

Bogusław CIEŚLAR

STANY GRANICZNE PRZEMIESZCZEŃ KONSTRUKCJI Z MATERIAŁU PLASTYCZNEGO Z LINIOWYM WZMOCNIENIEM

Streszczenie. W pracy przedstawiono praktyczny sposób szacowania stanów granicznych przemieszczeń konstrukcji. Model materiału przyjęto jako sztywno-plastyczny z liniowym wzmocnieniem. Wychodząc z zasady prac dopełniających, otrzymano równania pozwalające na obliczanie przemieszczeń granicznych. Przedstawiono przykład ilustrujący zaproponowany sposób rozwiązania.

DISPLACEMENTS LIMIT STATES OF A STRUCTURE MADE OF PLASTIC MATERIAL WITH LINEAR HARDENING

Summary. There was presented a practical approach of displacements limit states estimations of the structure. There was assumed a stiff-plastic model with linear hardening. Starting from the virtual work rule there was obtained equations which allows to compute limit displacements. Presented example illustrates the proposed approach of solution.

1. Wprowadzenie

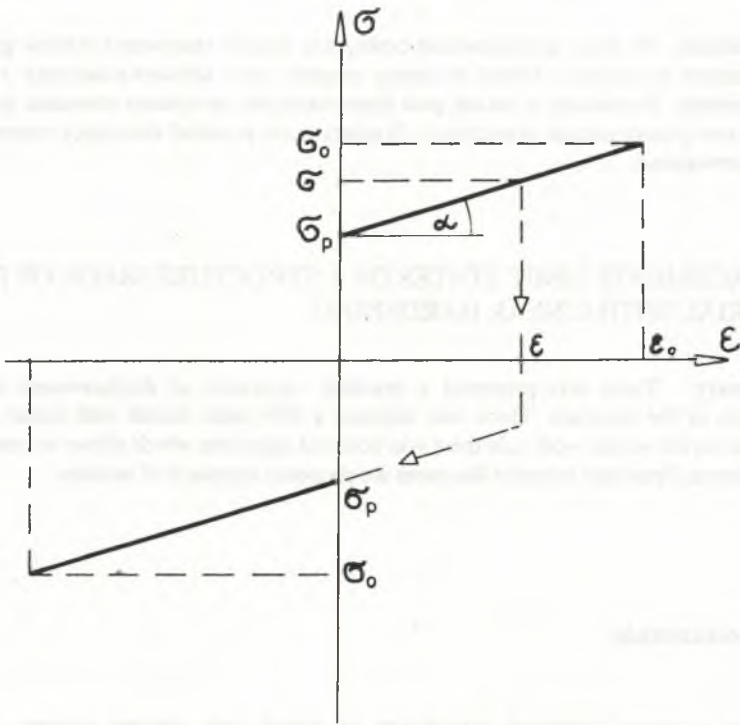
Metoda nośności granicznej przyjmująca za model ciało idealnie sztywno - plastyczne pozwala na określenie statycznie i kinematycznie dopuszczalnego pola sił wewnętrznych, czyli tzw. obciążenia granicznego. Sposób postępowania w takim przypadku jest opisany w literaturze i nie będziemy go tutaj szczegółowo przytaczać.

Określone deformacje terenu spowodowane ruchami górotworu na skutek eksploatacji górniczej przenoszone są na konstrukcję, powodując w niej wymuszone przemieszczenia. Metoda nośności granicznej nie pozwala na określenie granicznych wartości przemieszczeń konstrukcji, które mogłyby być porównywane z rzeczywistymi przemieszczeniami konstrukcji.

Przyjęcie modelu materiału jako sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem pozwoli te deformacje szacować.

2. Materiał sztywno - plastyczny z liniowym wzmocnieniem

Model materiału sztywno - plastycznego możemy określić następująco (rys.1):



Rys.1.

Poszczególne wielkości na rys.1 oznaczają:

- σ_p - granica plastyczności w sensie klasycznym (R_e);
- σ_0 - naprężenie graniczne równe wytrzymałości niszczącej;
- ϵ_0 - odkształcenie graniczne;

$$E' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_o - \sigma_p}{\varepsilon_o}$$

Z przedstawionego wykresu wynika:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0 \text{ dla } |\sigma| \leq \sigma_p; \\ \varepsilon &= \frac{\sigma - \sigma_p}{E'} \quad \text{dla } \sigma_p \leq |\sigma| \leq \sigma_o. \end{aligned} \quad (1)$$

3. Określenie relacji pomiędzy momentem zginającym a krzywizną osi odkształconej pręta

Rozkład naprężeń w przekroju, dla którego $M=M_0$, przedstawia rys.2, przy ograniczeniu rozważań do układów prętowych i założeniu, że deformacja spowodowana siłą tnącą i siłą osiową jest pomijalnie mała (lub $T=0$, $N=0$).

Moment plastyczny obliczamy ze znanej relacji

$$M_p = \sigma_p W_p \quad (2)$$

gdzie: σ_p - granica plastyczności;

W_p - plastyczny wskaźnik zginania.

Ponieważ stan naprężenia jest jednoosiowy, pisząc równania statycznej równowartości

$$M_z = \int_{(F)} \sigma_{11} x_3 \, dF; \quad (3)$$

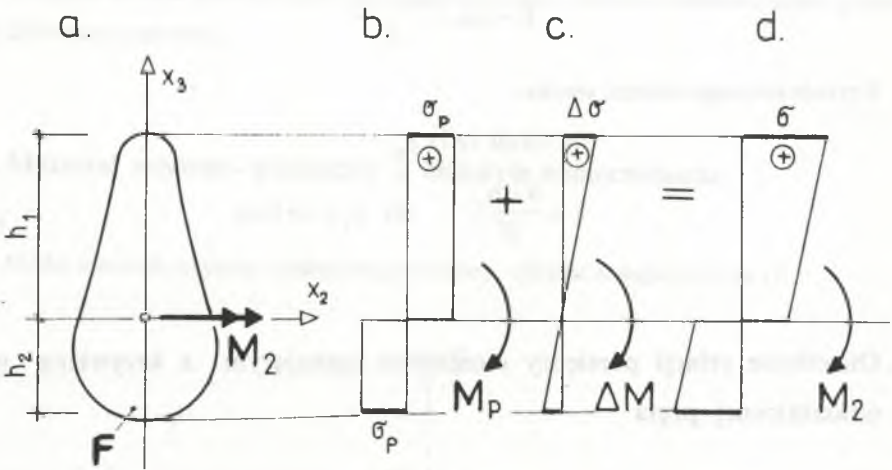
oraz

$$N = \int_{(F)} \sigma_{11} \, dF = 0; \quad (4)$$

z (3) otrzymujemy

$$M_o = M_p + (\sigma_o - \sigma_p) \frac{J_2}{h_1}. \quad (5)$$

Równanie (4) będzie spełnione, jeżeli oś x_2 będzie osią symetrii lub akurat przechodzi przez środek masy przekroju. Podkreślić należy, że przyjęta tu hipoteza płaskich przekrojów powoduje liniowy rozkład naprężeń od przyrostu ΔM momentu, co zachodzi na odcinkach, gdzie:



Rys.2.

$$M_0 \geq M > M_p$$

oraz na odcinkach, gdzie

$$M \leq M_p,$$

przy czym na odcinkach, gdzie $M \leq M_p$, deformacja nie zachodzi. Wskutek tego odcinki te przemieszczają się jak ciała sztywne. Wobec tego przemieszczenie układu będzie sumą sztywnych przemieszczeń oraz deformacji spowodowanej przyrostem momentu ΔM .

Krzywizna będzie tutaj dana wzorem

$$\kappa = \frac{M - M_p}{E' J_2} = \frac{\Delta M}{E' J_2} \quad (6)$$

a stąd:

$$M = M_p + E' J_2 \kappa \quad (7)$$

4. Równania statyki

Przyjmując, iż spełniona jest zasada prac wirtualnych, można napisać

$$\int_A p_i \delta u_i dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV. \quad (8)$$

Wynika ona jako warunek minimum dla funkcjonału Lagrange'a, gdzie:

p_i - uogólnione siły zewnętrzne,

δu_i - uogólnione przemieszczenie wirtualne,

σ_{ij} - składowe tensora naprężeń spowodowane uogólnionymi siłami p_i ,

$\delta \epsilon_{ij}$ - wirtualne odkształcenie spowodowane wirtualnym przemieszczeniem δu_i , $i, j = 1, 2, 3$.

Z literatury wiadomo, iż zasadę prac przygotowanych można wyrazić również poprzez wirtualny stan obciążeń zewnętrznych i stowarzyszony z nim stan naprężeń. Wynika ona jako warunek minimum dla funkcjonału Castigliano

$$\int_{\Lambda} \delta p_i u_i dA = \int_V \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (9)$$

Ta postać zasady prac wirtualnych jest szczególnie przydatna przy obliczaniu przemieszczeń.

5. Obliczanie przemieszczeń

Do obliczania przemieszczeń odpowiednio adaptujemy relację (9). Jako wirtualne obciążenie możemy przyjąć uogólnioną siłę l_i przyłożoną na kierunku szukanego uogólnionego przemieszczenia u_i .

$$\delta p_i = P_i \delta(x_i - \bar{x}_i) = l_i \delta(x_i - \bar{x}_i) \quad (10)$$

gdzie: $\delta(x_i - \bar{x}_i)$ - delta Diraca.

Podstawiając prawą stronę (10) pod całkę stojącą z lewej strony równania (9), otrzymamy

$$\int_{\Lambda} \delta p_i u_i dA = \int_{\Lambda} l_i \delta(x_i - \bar{x}_i) u_i dA = l_i u_i \quad (11)$$

Pod całkę z prawej strony równania (11) podstawiamy zależności dla omawianego przypadku

$$\epsilon_{11} = \kappa x_3 \quad (12)$$

$$\delta \sigma_{11} = \frac{\delta M x_2}{J_2} \quad (13)$$

i po elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$\int_V \delta \sigma_{11} \epsilon_{11} dV = \int_V \delta M \kappa dS \quad (14)$$

Podstawiając prawe strony równań (11) i (14) do równania (9) i uwzględniając równanie (6), otrzymamy

$$l, u_i = \int_s \delta M \frac{\Delta M}{E' J_2} ds \quad (15)$$

gdzie:

δM - wirtualne pole momentów odpowiadające przyłożonej wirtualnej sile o wartości 1;

ΔM - nadwyżka momentów na odcinkach, gdzie $M \geq M_p$.

Oczywiście pole momentów musi spełniać warunek

$$M_p \leq M \leq M_o \quad (16)$$

i stowarzyszony warunek

$$0 < \kappa \leq \kappa_o,$$

gdzie:

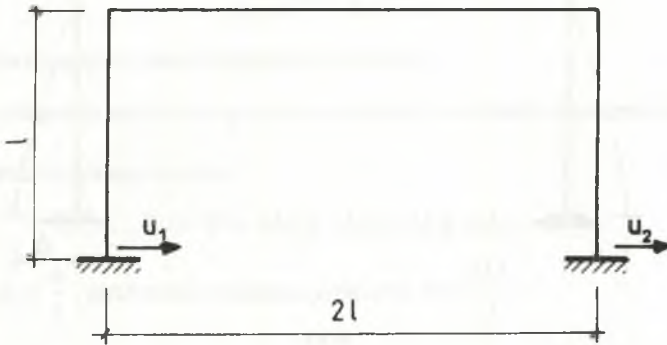
$$\kappa_o = \frac{M_o - M_p}{E' J}$$

Wydaje się, że warunek (16) będzie spełniony, jeżeli schemat zniszczenia będzie identyczny ze schematem wyznaczonym dla nośności określonej przy modelu idealnie sztywno - plastycznym. W tych samych przekrojach krytycznych przykładamy $M = M_o$ obliczony wg wzoru (5). Przy takim przyjęciu po wzmocnieniu konstrukcja nie jest jeszcze mechanizmem, a zatem przemieszczenia mają wartość skończoną.

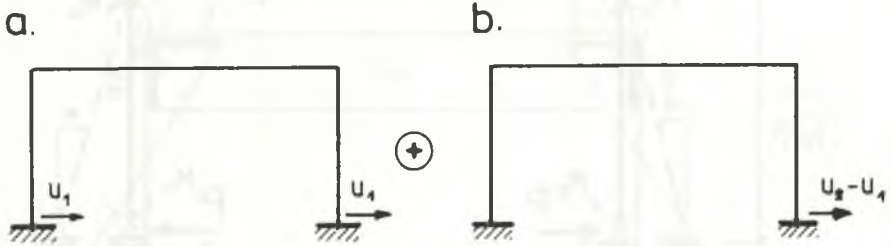
Można się zastanowić, czy we wszystkich przekrojach krytycznych wartość momentu M musi być równa M_o .

6. Przykład

Dla ilustracji zaproponowanego sposobu obliczania przemieszczeń granicznych rozważmy ramę pokazaną na rys.3. Określimy przemieszczenia graniczne podpór konstrukcji ramowej wykonanej z materiału sztywno - plastycznego z liniowym wzmocnieniem. Przemieszczenia podpór mogą w tym przypadku odpowiadać np. rozpełzaniu gruntu na skutek eksploatacji górniczej.



Rys.3.



Rys.4.

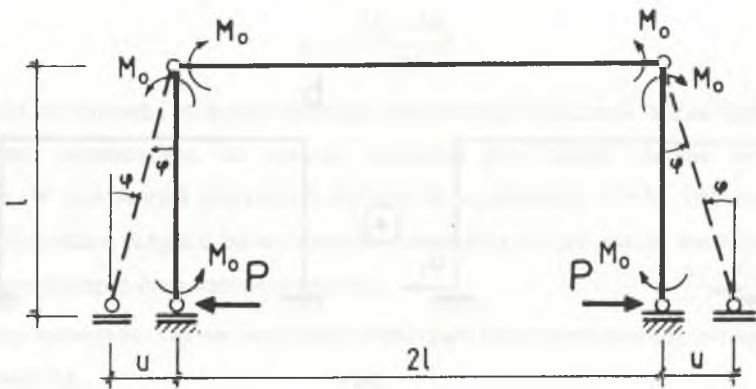
Powyższy przypadek poziomych przemieszczeń podpór ramy można rozłożyć na dwa przypadki składowe (rys.4).

Przemieszczenia podpór na rys.4a nie spowodują deformacji ramy. Zakładając w dalszym ciągu, iż $u_2 > u_1$, stan przemieszczenia z rys.4 można zamienić na ekwiwalentny stan przemieszczeń (rys.5), przy czym $\Delta = \frac{u_2 - u_1}{2}$.

$$\Delta = \frac{u_2 - u_1}{2}$$



Rys.5



Rys.6.

Zgodnie z przyjętym modelem materiału odkształcenia występują tylko tam, gdzie $\sigma_o \geq \sigma > \sigma_p$, czyli $M_o \geq M \geq M_p$. Na odcinkach, gdzie $M < M_p$, nastąpiły tylko sztywne obroty i przesunięcia tych odcinków.

Ponieważ ustrój jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny ($n = 3$), to aby konstrukcja zamieniła się w mechanizm o jednym stopniu swobody, musi pojawić się $r = n + 1 = 4$ przegubów plastycznych.

Z wykresu momentów wynika, iż liczba przekrojów krytycznych $m = 4$. Liczba mechanizmów podstawowych w tym przypadku będzie równa

$$p = m - n = 4 - 3 = 1,$$

a zatem możliwy jest tylko jeden mechanizm zniszczenia.

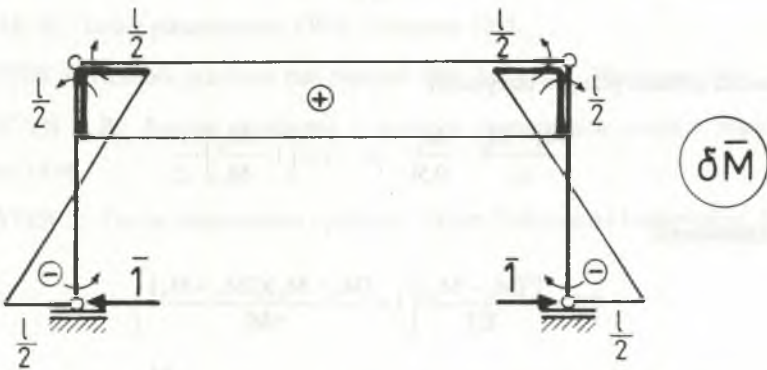
Określmy obciążenie graniczne tego ustroju, związane z mechanizmem zniszczenia z rys.6.

Z zasady prac wirtualnych wynika

$$P \cdot u + P \cdot u = M_0 \varphi + M_0 \varphi + M_0 \varphi + M_0 \varphi.$$

Podstawiając $\varphi = \frac{u}{l}$, otrzymamy obciążenie graniczne $P = \frac{2M_0}{l}$.

Przechodząc do wyznaczenia przemieszczenia granicznego, przykładamy na kierunku szukanego przemieszczenia obciążenie wirtualne o wartości $\bar{1}$ (rys.7)



Rys.7.

Z kolei określimy nadwyżkę momentów zginających ΔM ponad M_p (rys.8).

Z zasady prac dopełniających mamy

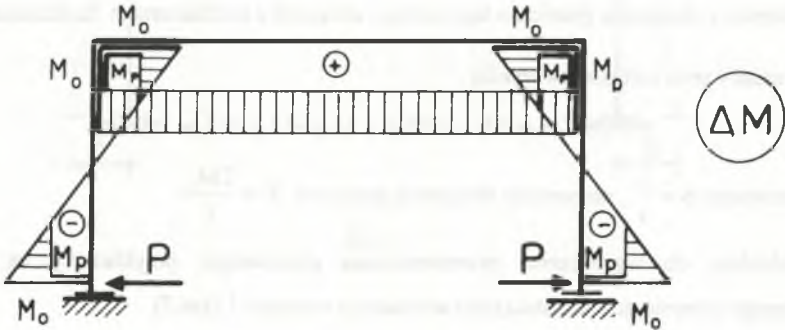
$$\bar{1} \Delta + \bar{1} \Delta = \int_s \delta \bar{M} \cdot \frac{\Delta M}{E'J} ds,$$

gdzie:

$$\Delta M = M - M_p,$$

a stąd

$$2\Delta = \frac{1}{E'J} \left[(M_o - M_p)l^2 + (M_o - M_p)a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a \right) \cdot 2 \right]$$



Rys.8.

Z zależności geometrycznych otrzymamy

$$\frac{M_o - M_p}{a} = \frac{M_o}{0.5l} \Rightarrow a = \left(1 - \frac{M_p}{M_o} \right) \cdot \frac{l}{2},$$

a po podstawieniu

$$2\Delta = \frac{l^2(M_o - M_p)}{E'J} \left[1 + \frac{(M_o - M_p)(2M_o - M_p)}{6M_o^2} \right]$$

Ponieważ $\Delta = \frac{u_2 - u_1}{2}$, to oznaczając $u_2 - u_1 = \delta_{\text{gran}}$ oraz $-\frac{M_p}{M_o} = \beta$,

otrzymamy

$$E'J\delta_{\text{gran}} = M_o\beta l^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{6}\beta^2 \right)$$

Wynik ten stanowi oszacowanie od dołu granicznych stanów przemieszczenia konstrukcji. Istotnie, przyjęty model pomija deformacje sprężyste. Można więc sądzić, że zaproponowany model pozwoli na bardziej racjonalną ocenę granicznych deformacji konstrukcji na terenach szkód górniczych.

7. Wnioski

- 7.1. Podano sposób szacowania granicznych wartości przemieszczeń konstrukcji.
- 7.2. Przyjęty model pozwala ocenić z dołu przemieszczenia graniczne.
- 7.3. Istnieje szansa na obiektywne prognozowanie granicznych deformacji konstrukcji na terenach występowania eksploatacji górniczej.

LITERATURA

1. HODGE P.H.: Plastic analysis of structures. Mc Graw - Hill, New York 1959.
2. NEAL B.G.: The plastic methods of structural analysis. Chapman and Hall, London 1956.
3. OLSZAK W.: Teoria plastyczności. PWN, Warszawa 1965.
4. SAWCZUK A.: Nośność graniczna ram płaskich. Bibl. Inż. i Bud., Warszawa 1964.
5. RZANICYN A.R.: Rasczot sooruzenij s ucztom płasticzeskich swojstw materiałow. Moskwa 1954.
6. SKRZYPEK J.: Teoria plastyczności i pełzania. Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1980.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał, prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

There was presented methods of displacements and loadings computations of bar structures. The assumed model of the material as stiff-plastic with linear hardening allows to estimate not only the limits loadings, but also limit displacements. There was defined a relation between a bending moment and curvature of deflected bar axis assuming that deformation is caused only by bending moments.

Assuming that the rule of virtual works is satisfied there was obtained equations which allows to compute limit loadings and displacements. The proposed method allows to estimate from the bottom the limit displacements of the structures subjected to mining exploitation's influence. The solution was illustrated with an example.



... ..

... ..

... ..

... ..