

Jerzy JAKUBIEC  
Zbigniew POKRYWKA

DEKOMPZYCJA DYNAMICZNYCH WŁASNOŚCI PRZETWORNIKA POMIAROWEGO DLA CELÓW  
METODY ODTWARZANIA OPARTEJ NA ROZWIĄZYWANIU Dyskretnego Równania Stanu.

**Streszczenie.** Algorytm odtwarzania dynamicznych przebiegów wejściowych przetworników pomiarowych oparty na rozwiązywaniu równania stanu może być w pewnych warunkach pomiarowych niestabilny. Jeden ze sposobów przeciwdziałania temu zjawisku polega na realizacji algorytmu etapami: wykonując kolejno działania cząstkowe według prostszych, stabilnych algorytmów. Punktem wyjścia takiego postępowania jest dekompozycja ogólnego równania różniczkowego, opisującego własności dynamiczne przetwornika, na łańcuch równań rzędu niższego, na podstawie których budowane są cząstkowe algorytmy odtwarzania. Takie postępowanie ma jednak wpływ na dokładność odtwarzania. Celem artykułu jest przedstawienie metody dekompozycji wzorowanej na sposobach stosowanych w rachunku operatorowym Laplace'a oraz podjęcie próby scharakteryzowania wpływu takiej dekompozycji na podstawowe parametry algorytmu odtwarzania określające jego dokładność.

## 1. Wstęp

Jedną z metod odtwarzania, ogólnie scharakteryzowanych w pracy [3], polega na zastosowaniu rozwiązywania równania stanu celem uzyskania wartości chwilowych przebiegu dynamicznej wielkości wejściowej przetwornika pomiarowego na podstawie spróbkowanego przebiegu wejściowego tego przetwornika [1]. Metodę tę cechuje prostota działań numerycznych a zatem względnie duża szybkość realizacji. Jednak tego rodzaju algorytm odtwarzania może być w pewnych warunkach pomiarowych niestabilny, w szczególności dotyczy to przetworników rzędu wyższego niż drugi [2]. Przeciwdziałanie temu zjawisku może polegać m.in. na realizacji odtwarzania etapami, drogą kolejnego wykonywania działań cząstkowych zgodnie z prostymi, stabilnymi algorytmami. Punktem wyjścia do tego rodzaju działania jest dekompozycja ogólnego równania różniczkowego, opisującego własności dynamiczne przetwornika, na łańcuch równań rzędu niższego, na podstawie których budowane są cząstkowe algorytmy odtwarzania. W dalszym

ciągu opisano metodę dekompozycji wzorowanej na sposobach stosowanych w rachunku operatorowym Laplace'a oraz scharakteryzowano wpływ takiej dekompozycji na podstawowe parametry algorytmu określające niedokładność odtwarzania.

## 2. Opis algorytmu

Rozpatrywany algorytm odtwarzania uzyskuje się wychodząc z założenia, że własności dynamiczne przetwornika opisywane są zwyczajnym, liniowym równaniem różniczkowym rzędu  $n$ :

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + y = b_0 x + b_1 x^{(1)} + \dots + b_m x^{(m)}, \quad (1)$$

gdzie  $x$  jest zmienną w czasie wielkością wejściową przetwornika,  $y$  - jego wielkością wyjściową,  $a_1, \dots, a_{n-1}$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_m$ , - stałymi współczynnikami równania i zachodzi  $m \leq n$ .

Zgodnie z definicją podaną w pracy [3] odtwarzanie można traktować jako rozwiązywanie równania odwrotnego do równania opisującego proces przetwarzania pomiarowego. Dla opisu własności przetwornika w postaci równania różniczkowego (1) tak zdefiniowane odtwarzanie stanowi procedurę rozwiązywania tego równania ze względu na wielkość wejściową  $x$ . Metodę rozwiązania opartą na zapisie równania (1) w postaci dyskretnego równania stanu - opisaną w pracy [1] - cechuje prostota numeryczna a zatem względnie krótki czas realizacji algorytmu. W wyniku rozwiązywania dyskretnego równania stanu ze względu na wielkość wejściową  $x$  uzyskuje się algorytm odtwarzania w postaci rekurencyjnego układu równań:

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\psi_1} \left[ y(k+1) - \varphi_{11} y(k) - \varphi_{12} \hat{y}_2(k) - \dots - \varphi_{1n} \hat{y}_n(k) \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2(k+1) &= \varphi_{21} y(k) + \varphi_{22} \hat{y}_2(k) + \dots + \varphi_{2n} \hat{y}_n(k) + \psi_2 \hat{x}(k) \\ &\vdots \\ \hat{y}_n(k+1) &= \varphi_{n1} y(k) + \varphi_{n2} \hat{y}_2(k) + \dots + \varphi_{nn} \hat{y}_n(k) + \psi_n \hat{x}(k), \end{aligned} \quad (3)$$

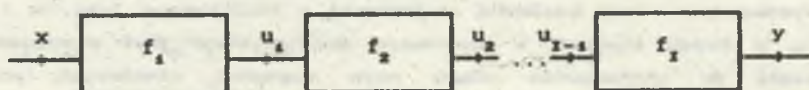
gdzie  $\hat{x}(k)$  jest oceną wielkości wejściowej w chwili  $t_k = kT$ ,  $T$  jest okresem dyskretyzacji,  $k$  - numerem chwili dyskretyzacji,  $k=0,1,\dots$ ,  $\hat{y}_2(k), \dots, \hat{y}_n(k)$  ocenami zmiennych stanu,  $y(k)$ ,  $y(k+1)$  - wynikami pomiaru wielkości wyjściowej przetwornika odpowiednio w chwilach  $k$  i  $k+1$ . Dla stałego okresu dyskretyzacji  $T$  współczynniki równań  $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1n}$ ,  $\varphi_{21}, \dots, \varphi_{nn}$ ,  $\psi_1, \dots, \psi_n$  przyjmują stałe wartości.

Algorytm działa w dwóch etapach. W pierwszym wyznaczana jest ocena wielkości wejściowej  $\hat{x}(k)$  zgodnie z zależnością (2) na podstawie wyników pomiarowych  $y(k)$ ,  $y(k+1)$  oraz ocen zmiennych stanu przechowywanych z poprzednich kroków obliczeń. W drugim etapie zgodnie z równaniami (3) obliczane są oceny zmiennych stanu  $\hat{y}_2(k+1), \dots, \hat{y}_n(k+1)$  celem użycia ich do kolejnego kroku działania algorytmu. Rozpoczęcie obliczeń wymaga znajomości wartości początkowych  $\hat{y}_2(0), \dots, \hat{y}_n(0)$ .

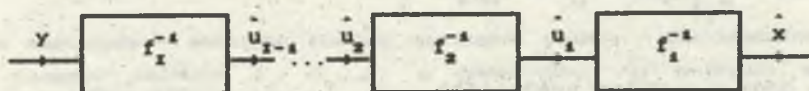
### 3. Zasada dekompozycji

Dekompozycja - w sensie, w jakim jest rozumiana w tym artykule - polega na przedstawieniu równania ogólnego (1) w postaci łańcucha równań cząstkowych. Odpowiada to postępowaniu polegającemu na przedstawieniu przetwornika pomiarowego w postaci łańcucha przetworników modelujących kolejne fazy przetwarzania wielkości mierzonej w sposób zilustrowany na rys.1a. Symbolami  $u_1, u_2, \dots, u_{I-1}$  oznaczono wielkości pomocnicze powstałe w procesie dekompozycji.

a)



b)



Rys.1. Związki zachodzące między kolejnymi etapami przetwarzania a odpowiadającymi im etapami odtwarzania po zastosowaniu dekompozycji ogólnego modelu przetwornika; a) łańcuch przetworników powstały w wyniku dekompozycji, b) łańcuch algorytmów odtwarzania odpowiadających kolejnym etapom przetwarzania

Fig.1. Relationships between successive steps of processing and suitable steps of reconstructing after using decomposition of the general model of the transducer; a) chain of transducers provided as a result of decomposition, b) chain of reconstruction algorithms suitable for successive steps of processing

Dekompozycja modelu przetwornika pociąga za sobą dekompozycję algorytmu odtwarzania. Jest on w takim wypadku realizowany etapami, przy czym na

każdym etapie działania algorytmu wyznaczana jest kolejno ocena jednej zmiennej pomocniczej, począwszy od oceny zmiennej pomocniczej  $\hat{u}_{i-1}$ , a skończywszy na ocenie wielkości mierzonej  $x$ , co ilustruje rys.1b.

W pracy [1] wykazano, że postępowanie takie jest poprawne ogólnie również, w przypadku występowania nieliniowości w równaniu ogólnym. W sytuacji, gdy równanie to jest liniowe kolejność działań opisanych poszczególnymi blokami na rys.1b może być dowolna.

#### Przykład 1

Zakładając ogólny opis przetwornika w postaci równania różniczkowego 3 rzędu

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = x, \quad (4)$$

można je zapisać w postaci łańcucha dwóch równań

$$u^{(1)} + u = x, \quad (5)$$

$$y^{(2)} + y^{(1)} + y = u. \quad (6)$$

Wyznaczanie oceny wielkości wejściowej  $\hat{x}$  realizowane jest, w tym przypadku, w dwóch etapach. W pierwszym rozwiązywane jest równanie (6), co prowadzi do wyznaczania ciągu ocen wartości chwilowych pomocniczej wielkości  $u$  zgodnie z następującym algorytmem odtwarzania 2 rzędu otrzymanym na podstawie układu równań (2) i (3):

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\psi_1} \left[ y(k+1) - \varphi_{11} y(k) - \varphi_{12} \hat{y}_2(k) \right], \quad (7)$$

$$\hat{y}_2(k+1) = \varphi_{21} y(k) + \varphi_{22} \hat{y}_2(k) + \psi_2 \hat{u}(k). \quad (8)$$

W drugim etapie rozwiązywane jest równanie 1 rzędu (5) przy użyciu algorytmu w postaci:

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\psi} \left[ \hat{u}(k+1) - \varphi \hat{u}(k) \right], \quad (9)$$

w wyniku czego otrzymuje się oceny wartości chwilowych przebiegu wejściowego  $\hat{x}(k)$ ,  $k=0,1,2,\dots$

Jak wynika z postaci równania (9) algorytm odtwarzania dla przetwornika 1 rzędu jest zawsze stabilny. Dane zamieszczone w pracy [1] pozwalają na

stwierdzenie, że również algorytm dla przetwornika pomiarowego 2 rzędu w postaci równań (7) i (8) jest stabilny.

#### 4. Procedura dekompozycji

Opisana poniżej procedura przedstawienia ogólnego równania różniczkowego za pomocą łańcucha równań niższego rzędu oparta jest na wykorzystaniu operatora różniczkowania. Idea tej procedury polega na przekształceniu równania różniczkowego w równanie algebraiczne, które w tej postaci może być dekomponowane drogą działań algebraicznych.

Oznaczając operator różniczkowania symbolem

$$s = \frac{d}{dt}, \quad (10)$$

zgodnie z którym  $n$ -pochodną wielkości  $y$  można zapisać jako :

$$y^{(n)} = s^n y, \quad (11)$$

równanie różniczkowe (1) można przedstawić w postaci algebraicznej jako:

$$(s^n + \dots + a_1 s + a_0) y = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) x. \quad (12)$$

Zapisując powyższe wyrażenie w postaci ułamka

$$\frac{y}{x} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (13)$$

można go następnie - stosując rozkład na ułamki proste - przekształcić do postaci iloczynu ułamków  $F_1, F_2, \dots, F_I$  o mianowniku, co najwyżej rzędu drugiego. Wyrażenie (13) można zatem przedstawić jako

$$\frac{y}{x} = \frac{u_1}{x} \frac{u_2}{u_1} \dots \frac{u_{I-1}}{u_{I-2}} \frac{y}{u_{I-1}} = F_1 F_2 \dots F_{I-1} F_I, \quad (14)$$

skąd otrzymuje się łańcuch równań cząstkowych

$$\frac{u_1}{x} = F_1, \quad (15)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = F_2,$$

$$\dots$$

$$\frac{y}{u_{I-1}} = F_I.$$

Stosując teraz kolejno do równań (15) przekształcenie odwrotne w stosunku do opisanego równaniem (10) uzyskuje się łańcuch równań różniczkowych  $f_1, \dots, f_1$ , rzędu nie wyższego niż drugi. Przedstawiają one cząstkowe własności dynamiczne przetwornika opisywanego ogólnym równaniem (1).

### Przykład 2

Równanie różniczkowe (4) po wprowadzeniu operatora różniczkowania (10) przyjmuje postać równania algebraicznego:

$$s^2 y + 2s^2 y + 2s y + y = x \quad (16)$$

Przedstawiając zależność (16) w postaci ułamka uzyskuje się wyrażenie

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (17)$$

które po rozbiciu na ułamki proste ma postać

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+s+1} \quad (18)$$

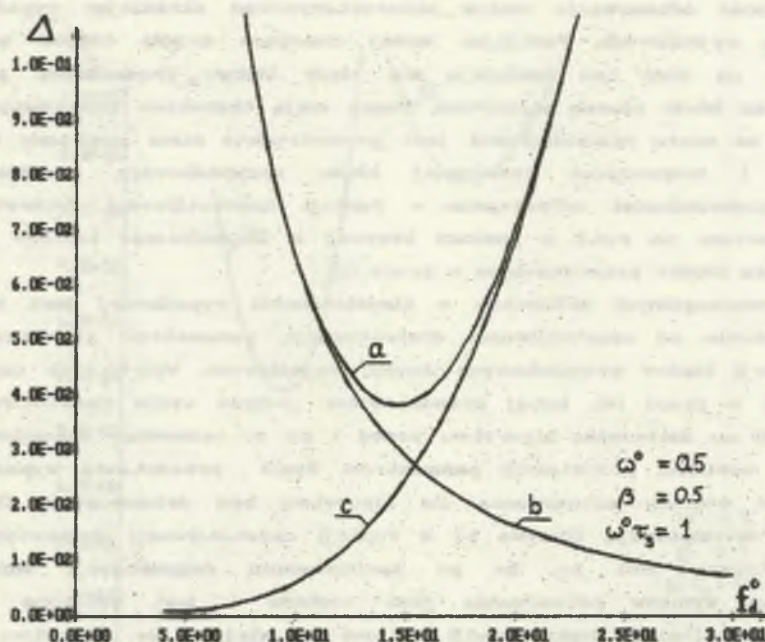
Traktując teraz poszczególne ułamki wyrażenia (18) jako operatorowy zapis równania różniczkowego, po przejściu na odpowiadający im zapis czasowy uzyskuje się rozdzielenie równania ogólnego (4) na równoważny łańcuch równań różniczkowych (5) i (6).

## 5. Podstawowe parametry charakteryzujące niedokładność odtwarzania

Można wyróżnić dwa podstawowe parametry określające dokładność algorytmu. Charakteryzują one błędy własne algorytmu oraz własności algorytmu w trakcie przenoszenia błędów danych wejściowych na wyjście.

Błędy wnoszone przez algorytm w procesie odtwarzania wynikają z faktu, że algorytm działa na danych dyskretnych będących wartościami chwilowymi przebiegu wyjściowego przetwornika, zatem przy tworzeniu dyskretnego modelu przetwornika zachodzi konieczność stosowania aproksymacji przebiegu wejściowego między chwilami dyskretyzacji. Błędy te nazywane błędami modelowymi (dyskretyzacji) poddano analizie w pracy [1]. Zależą one od wielu czynników, m.in. od okresu dyskretyzacji i szybkości zmian przebiegu wejściowego. Dogodnym w praktyce parametrem charakteryzującym niedokładność odtwarzania dla błędu modelowego jest amplituda różnicy przebiegu odtworzonego i wejściowego przy zastosowaniu wymuszenia sinusoidalnie zmiennego. Na rys.2 (krzywa b) pokazano przykładową zależność tej amplitudy w funkcji względnej częstotliwości dyskretyzacji  $f_d^0$  dla wybranych wartości parametrów dynamicznych przetwornika 3 rzędu oraz sinusoi-

dalnego przebiegu wejściowego o pulsacji względnej  $\omega^\circ = 0,5$  i jednostkowej amplitudzie. Przyjęto przy tym, że rozważany przetwornik 3 rzędu daje się przedstawić w postaci łańcucha przetworników: 1 rzędu o stałej czasowej  $\tau_s$  oraz 2 rzędu o pulsacji naturalnej  $\omega_0$  i stopniu tłumienia  $\beta$ . Zatem pulsacja względna  $\omega^\circ$  rozumiana jest tutaj jako stosunek  $\omega/\omega_0$ , gdzie  $\omega$  jest pulsacją przebiegu wejściowego. Natomiast względna częstotliwość dyskretyzacji  $f_d^\circ = f_d/f$ , gdzie  $f_d$  jest częstotliwością dyskretyzacji,  $f$  - częstotliwością przebiegu wejściowego.



Rys.2. Zależności charakteryzujące niedokładność odtwarzania w funkcji częstotliwości dyskretyzacji  $f_d^\circ$ ; a) wypadkowa niedokładność wyników odtwarzania, b) amplituda błędu modelowego, c) wariancja błędów przypadkowych na wyjściu

Fig.2. Relationships describing accuracy of reconstruction in relation to the discretization period  $f_d$ ; a) resultant uncertainty of results after correction, b) amplitude model error, c) variance of output errors

Algorytmy odtwarzania jako realizujące tzw. zadania odwrotne [5] cechuje z reguły wzmacnianie błędów przypadkowych danych wejściowych. Oznacza to w pewnym uproszczeniu, że wariancja błędów wyników wyjściowych jest większa od wariancji błędów danych. Parametrem charakteryzującym wzmacnianie błędów przypadkowych przez algorytm może być w tym przypadku stosunek

niepewności granicznej danych na wyjściu i wejściu algorytmu.

Zjawisko wzmacniania błędów ilustruje krzywa c na rys.2 przedstawiająca niepewność graniczną wyników wyjściowych przy założeniu, że dane wejściowe mają rozkład normalny o odchyleniu standardowym  $\delta_y = 0,001$  oraz wartości średniej równej zero.

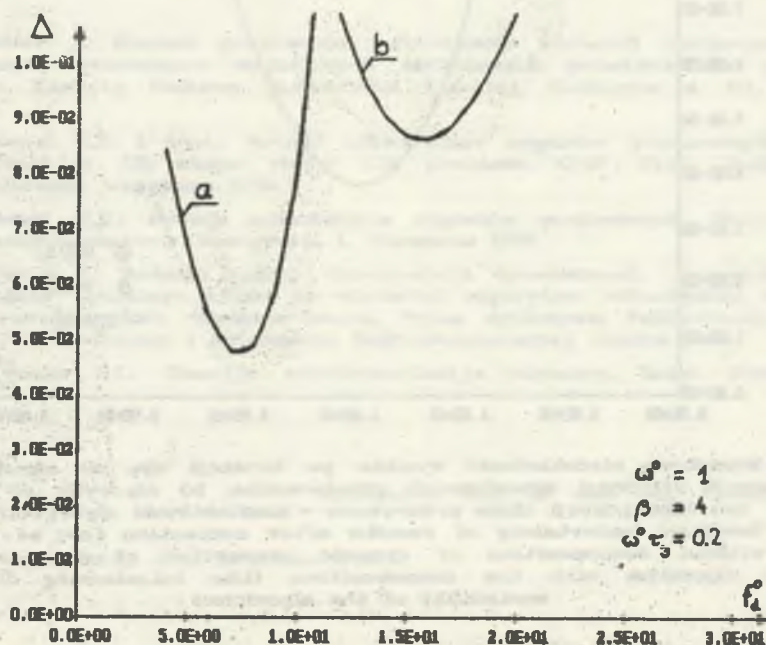
#### 6. Wpływ dekompozycji na dokładność odtwarzania

Niedokładność odtwarzania można scharakteryzować określając wypadkowy błąd danych wyjściowych. Pomijając mniej znaczące źródła błędów można przyjąć, że na błąd ten nakładają się błędy losowe przenoszone przez algorytm oraz błędy własne algorytmu, które mają charakter systematyczny. Przyjmując, że miarą niedokładności jest geometryczna suma amplitudy błędu modelowego i niepewności granicznej błędu przypadkowego przykładową zależność niedokładności odtwarzania w funkcji częstotliwości dyskretyzacji przedstawiono na rys.2 w postaci krzywej a. Uzasadnienie takiego sposobu składania błędów przedstawiono w pracy [1].

Udział poszczególnych składników w niedokładności wypadkowej jest różny i zależy głównie od częstotliwości dyskretyzacji, parametrów przetwornika oraz wariancji błędów przypadkowych danych wejściowych. Wpływ tych czynników zbadano w pracy [4]. tutaj przedstawiono jedynie wpływ częstotliwości dyskretyzacji na dokładność algorytmu przed i po zastosowaniu dekompozycji dla stałych wartości pozostałych parametrów. Rys.3 przedstawia wypadkową niedokładność wyników odtwarzania dla algorytmu bez dekompozycji (krzywa a) i z dekompozycją (krzywa b) w funkcji częstotliwości dyskretyzacji. Charakterystyczne jest to, że po zastosowaniu dekompozycji minimum niedokładności wyników odtwarzania jest większe i jest osiągane przy większej częstotliwości dyskretyzacji niż ma to miejsce dla algorytmu bez dekompozycji.

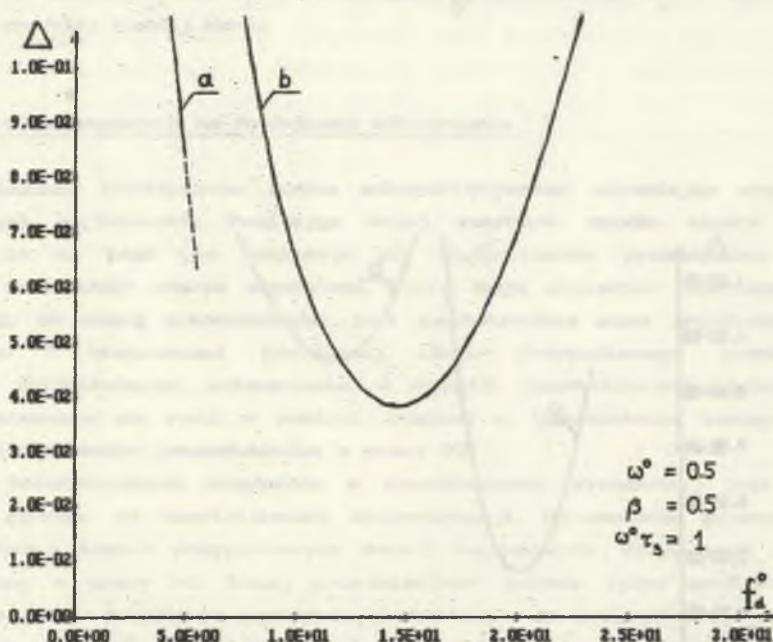
Inną sytuację przedstawia rys.4, na którym przedstawiono niedokładności wypadkowe dla zmienionych parametrów przetwornika (podanych na rysunku), wskutek czego algorytm bez dekompozycji (krzywa a) staje się niestabilny. Zastosowanie dekompozycji pozwala na uzyskanie stabilnego algorytmu odtwarzania, dla którego możliwy jest dobór takich warunków, aby uzyskać minimalną niedokładność przetwarzania.





Rys.3. Wypadkowa niedokładność wyników po korekcji dla: a) algorytm bez dekompozycji własności dynamicznych przetwornika, b) algorytm po zastosowaniu dekompozycji

Fig.3. Resultant uncertainty of results after correction for; a) the algorithm without decomposition of dynamic properties of the transducer, b) the algorithm with the decomposition



Rys.4. Wypadkowa niedokładność wyników po korekcji dla; a) algorytmu bez dekompozycji własności dynamicznych przetwornika, b) algorytm po zastosowaniu dekompozycji (linia przerywana - niestabilność algorytmu)

Fig.4. Resultant uncertainty of results after correction for; a) the algorithm without decomposition of dynamic properties of the transducer, b) the algorithm with the decomposition (the interleaving line sings unstability of the algorithm)

## 7. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda dekompozycji pozwala na uzyskanie stabilnych algorytmów odtwarzania dla przetworników pomiarowych, dla których równanie różniczkowe (1) modelujące właściwości dynamiczne przetwornika ma wszystkie współczynniki  $a_{n-1}, \dots, a_0$  różne od zera. Oznacza to, że praktycznie dla wszystkich przetworników pomiarowych, które mają skończoną i różną od zera wartość czułości statycznej, daje się budować stabilne algorytmy odtwarzania oparte na rozwiązywaniu równania stanu. Niemniej jednak należy stwierdzić, że w pewnych specyficznych sytuacjach, gdy wykorzystuje się opisane algorytmy do różniczkowania danych [2], może wystąpić niestabilność, której nie da się usunąć drogą dekompozycji.

Stosowanie dekompozycji pogarsza własności metrologiczne algorytmu, a mianowicie osiągane minimum niedokładności wypadkowej jest większe i jest uzyskiwane dla większej częstotliwości dyskretyzacji niż dla algorytmu bez dekompozycji. Wynika stąd wniosek, że dekompozycję należy stosować jedynie wtedy, gdy jest to konieczne, przede wszystkim w przypadku wystąpienia niestabilności algorytmu.

## LITERATURA

- [1] Jakubiec J.: Bieżące programowe odtwarzanie wartości chwilowych dynamicznych przebiegów wejściowych nieliniowych przetworników pomiarowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 111, Gliwice 1988.
- [2] Morawski R.Z. i inni.: Metody odtwarzania sygnałów pomiarowych. Sprawozdanie z III etapu pracy I.21 problemu CPBP 02.20, Politechnika Warszawska. Warszawa 1988.
- [3] Morawski R.Z.: Metody odtwarzania sygnałów pomiarowych. Metrologia i Systemy Pomiarowe. Monografia 1, Warszawa 1989.
- [4] Pokrywka Z.: Badanie wpływu dekompozycji dynamicznych własności przetworników trzeciego rzędu na własności algorytmu odtwarzania opartego na rozwiązywaniu równania stanu. Praca dyplomowa. Politechnika Śląska, Instytut Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej, Gliwice 1989.
- [5] Wasilenko G.I.: Teoriya vosstonowlieniya signalow. Izdat. Sow. Radio 1979.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Szyper

Wpłynęło do redakcji dnia 15 marca 1990 r.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ  
ДЛЯ ЦЕЛЕЙ МЕТОДА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОСНОВАННОГО НА РЕШЕНИИ  
ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Резюме

Алгоритм восстановления динамических входных сигналов измерительных преобразователей основанный на решении уравнения состояния может в некоторых условиях становиться неустойчивым. Один из способов противодействия тому требует поэтапного выполнения алгоритма с применением более простых устойчивых алгоритмов на каждом этапе. Отправной точкой такого следования является декомпозиция общего дифференциального уравнения описывающего динамические свойства преобразователя на цепь уравнений низшего порядка, на основе которых построены частичные алгоритмы восстановления. Такой подход влияет однако на точность восстановления. В статье описан метод декомпозиции созданный по образцу способов применяемых в операторном исчислении Лапласа. Проведена попытка определения влияния такой декомпозиции на главные параметры алгоритма восстановления определяющие его точность.

DECOMPOSITION OF DYNAMIC PROPERTIES OF A TRANSDUCER  
DESIGNED FOR THE RECONSTRUCTION METHOD BASED ON SOLVING  
THE DISCRETE STATE EQUATION

Summary

The reconstruction algorithm for dynamic input quantities of transducers based on solving the discrete state equation can be unstable under specific measurement conditions. One of the methods counteracting the instability consists in realizing the reconstruction step by step using a few simpler but stable algorithms. The starting point of such a procedure is decomposition of the differential equation describing generally dynamic properties of the transducer to a chain of low order equations on the base of which the partial reconstruction algorithms are constructed. Such a decomposition has an effect on accuracy of output data. In the paper the decomposition method base on the calculus specific for Laplace operator is described and an attempt to characterize influence of such a method on accuracy of the reconstruction procedure is undertaken.