ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: ELEKTRYKA z. 119 Nr kol. 1104

Jerzy JAKUBIEC

METODA BADANIA STABILNOŚCI REKURENCYJNYCH ALGORYTMÓW PRZETWARZANIA DANYCH

Streszczenie. Stwierdzenie stabilności algorytmu przetwarzania danych stanowi podstawowy krok rozstrzygający o jego praktycznej przydatności. W artykule opisano metodę analizy stabilności algorytmów rekurencyjnych, której istota polega na przekształceniu algorytmu w szereg czasowy a następnie na badaniu zbieżności tego szeregu. Metodę tę przedstawiono opisując jej zastosowanie do analizy stabilności rekurencyjnego algorytmu odtwarzania przebiegów wejściowych przetworników pomiarowych o własnościach dynamicznych modelowanych zwyczajnym, liniowym równaniem różniczkowym. Algorytm oparty jest na dyskretnym rozwiązywaniu równania stanu ze względu na wielkość wejściową i daje się rozwijać w szereg czasowy, którego współczynniki tworzą postęp geometryczny. Opisano procedurę rozwijania algorytmu odtwarzania w szereg czasowy oraz podano przykładowe wyniki analizy stabilności tego algorytmu dla przetwornika drugiego rzędu.

1. Wstęp

Rekurencyjne algorytmy programowego przetwarzania danych odznaczją się tym, że wynik końcowy powstaje na podstawie zarówno danych wejściowych jak i wyników obliczeń z kroków poprzednich. Własność taka oznacza, że wyniki wyjściowe algorytmu rekurencyjnego stanowią wypadkową wszystkich danych przetworzonych przez algorytm od momentu rozpoczęcia obliczeń. Algorytmy tego rodzaju można zatem uważać za układy o nieskończenie wielkiej pamięci [1]. Są one szczególnie przydatne do szybkiego przetwarzania danych pomiarowych w przyrządach mikroprocesorowych pracujących na bieżąco, w trybie ciągłym. Wynika to właśnie stąd, że algorytmy rekurencyjne umożliwiają wykorzystywanie na każdym kroku obliczeń dużej liczby wyników pomiarowych przy stosunkowo niewielkiej złożoności numerycznej cechującej tego rodzaju algorytmy.

Podstawowym warunkiem praktycznej przydatności konkretnego algorytmu jest jego stabilność. Badanie stabilności algorytmów rekurencyjnych jest jednak na ogół zagadnieniem, złożonym, szczególnie w przypadku, gdy współczynniki algorytmu wyznaczane są bezpośrednio na drodze empirycznej. Celem artykułu jest scharakteryzowanie metody, która pozwala na uzyskanie prostego kryterium oceny stabilności. Idea tej metody polega na przedstawieniu algorytmu rekurencyjnego w postaci szeregu czasowego i następnie na analizie zbieżności tego szeregu. W przypadku, gdy algorytm daje się przedstawić w postaci postępu geometrycznego analiza stabilności sprowadza się do badania wartości ilorazu postępu.

Operowanie uogólnionym zapisem algorytmu rekurencyjnego jest dość trudne ze względu na praktycznie nieograniczone możliwości stosowania "sprzężeń zwrotnych" między ciągiem danych wyjściowych a ciągiem danych wejściowych algorytmu. Z tego powodu opisywana metoda badania stabilności prezentowana jest dla przykładowej postaci algorytmu rekurencyjnego. Jest nim algorytm odtwarzania dynamicznych wejściowych przetworników pomiarowych oparty na dyskretnym rozwiązywaniu równania stanu [2]. Zdaniem autora jest on reprezentatywny dla szerokiej klasy algorytmów rekurencyjnych stosowanych do przetwarzania danych, zatem przedstawione rozważania mogą być przeniesione również na inne sytuacje pomiarowe.

2. Rekurencyjny algorytm odtwarzania przebiegów dynamicznych

Rozpatrywany algorytm odtwarzania przebiegów wejściowych przetworników pomiarowych uzyskuje się wychodząc z założenia, że własności dynamiczne przetwornika opisuje zwyczajne, liniowe równanie różniczkowe rzędu n:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_o y = b_o x + b_1 \dot{x} + \dots + b_m x^{(m)}, \tag{1}$$

gdzie: x - jest zmienną w czasie wielkością wejściową przetwornika,
y - wielkością wyjściową,
$a_o, \dots, a_{n-1}, b_o, \dots, b_m$ - stałymi współczynnikami równania, przy czym zachodzi $m \le n$.

Jak uzasadniono to w pracy [2] odtwarzanie przebiegu wejściowego można traktować jako procedurę rozwiązywania - ze względu na wielkość wejściową - równania opisującego proces przetwarzania. Zapisując równanie (1) w postaci równań stanu po ich dyskretyzacji uzyskuje się układ n równań, które po rozwiązaniu ze względu na wielkość wejściową przyjmują postać

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\Psi_1}[y(k+1) - \wp_{11} y(k) - \wp_{12}\hat{y}_2(k) - \dots - \wp_{1n}\hat{y}_n(k)], \tag{2}$$

$$\hat{y}_2(k+1) = \mathcal{P}_{21} y(k) + \mathcal{P}_{22}\hat{y}_2(k) + \ldots + \mathcal{P}_{2n}\hat{y}_n(k) + \Psi_2\hat{x}(k),$$

$$\hat{y}_n(k+1) = \mathcal{P}_{n1} y(k) + \mathcal{P}_{n2}\hat{y}_2(k) + \ldots + \mathcal{P}_{nn}\hat{y}_n(k) + \Psi_n\hat{x}(k), \tag{3}$$

gdzie: $\hat{x}(k)$ jest oceną wielkości wejściowej w chwili $t_k = kT$,

T jest okresem dyskretyzacji i T=const.,

k jest numerem chwili dyskretyzacji, k=0, 1, ... ,

$\hat{y}_2(k)$, ..., $\hat{y}_n(k)$ są ocenami zmiennych stanu

y (k) - wynikiem pomiaru wielkości wyjściowej przetwornika w chwili k.

Wartości współczynników Ψ_1, ... ,Ψ_n, $\mathcal{P}_{11}$, ... , $\mathcal{P}_{nn}$ zależą od wartości współczynników równania (1) oraz okresu dyskretyzacji T. Wyprowadzenie algorytmu oraz analizę jego własności zawiera praca [2].

Przedstawiony powyżej algorytm odtwarzania działa dwuetapowo, W pierwszym etapie wyznaczana jest ocena wielkości wejściowej $\hat{x}(k)$ zgodnie z zależnością (2) na podstawie wyników pomiarowych y(k+1) i y (k) oraz zmiennych stanu $\hat{y}_2(k)$, ... , $y_n(k)$ przechowanych z poprzednich kroków obliczeń. W drugim etapie zgodnie z układem równań (3) wyznaczane są oceny zmiennych stanu celem przechowania ich do następnego kroku obliczeń. Rozpoczęcie obliczeń wymaga znajomości wartości początkowych $\hat{y}_2(0)$, ... $\hat{y}_n(0)$.

Przykład 1

Dla przetwornika o dynamice drugiego rzędu algorytm odtwarzania opisuje następujący układ równań rekurencyjnych uzyskany na podstawie wyrażeń (2) i (3) dla n=2:

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\Psi_1}[y(k+1) - \mathcal{P}_{11} y(k) - \mathcal{P}_{12}\hat{y}_2(k)], \tag{4}$$

$$\hat{y}_2(k+1) = \mathcal{P}_{21} y(k) + \mathcal{P}_{22}\hat{y}_2(k) + \Psi_2\hat{x}(k). \tag{5}$$

Sposoby uzyskiwania wartości współczynników algorytmu odtwarzania dla znanych wartości współczynników równania (1) oraz okresu dyskretyzacji T opisano w pracy [4].

3. Rozwijanie algorytmu rekurencyjnego w szereg czasowy

Ogólnie idea rozwijania algorytmu rekurencyjnego w szereg polega na stopniowym eliminowaniu wyrażeń nie zawierających wyników pomiarowych. Uzyskuje się tą drogą przekształcenie wyrażenia rekurencyjnego w postać nierekurencyjną łatwiejszą do analizy. Sposób postępowania przedstawiono poniżej używając do tego celu algorytmu odtwarzania 2 rzędu opisanego w przykładzie 1.

Na podstawie równania (5) ocenę zmiennej stanu y_2 w chwili k opisuje zależność

$$\hat{y}_2(k) = \mathcal{F}_{21} y(k-1) + \mathcal{F}_{22} \hat{y}_2(k-1) + \Psi_2 \hat{x}(k-1). \tag{6}$$

Wstawiając równanie (6) do równania (4) uzyskuje się:

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\Psi_1}\Big\{ y(k+1) - \mathcal{F}_{11} y(k) - \mathcal{F}_{12}\Big[\mathcal{F}_{21} y(k-1) + \mathcal{F}_{22}\hat{y}_2(k-1) + \Psi_2 \hat{x}(k-1)\Big]\Big\} \tag{7}$$

Z kolei z równana (4) wynika zależność

$$\hat{x}(k-1) = \frac{1}{\Psi_1}\Big[y(k) - \mathcal{F}_{11} y(k-1) - \mathcal{F}_{12}\hat{y}_2(k-1)\Big]. \tag{8}$$

Podstawiając teraz równanie (8) do równania (7) i postępując dalej dla kolejnych chwil k-1, k-2, ... , k-m, ... zgodnie z powyższym schematem otrzymuje się wyrażenie na ocenę wielkości wejściowej w postaci nieskończonego szeregu czasowego, który ogólnie można przedstawić jako

$$\hat{x}(k) = A_{k+1} y(k+1) + A_k y(k) + A_{k-1} y(k-1) + \ldots + A_{k-m} y(k-m) + \ldots \tag{9}$$

Wyrażenie (9) stanowi ciąg iloczynów wartości chwilowych wielkości wyjściowej y (k+1), y (k), ... y (k-m), ... oraz odpowiednich współczynników A_{k+1}, A_k, ... , A_{k-m}, ... Wartości tych współczynników określone są przez wyrażenia:

$$A_{k+1} = \frac{1}{(1 - \mathcal{Y}_{11}) S},$$

$$A_k = \frac{H - \mathcal{Y}_{11}}{(1 - \mathcal{Y}_{11}) S},$$

$$A_{k-1} = \frac{H (H + \mathcal{Y}_{22} - 1)}{(1 - \mathcal{Y}_{11}) S},$$

$$\vdots \tag{10}$$

$$A_{k-m} = \frac{H (H + \mathcal{Y}_{22} - 1)}{(1 - \mathcal{Y}_{11}) S} (H + \mathcal{Y}_{22})^{m-1}, \ldots ,$$

gdzie symbolem S oznaczono czułość statyczną przetwornika, którą dla modelu przetwornika w postaci równania (1) opisuje zależność

$$S = \frac{b_o}{a_o}. \tag{11}$$

Ponadto oznaczono

$$H = \frac{\mathcal{Y}_{21} \mathcal{Y}_{12}}{1 - \mathcal{Y}_{11}} \tag{12}$$

oraz wyeliminowano współczynniki Ψ_1 i Ψ_2 zgodnie z zależnościami

$$\Psi_1 = (1 - \mathcal{Y}_{11}) S , \tag{13}$$

$$\Psi_2 = - \mathcal{Y}_{21} S , \tag{14}$$

uzyskanymi z wyrażeń (4) i (5) dla statycznych warunków pracy przetwornika [2].

4. Kryterium stabilności algorytmu

Można przyjąć, że algorytm jest stabilny jeżeli dla ograniczonych wartości danych wejściowych wyniki wyjściowe również przyjmują wartości ograniczone. Dla algorytmu dającego się rozwijać w szereg nieskończony oznacza to, że badanie stabilności tego algorytmu sprowadza się do analizy zbieżności szeregu. Biorąc pod uwagę, że wyniki pomiaru wielkości wyjściowej przetwornika mogą przyjmować jedynie wartości ograniczone, orzeczenie o zbieżności ciągu współczynników rozwinięcia algorytmu w szereg czasowy jest równoznaczne ze stwierdzeniem stabilności algorytmu.

Algorytm 2 rzędu rozpatrywany w punkcie 3 jest rozwijalny w szereg czasowy, którego współczynniki począwszy od drugiego wyrazu tworzą postęp geometryczny. W pracy [3] przedstawiono sposób rozwijania algorytmu odtwarzania opisanego zależnościami (2) i (3) ogólnie do czwartego rzędu włącznie. W tym przypadku również uzyskuje się współczynniki rozwinięcia, które tworzą postęp geometryczny. Biorąc pod uwagę liniowość równań (2) i (3) można na tej podstawie sądzić ogólnie, że współczynniki rozwinięcia algorytmu odtwarzania opisanego tymi równaniami tworzą - począwszy od pewnego wyrazu - postęp geometryczny. Taką samą własność mają również tzw. filtry rekurencyjne opisane w pracy [1], które mogą być stosowane do programowej filtracji przypadkowych błędów danych.

Dla algorytmów, których współczynniki rozwinięcia tworzą postęp geometryczny począwszy od pewnego wyrazu m_o, badanie stabilności sprowadza się do sprawdzenia warunku czy iloraz postępu

$$|q| < 1 , \tag{15}$$

gdzie

$$q = \frac{A_{k-m-1}}{A_{k-m}} , \quad \text{dla} \quad m \geq m_o \tag{16}$$

Dla rozpatrywanego algorytmu odtwarzania 2 rzędu zachodzi

$$q = H + \gamma_{22} , \tag{17}$$

gdzie H jest określone przez wyrażenie (12).

<u>Przykład 2</u>

Jak to wynika z danych podanych w pracy [2] algorytm odtwarzania dla przetwornika 2 rzędu o współczynnikach równania modelowego (1) różnych od zera jest zawsze stabilny. Przykładowe wartości ilorazu q tego algorytmu dla wartości współczynników $a_o=1$, $b_o=1$ oraz $a_1=1$, 2, 4 (co odpowiada wartościom czułości S=1 i pulsacji naturalnej $\omega_o=1$ rad/s oraz współczynnikowi tłumienia odpowiednio b = 0,5 , 1, 2) przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Przykładowe wartości ilorazu q algorytmu 2 rzędu dla a_o=1, b_o=1 w funkcji wartości współczynnika a_1 oraz względnego okresu dyskretyzacji $T^o = \frac{1}{2\pi} T \omega_o$, T jest okresem dyskretyzacji

a_1 \ T^o	0,01	0,05	0,1	0,2	0,5	1
1	- 0,997	- 0,984	- 0,967	- 0,935	- 0,845	- 0,710
2	- 0,993	- 0,967	- 0,936	- 0,875	- 0,716	- 0,512
4	- 0,987	- 0,936	- 0,875	- 0,767	- 0,520	- 0,291

Przykład 3

Algorytm odtwarzania w postaci równań (4) i (5) można zastosować również do numerycznego różniczkowania danych przyjmując przykładowo a_o=0, b_o=1 oraz $a_1 \neq 0$. W takim przypadku wyrażenie na iloraz q postępu jaki tworzą współczynniki rozwinięcia tego algorytmu w szereg czasowy trzeba przedstawić w inny niż (17) sposób, ponieważ traci sens pojęcie czułości statycznej S (a_o=0). Zgodnie z zależnościami podanymi w rozdz.III pracy [3] iloraz postępu określa w takim przypadku wyrażenie

$$q = \varphi_{22} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \varphi_{12} \tag{18}$$

Przykładowe wartości ilorazu q w funkcji okresu dyskretyzacji T przedstawiono za pracą [3] w tablicy 3. Z danych tych wynika, że algorytm różniczkowania jest niestabilny w pewnym zakresie zmian wartości parametrów.

Tablica 2

Przykładowe wartości ilorazu q algorytmu różniczkowania

a_1 \ T^o	0,01	0,05	0,1	0,2	0,5	1
0,2	- 1,06	- 0,996	- 0,993	- 0,986	- 0,967	- 0,935
0,1	- 1,041	- 0,991	- 0,996	- 0,993	- 0,983	- 0,967
0,05	-	- 1,05	- 0,991	- 0,996	- 0,991	- 0,983

5. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że badanie algorytmu rekurencyjnego przekształconego do postaci szeregu czasowego stanowi stosunkowo prosty sposób analizy stabilności tego rodzaju algorytmów. Sam proces rozwijania algorytmu w szereg czasowy - mimo prostej zasady - może, w przypadkach gdy występuje wiele różnorakich sprzężeń zwrotnych, wymagać dość złożonych przekształceń analitycznych. Jednak uzyskiwanie współczynników rozwinięcia w postaci analitycznej nie zawsze jest potrzebne, na ogół wystarcza znajomość wartości tych współczynników dla konkretnych wartości współczynników algorytmu. W pracy [3] przedstawiono sposób obliczania wartości współczynników rozwinięcia dla algorytmu odtwarzania do czwartego rzędu włącznie.

Na zakończenie należy zaznaczyć, że szereg czasowy stanowi formę bardzo przydatną do analizy metrologicznych własności algorytmu rekurencyjnego. Wynika to stąd, że taka postać algorytmu ujawnia bezpośrednie związki zachodzące między wynikami przetwarzania programowego a ciągiem danych wejściowych. Praca [2] zawiera opis wykorzystania rozwinięcia algorytmu do analizy przenoszenia przez algorytm odtwarzania przypadkowych oraz systematycznych statycznych i dynamicznych błędów danych.

LITERATURA

[1] Beauchamp K.G.: Przetwarzanie sygnałów metodami analogowyni i cyfrowymi. WNT, Warszawa 1978.

[2] Jakubiec J.: Bieżące programowe odtwarzanie wartości chwilowych dynamicznych przebiegów wejściowych nieliniowych przetworników pomiarowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Z.111, Gliwice 1988.

[3] Morawski R.Z. i inni: Metody odtwarzania sygnałów pomiarowych. Sprawozdanie z II etapu pracy I.21 problemu CPBP 02.20, Politechnika Warszawska, Warszawa 1987.

[4] Ogata K.: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa 1974.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Szyper

Wpłynęło do redakcji dnia 15 marca 1990 r.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Р е з ю м е

Определение устойчивости алгоритма обработки данных составляет основный шаг определяющий его практическую полезность. В статье предстевлен метод анализа устойчивости рекуррентных алгоритмов, существо которого заключено в том, что алгоритм превращается во временный ряд и исследуетця сходинность этого ряда. Метод представлен на примере его использования для анализа устойчивости рекуррентного алгоритма восстановления входных величин измерительных преобразователей описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями. Этот алгоритм основан на дискретном решении уравнения состояния по отношению к входиой величине. Он превращается во временный ряд, которого коэффициенты создают геометрическую последовательность. В работе описана процедура превращения алгоритма восстановления во временный ряд и представлены примерные результаты анализа устойчивости этого алгоритма для преобразователя второго порядка.

A STABILITY INVESTIGATION METHOD ASSIGNED FOR RECURRENT ALGORITHMS OF DATA PROCESSING

S u m m a r y

The basic step determining practical usability of data processing algorithms consists in investigating its stability. In the paper a stability investigation method assigned for recurrent algorithms is presented. The essence of this method consists in developing the algorithm into a time series and searching convergence of the series. The method is presented by examples showing its aplication to stability analysis of a recurrent algorithm using for reconstruction of the input quantity of the trasducer which can be described by an ordinary linear differential equation. The algorithm is based on discrete solving the state equation in relation to the input quantity. The coefficients of terms of the series create the geometrical progression. A procedure of developing the reconstruction algorithm in the time series and examplary results of stability analysis of the reconstruction algorithm for second order transducer are presented.