanowi dziedzinę Q empirycznej funkcji gęstości $f(\Gamma, \lambda)$.

Aby wyznaczyć ślad rozkładu z prawdopodobieństwem $1 - \xi$, należy uporządkować ciąg wartości Ci, i = 1,2,...N w kolejności rosnącej. Następnie odrzuca się M - 1 wyrazów końcowych ciągu, które są otoczeniami tzw. "wątpliwych" punktów, zbyt odległych od reszty populacji, przy czym:

$$M = \mathrm{Entier}(\xi . N).$$

Pozostałe punkty uważa się za wiarygodne. Zbiór punktów wiarygodnych (Γ_i, λ_i) wraz z ich otoczeniami o promieniu C_M stanowi obszar Q_ξ który jest estymatorem nieznanego obszaru Q, ograniczonego krzywą jednakowego prawdopodobieństwa.

Postępując podobnie dla różnych wartości parametru ξ, uzyskuje się widmo rozkładu funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(\Gamma, \lambda)$.

3. Wyniki badań i wnioski

Jako materiał doświadczalny posłużyły próby nadawy pobierane przed osadzarką [4] w różnych momentach czasu t_n. Każdą próbę poddano analizie w cieczach ciężkich i określono wychody γ i zapopielenie α trzech frakcji ciężarowych:

$$\gamma_1, \alpha_1 \quad \text{dla} \quad \delta_1 \leqslant 1,3$$

$$\gamma_2, \alpha_2 \quad \text{dla} \quad 1,3 < \delta_2 \leqslant 1,5$$

$$\gamma_3, \alpha_3 \quad \text{dla} \quad 1,5 < \delta_3 \leqslant 1,8$$

$$\gamma_4, \alpha_4 \quad \text{dla} \quad 1,8 < \delta_4,$$

$$\gamma[\%], \quad \alpha[\%], \quad \delta\left[t/m^3\right],$$

Badaniom statystycznym poddano trzy serie prób nadawy o następującej liczności:

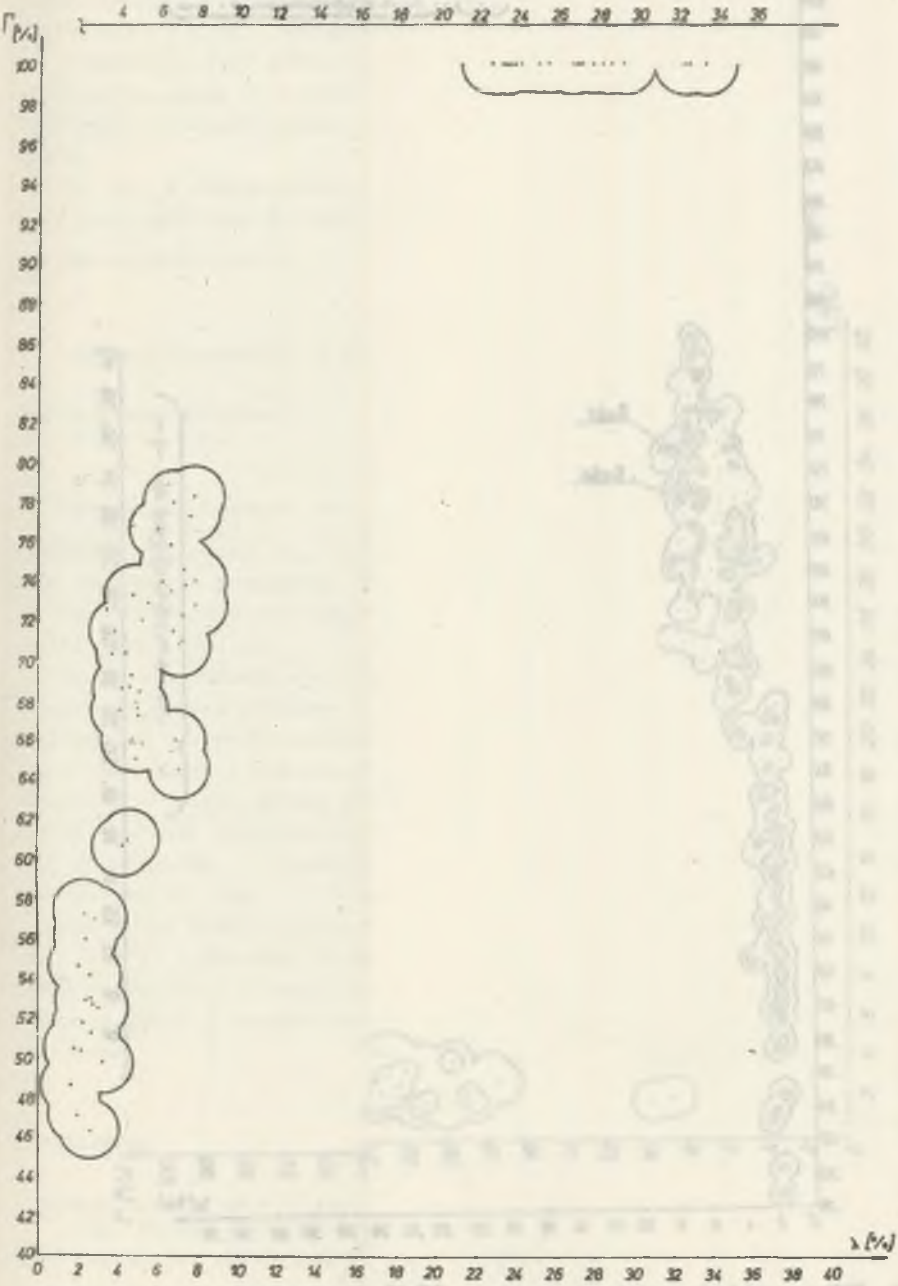
N_1 = 20 prób
N_2 = 100 prób
N_3 = 300 prób.

Następnie zostały obliczone wychody sumaryczne i zapopielenia dla każdej próby w myśl wzorów (1) i (2). W każdej z trzech serii zostały obliczone wzajemne odległości punktów oraz uporządkowane zgodnie z przedstawionymi powyżej kryteriami. Te obliczenia zostały wykonane przez maszynę cyfrową. W tabeli 1 podano wyniki obliczeń najmniejszych odległości C każdego z 80 punktów pierwszej serii N1 (20 prób).

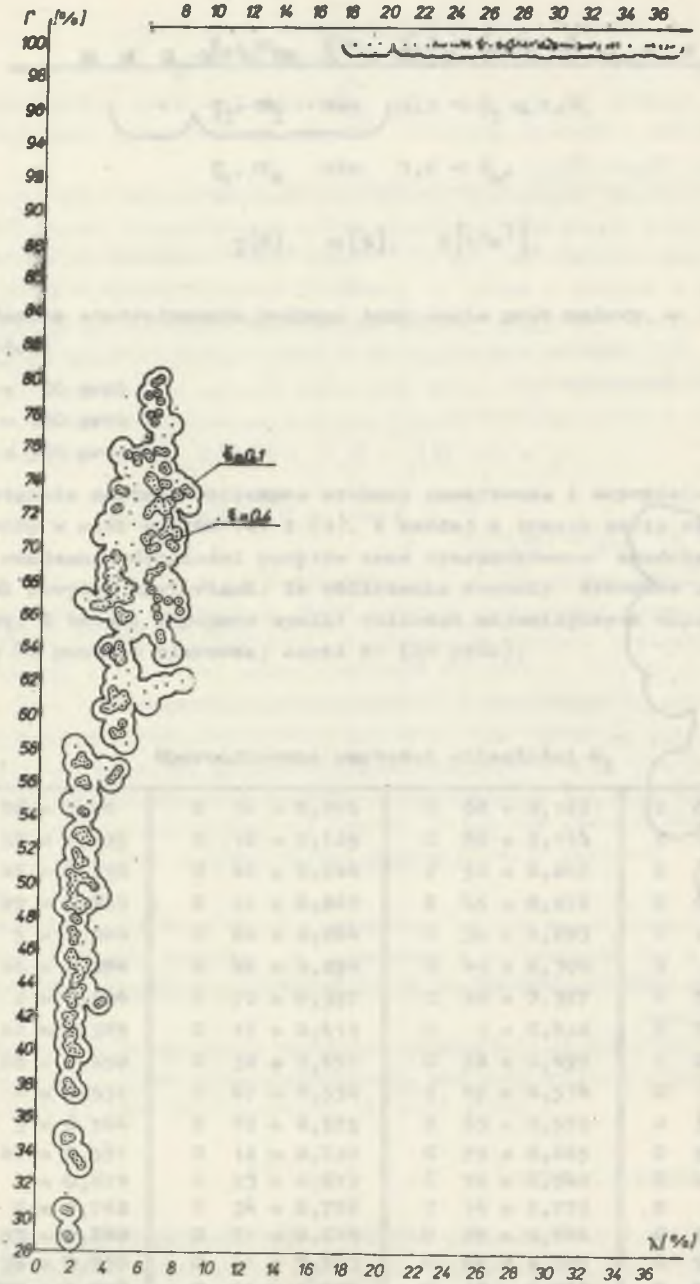
Tabela 1

Uporządkowane wartości odległości C_1

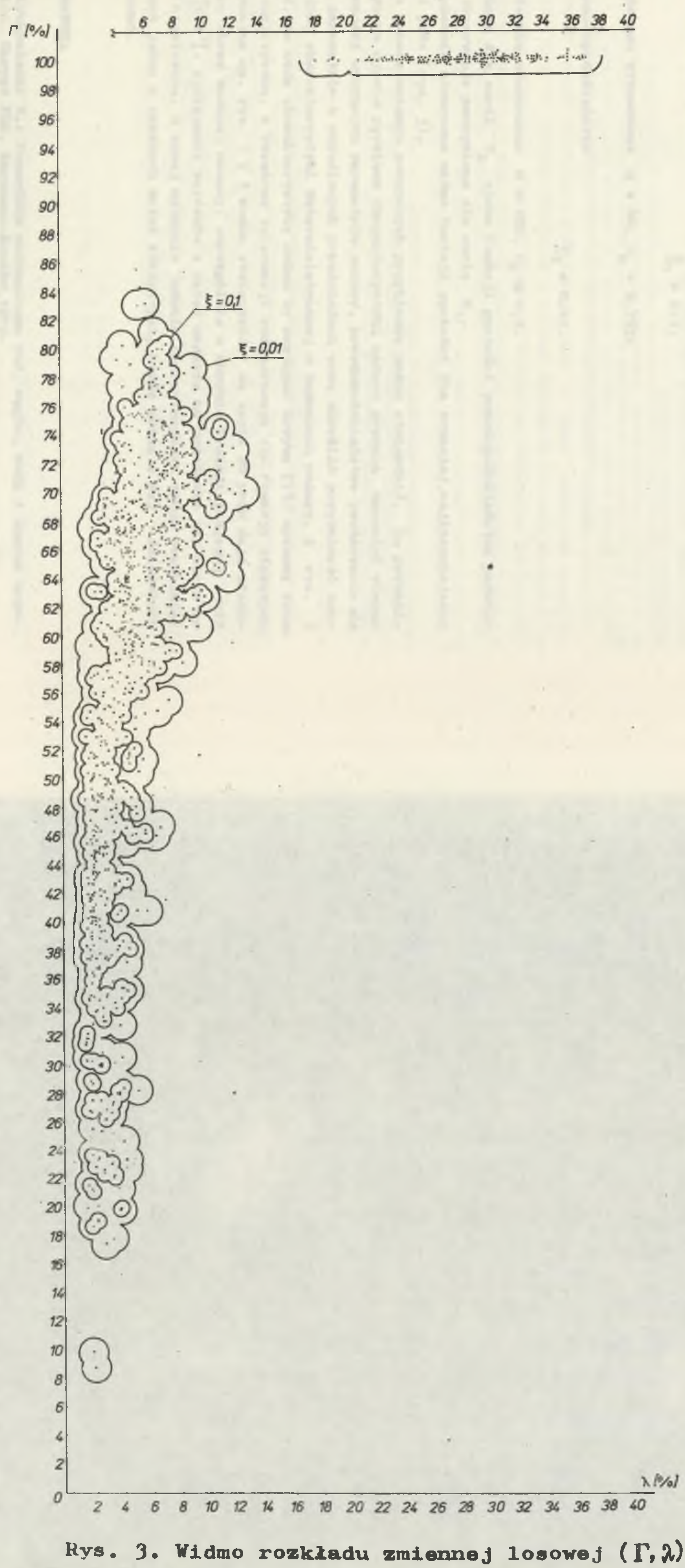
C 76 = 0,96	C 36 = 0,096	C 68 = 0,122	C 60 = 0,122
C 58 = 0,125	C 10 = 0,125	C 80 = 0,144	C 30 = 0,149
C 48 = 0,239	C 44 = 0,244	C 52 = 0,248	C 8 = 0,248
C 29 = 0,269	C 25 = 0,269	C 45 = 0,276	C 69 = 0,284
C 5 = 0,284	C 64 = 0,284	C 31 = 0,293	C 11 = 0,293
C 66 = 0,294	C 46 = 0,294	C 40 = 0,302	C 6 = 0,304
C 2 = 0,304	C 70 = 0,357	C 26 = 0,357	C 54 = 0,385
C 22 = 0,385	C 16 = 0,414	C 1 = 0,416	C 72 = 0,450
C 28 = 0,450	C 32 = 0,491	C 56 = 0,492	C 24 = 0,492
C 4 = 0,531	C 67 = 0,534	C 47 = 0,534	C 7 = 0,564
C 3 = 0,564	C 75 = 0,575	C 63 = 0,575	C 33 = 0,591
C 21 = 0,591	C 12 = 0,620	C 79 = 0,665	C 55 = 0,665
C 3 = 0,679	C 53 = 0,679	C 59 = 0,742	C 41 = 0,762
C 9 = 0,762	C 34 = 0,776	C 14 = 0,776	C 4 = 0,817
C 23 = 0,840	C 71 = 0,844	C 27 = 0,844	C 78 = 0,801
C 38 = 0,930	C 51 = 0,973	C 61 = 1,002	C 57 = 1,002
C 39 = 1,038	C 35 = 1,038	C 15 = 1,055	C 37 = 1,083
C 43 = 1,095	C 62 = 1,122	C 65 = 1,228	C 42 = 1,244
C 7 = 1,506	C 13 = 1,739	C 17 = 1,832	C 50 = 1,861
C 49 = 2,846	C 18 = 3,091	C 20 = 3,770	C 19 = 3,865



Rys. 1. Ślad rozkładu zmiennej losowej (Γ, λ) wyznaczony na podstawie 20 prób nadawy



Rys. 2. Widmo rozkładu zmiennej losowej (Γ, λ) wyznaczone na podstawie 100 prób nadawy



Rys. 3. Widmo rozkładu zmiennej losowej (Γ, λ) wyznaczone na podstawie 300 prób nadawy

Na rys. 1 przedstawiono w układzie współrzędnych (Γ,λ) punkty (Γ_i, λ_i) odpowiadające pierwszej serii pomiarów (i = 20x4). Liczba punktów wątpliwych, dla $\xi = 0,1$ wynosi 7, a promień otoczenia $C_M = 1,506$.

Wyznaczony ślad rozkładu wskazuje na trzy wyraźne grupy punktów, przy czym jedna grupa - to frakcja najlżejsza, druga grupa - to dwie frakcje pośrednie i trzecia grupa - frakcja ciężka. Wyróżnia się grupa ziaren ciężkich.

Na rys. 2 przedstawiono serię N_2, w której znajduje się 100 prób nadawy, czyli 400 punktów losowych. Przyjęto:

a) prawdopodobieństwo

$$\xi_1 = 0,1,$$

wówczas wyznaczono $M = 40$, $C_M = 0,785$;

b) prawdopodobieństwo

$$\xi_2 = 0,45,$$

wówczas wyznaczono $M = 180$, $C_M \approx 0,3$.

Uzyskane dla serii N_2 widmo funkcji gęstości prawdopodobieństwa potwierdza obserwacje poczynione dla serii N_1.

Podobnie utworzono widmo funkcji gęstości dla trzeciej,najliczniejszej serii prób (rys. 3).

Po przedstawieniu powyższych przykładów można stwierdzić, że probabilistyczne ujęcie problemu charakterystyki nadawy pozwala zauważyć obszar zmienności wybranych parametrów nadawy, prawdopodobieństwo powtarzania się tych parametrów w określonych przedziałach oraz określić przydatność tradycyjnej charakterystyki deterministycznej w badaniach nadawy. Z rys. 3 widać, że całą charakterystykę można by zastąpić krzywą $\Gamma(\lambda)$ opisaną funkcją analityczną, z obszarem tolerancji rozszerzonym dla frakcji cięższych. Porównując np. rys. 1 i 3 można stwierdzić, że seria 20 prób daje niedokładny obraz badanej nadawy, szczególnie w obrębie frakcji lżejszej niż 1,3 $[t/m^3]$. Wyciąganie wniosków o całej nadawie na podstawie tej serii byłoby niesłuszne. O samej metodzie badania charakterystyk można powiedzieć że jest jedną z lepszych metod statystyki, które można w tej dziedzinie stosować.

LITERATURA

[1] Krukowiecki W.: Przeróbka mechaniczna rud, węgla, soli i innych kopalin. Skrypt PWN, Warszawa-Kraków,1970.

[2] Helwig Z.: Aproksymacja stochastyczna. PWE, Warszawa 1965.

[3] Nawrocki J.: Analityczno-graficzne metody oceny pracy wzbogacalników grawitacyjnych. "Śląsk", Katowice 1976.
[4] Praca badawcza IEiAG nr NB-124/RG-1/80, Gliwice 1980 (niepublikowana).

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Stanisław CIERPISZ

Wpłynęło do redakcji w październiku 1983 r.

ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ДВУХМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Р е з ю м е

В работе применён статистический анализ для исследований характеристик исходного материала, имея в виду зависимость суммарного выхода фракции от зольности фракции. Измерения выходов и зольности фракции в угле представлены как реализации двухмерной случайной величины (Γ, λ) Определён след и спектр экспериментального распределения исследованной случайной величины.

INVESTIGATIONS OF A PROBABILITY DENSITY FUNCTION FOR TWO DIMENSIONAL STOCHASTIC VARIABLE (Γ, λ) CHARACTERIZING PROPERTIES OF ROW COAL

S u m m a r y

In the paper statistical analysis approach is proposed to investigate a characteristic of row coal. The characteristic in understood as a relation between a total flow-off of a density fraction and ashes contents. Measurements of the flow-off and the ashes contents of the density fraction in the coal are presented as realizations of two dimensional stochastic variable (Γ, λ). A trace and a spectrum of an empirical distribution function of the stochastic variable is computed.