

Andrzej CIŃCIO

ZASTOSOWANIE PÓLANALITYCZNEJ WERSJI METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ANALIZIE STATYCZNEJ PODŁOŻA GRUNTOWEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono podstawowe założenia, algorytm rozwiązania i korzyści wynikające z zastosowania wersji półanalitycznej metody elementów skończonych w analizie statycznej podłoża gruntowego uwarstwionego horyzontalnie.

STATIC ANALYSIS OF THE SOIL SUBSTRATUM BY MEANS OF THE SEMI-ANALYTIC FINITE ELEMENT METHOD

Summary. The paper presents: basic formulations, a solution algorithm and advantages of the semi-analytic finite element method applied to the multi horizontal layer soil substratum.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie prawidłowego modelowania masywu gruntowego, odzwierciedlającego wierne jego rzeczywistą pracę statyczną, jest zagadnieniem stosunkowo trudnym, m.in. z powodu właściwości sprężysto-plastycznych i niejednorodności ośrodka gruntowego. Osobny problem stanowi często znaczny rozmiar formułowanego zadania, będącego z natury zadaniem przestrzennym, tylko w nielicznych przypadkach, np. dla obliczeń przybliżonych, możemy się zadowolić uproszczeniem polegającym na przyjęciu płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia (2D), każde zaś zadanie w stanie trójwymiarowym (3D) wymaga dostępu do maszyn cyfrowych o zwiększonej mocy obliczeniowej (systemy wieloprocesorowe o dużej wielkości pamięci operacyjnej), co powoduje, iż koszt obliczeń numerycznych jest duży.

W niektórych przypadkach korzystanie z wysoko wydajnych systemów obliczeniowych staje się nieekonomiczne; jak np. w rozpatrywanym w pracy przypadku masywu gruntowego

uwarstwionego w przybliżeniu poziomo. Jeśli brak jest dodatkowych niejednorodności wynikających np. z zagłębienia fundamentu, to pole przemieszczeń dowolnej warstwy można opisać za pomocą niezależnych od siebie funkcji tworzących szereg:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\omega=0}^{\infty} \mathbf{X}_{\lambda}(x) \cdot \mathbf{Y}_{\omega}(y) \cdot \mathbf{Z}_{\lambda\omega}(z) \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{X}=(x, y, z)$,

$\mathbf{X}_{\lambda}(x)$, $\mathbf{Y}_{\omega}(y)$ - ciągi diagonalnych macierzy funkcyjnych 3 rzędu,

$\mathbf{Z}_{\lambda\omega}(z)$ - podwójny ciąg wektorów funkcyjnych.

Niestety, stosunkowo skomplikowane rozwiązania analityczne wyrażenia (1) w postaci podwójnych całek Fouriera [1] ograniczone są tylko do przypadku liniowej sprężystości. Z kolei przyjęcie metody elementów skończonych w ujęciu tradycyjnym, opisującym pole przemieszczeń w obrębie trójwymiarowego elementu skończonego za pomocą odpowiednio dobranej funkcji kształtu, prowadzi do zadania o znacznym wymiarze i małej efektywności numerycznej:

$$\mathbf{U}^{(e)}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{w}^{(e)} \quad (2)$$

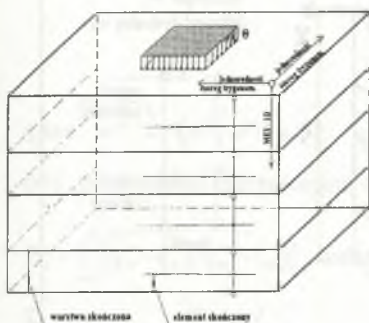
gdzie: $\mathbf{w}^{(e)} = \{w_1^{(e)}, \dots, w_i^{(e)}, \dots, w_m^{(e)}\}^T$ - jest wektorem przemieszczeń m . węzłów,

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & N_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & N_m(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 & N_m(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & 0 & N_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & 0 & N_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \text{funkcja kształtu.}$$

W przypadku uwarstwionego horyzontalnie masywu gruntowego bardziej ekonomiczne i wystarczająco dokładne rozwiązania uzyskuje się poprzez pewnego rodzaju kombinację wymienionych powyżej metod: metody analitycznej wykorzystującą analizę harmoniczną w kierunkach poziomych z metodą elementów skończonych w kierunku głębokości (rys.1), wyrażoną równaniem (3) będącym podstawą wersji półanalitycznej MES¹. Znaczącą efektywność wymienionej wersji uzyskuje się poprzez redukcję wyjściowego zadania przestrzennego (3D) do zadania 1-wymiarowego (1D), w sposób jaki pokazano w dalszej części artykułu.

¹ Wersja ta została rozwinięta przez Witmera i Kotanchika [8], Wilsona [7] oraz Cheunga [2].

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{(i)} \mathbf{N}_i(\mathbf{z}) \cdot \Phi_{\lambda}(x) \cdot \Phi_{\omega}(y) \cdot \mathbf{u}_{i,\lambda,\omega} \quad (3)$$



Rys. 1.

W pracy przedstawiono podstawowe założenia oraz algorytm rozwiązania uwarstwionego horizontalnie podłoża gruntowego za pomocą wersji półanalitycznej MES. Należy podkreślić ważność samej metody, jak również przedstawionych związków dla zagadnień sprężysto-plastycznych rozwiązywanych w sposób przyrostowo-iteracyjny, które należy w tym przypadku przedstawić w postaci przyrostowej.

2. Sformułowanie zagadnienia. Podstawowe założenia

Rozpatruje się wyciętą z masywu gruntowego bryłę podłoża o wymiarach l_x , l_y , l_z (rys.2), obciążoną na górnej powierzchni oddziaływaniem $q(x)$ pochodzącym od budowli, rozłożonym na obszarze prostokąta. Zakłada się jednorodność cech materiałowych w obrębie warstwy ($\nu, \gamma = const$) dopuszczając liniową zmienność modułu Younga po głębokości ($E = E(z)$).

Na powierzchni górnej spełnione są warunki równowagi naprężenia z obciążeniem

$$\mathbf{X} \in \Pi_0 \rightarrow \sigma(\mathbf{X}) = \begin{cases} -q(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Theta \\ 0, & \mathbf{X} \notin \Theta \end{cases}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{X} = \{x, y, z\}, \quad (4a)$$

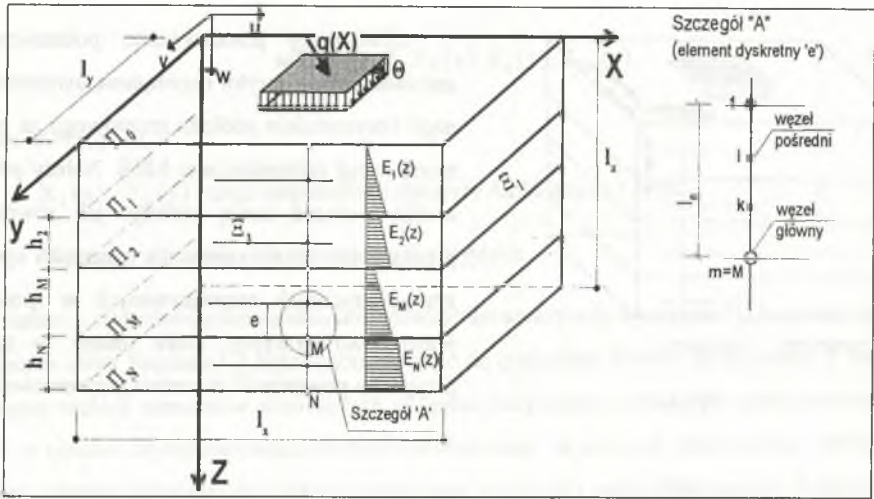
na brzegu dolnym warunek pełnego unieruchomienia

$$\mathbf{X} \in \Pi_N \Rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0, \quad \text{gdzie: } \mathbf{u} = \{u, v, w\}^T, \quad (4b)$$

natomiast na brzegach bocznych zachowany jest swobodny poślizg przy braku rozszerzalności

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{X} \in \Xi_1 \\ \mathbf{X} \in \Xi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow u(\mathbf{X}) = 0, \tau_{xy}(\mathbf{X}) = \tau_{xz}(\mathbf{X}) = 0 \quad (4c)$$

$$\left. \begin{array}{l} X \in \bar{\Pi}_3 \\ X \in \bar{\Pi}_4 \end{array} \right\} \Rightarrow v(X) = 0, \tau_{yx}(X) = \tau_{yz}(X) = 0.$$



Rys.2.

Dodatkowo zachowane muszą być warunki zgodności przemieszczeń i naprężeń na styku warstw

$$X \in \Pi_M \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z^-) = \mathbf{u}(x, y, z^+) \\ \boldsymbol{\sigma}(x, y, z^-) = \boldsymbol{\sigma}(x, y, z^+) \end{cases} \quad (4d)$$

Przedstawioną na rysunku 2 bryłę podłoża dzieli się na warstwowe elementy skończone obejmujące całość lub część warstwy podłoża, posiadające dwie lub więcej powierzchni węzłowych w zależności od stopnia przyjętego wielomianu interpolacyjnego (patrz szczegół A na rys.2).

3. Algorytm analizy

Punktem wyjścia do sformułowania związków określających stan przemieszczeń i naprężeń w obrębie warstwowego elementu skończonego jest wyrażenie (3) opisujące aproksymację pola przemieszczeń, które można przedstawić w postaci

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{\omega=0}^{\Omega} \sum_{(i)} N_i(z) \cdot \sin \lambda \pi \bar{x} \cdot \cos \omega \pi \bar{y} \cdot u_{i\lambda\omega} \\ \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{\omega=0}^{\Omega} \sum_{(i)} N_i(z) \cdot \cos \lambda \pi \bar{x} \cdot \sin \omega \pi \bar{y} \cdot v_{i\lambda\omega} \\ \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{\omega=0}^{\Omega} \sum_{(i)} N_i(z) \cdot \cos \lambda \pi \bar{x} \cdot \cos \omega \pi \bar{y} \cdot w_{i\lambda\omega} \end{cases} \quad (5)$$

gdzie: $\mathbf{u}^{(e)} = \{u^{(e)}, v^{(e)}, w^{(e)}\}$ $\bar{x} = x \cdot l_x$, $\bar{y} = y \cdot l_y$, $N_i(z)$ - jest funkcją kształtu dla węzła 'i' (i=1..m) w postaci interpolacyjnej funkcji Lagrange'a stopnia m-1:

$$N_i = \prod_{k=1}^m \left[\frac{(z - z_k)}{(z_i - z_k)} \right], \text{ zależnej od bezwymiarowej zmiennej } z, \quad z = \frac{2}{h_M} (z - z_M^0),$$

$$\bar{h}_M = h_M \cdot l_z, \quad \bar{z}_M^0 = z_M^0 \cdot l_z.$$

Pole odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_y^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)}, \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{(e)}, \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{(e)}, \boldsymbol{\gamma}_{zx}^{(e)}\}^T$ określamy na podstawie związków geometrycznych

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{u}^{(e)} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{\omega=0}^{\Omega} \sum_{(i)} \mathbf{B}_{\lambda\omega i}^{(e)} \cdot \mathbf{u}_{\lambda\omega i}^{(e)} \quad (6)$$

gdzie: \mathbf{L} - operator różnicowy, \mathbf{B} - macierz odkształceń, $\xi = \lambda \pi \bar{x}$, $\eta = \omega \pi \bar{y}$

$$\mathbf{B}_{\lambda\omega i}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i \lambda \pi \cos \xi \cos \eta & 0 & 0 \\ 0 & N_i \omega \pi \cos \xi \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l_x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cos \xi \cos \eta \\ -N_i \lambda \pi \sin \xi \sin \eta & -N_i \omega \pi \sin \xi \sin \eta & 0 \\ 0 & -N_i \omega \pi \cos \xi \sin \eta & \frac{2}{l_x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cos \xi \sin \eta \\ -N_i \lambda \pi \sin \xi \cos \eta & 0 & \frac{2}{l_x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \sin \xi \cos \eta \end{bmatrix} \quad (6a)$$

Następnie, posługując się związkami fizycznymi, możemy zdefiniować stan naprężeń dyskretnego elementu warstwowego

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D} \sum_{\mu=0}^{\Lambda} \sum_{\rho=0}^{\Omega} \sum_{(k)} \mathbf{B}_{\mu\rho k} \cdot \mathbf{u}_{\mu\rho k}^{(e)} \quad (7)$$

gdzie \mathbf{D} - jest macierzą sprężystości, k=1..m.

Równanie metody elementów skończonych, pozwalające na rozwiązanie problemu, wyprowadza się analogicznie jak dla wersji klasycznej MES-u, wykorzystując zasadę prac przygotowanych

$$\int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^{*(e)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV = \int_{(V)} (\mathbf{u}^{*(e)})^T \cdot \mathbf{g} dV + \int_{(S)} (\mathbf{u}^{*(e)})^T \cdot \mathbf{q} dS \quad (8)$$

gdzie: $\mathbf{g} = \{g_x, g_y, g_z\}^T$, $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}^T$ są wektorami sił masowych i powierzchniowych.

Podstawiając do (8) wyrażenia (5), (6) i (7), po przekształceniach otrzymujemy układ równań

$$\mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (9)$$

w którym: \mathbf{R} - wektor równoważących sił węzłowych, \mathbf{K} - macierz sztywności określona następująco

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{\mu=0}^{\Lambda} \sum_{\rho=0}^{\Omega} \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{\omega=0}^{\Omega} \sum_{(i)} \sum_{(k)} |x_i|_c |y_k|_c \int_{0}^1 \int_{0}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\mu\rho k}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{\lambda\omega i} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \quad (10)$$

W wyrażeniu (10) w iloczynie $\mathbf{B}_{\mu\rho k}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{\lambda\omega i}$ występują całki funkcji ortogonalnych przyjmujące wartości:

$$\int_0^1 \sin(\lambda\pi\bar{x}) \cdot \sin(\mu\pi\bar{x}) \cdot d\bar{x} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0 & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sin(\omega\pi\bar{y}) \cdot \sin(\rho\pi\bar{y}) \cdot d\bar{y} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } \omega = \rho \\ 0 & \text{dla } \omega \neq \rho \end{cases} \quad (11)$$

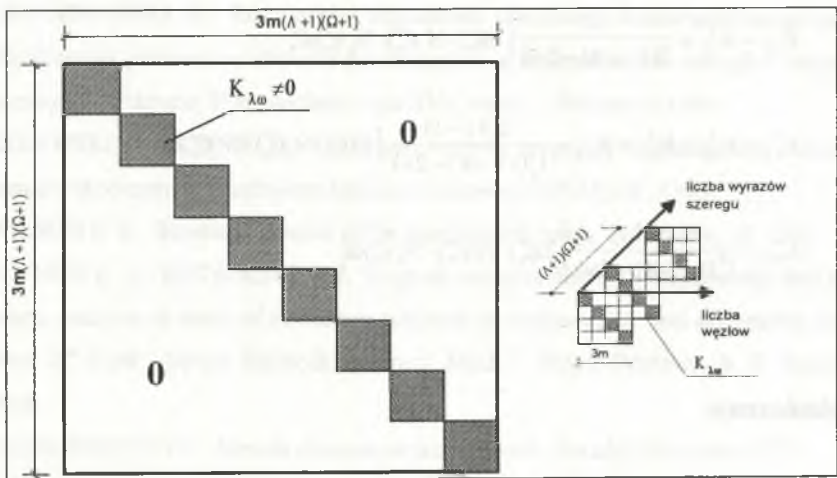
$$\int_0^1 \cos(\lambda\pi\bar{x}) \cdot \cos(\mu\pi\bar{x}) \cdot d\bar{x} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0 & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos(\omega\pi\bar{y}) \cdot \cos(\rho\pi\bar{y}) \cdot d\bar{y} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } \omega = \rho \\ 0 & \text{dla } \omega \neq \rho \end{cases}$$

Macierz sztywności elementu ma zatem budowę pasmową (rys.3), co pozwala po rozłożeniu obciążenia w szereg Fouriera rozdzielić układ równań (9) o wymiarze $3m(\Lambda + 1)(\Omega + 1)$ na $(\Lambda + 1)(\Omega + 1)$ niezależnych od siebie równań o postaci:

$$K_{\lambda\omega}^{(e)} \cdot u_{\lambda\omega}^{(e)} = R_{\lambda\omega}^{(e)} \tag{12}$$

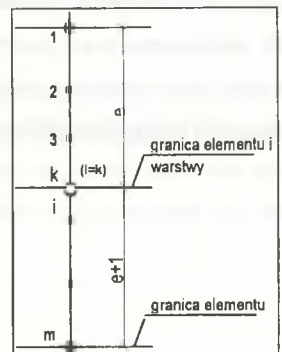
W ten właśnie sposób uzyskuje się wspomnianą wcześniej redukcję zadania przestrzennego (3D) do zadania jednowymiarowego (1D), osiągając tym samym znaczną efektywność obliczeń numerycznych.



Rys. 3.

Formowanie macierzy sztywności modelu złożonego z warstwowych elementów dyskretnych jest proste i przebiega wg poniższej formuły (ilustrację stanowi rysunek umieszczony obok):

$$K_{\lambda\omega ik} = \begin{cases} K_{\lambda\omega ik}^{(e)} + K_{\lambda\omega ik}^{(e)} & i, k \in e, (i = k) \wedge (i \in (e+1)) \\ K_{\lambda\omega ik}^{(e)} & i, k \in e, (i \neq k) \vee (i \notin (e+1)) \\ 0 & k \notin e \end{cases}$$



Należy zwrócić uwagę, iż dowolny blok macierzy $\mathbf{K}_{\lambda\omega\omega\omega}^{(e)}$ o postaci (13) składa się z wyrazów określonych prostymi funkcjami (14) umożliwiającymi przeprowadzenie całkowania w sposób analityczny:

$$\mathbf{K}_{\lambda\omega\omega\omega}^{(e)} = \frac{1}{4} \mathbf{I}_x \mathbf{I}_y \mathbf{I}_z \begin{bmatrix} \lambda^2 \mathbf{K}_{11}^* & \lambda\omega \mathbf{K}_{12}^* & \lambda \mathbf{K}_{13}^* \\ \lambda\omega \mathbf{K}_{21}^* & \omega^2 \mathbf{K}_{22}^* & \omega \mathbf{K}_{23}^* \\ \lambda \mathbf{K}_{31}^* & \omega \mathbf{K}_{32}^* & \mathbf{K}_{33}^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_{11}^* = \mathbf{K}_{22}^* = \frac{\pi^2(2-3\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-1}^1 E(\zeta) \cdot N_i(\zeta) \cdot N_k(\zeta) d\zeta$$

$$\mathbf{K}_{12}^* = \mathbf{K}_{21}^* = \frac{\pi^2}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-1}^1 E(\zeta) \cdot N_i(\zeta) \cdot N_k(\zeta) d\zeta$$

$$\mathbf{K}_{13}^* = \mathbf{K}_{31}^* = \mathbf{K}_{23}^* = \mathbf{K}_{32}^* = \frac{\pi(4\nu-1)}{1_\nu(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-1}^1 E(\zeta) \cdot N_i(\zeta) \cdot N'_k(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_{33}^* = \frac{4(2-3\nu)}{1_\nu^2(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-1}^1 E(\zeta) \cdot N'_i(\zeta) \cdot N'_k(\zeta) d\zeta$$

4. Zakończenie

Przedstawiony za pomocą wersji półanalitycznej metody elementów skończonych algorytm rozwiązania sformułowanego modelu warstw skończonych podłoża pozwala na efektywne numerycznie i wystarczająco dokładne dla zastosowań inżynierskich określenie stanu naprężeń i przemieszczeń w masywie gruntowym podłoża. Jednocześnie zastosowanie procedur iteracyjno-przyrostowych umożliwia uwzględnienie właściwości sprężysto-plastycznych gruntu. Po zakończeniu pracy autora nad programem komputerowym, ujmującym omówione zagadnienia pracy statycznej podłoża, co miejmy nadzieję nastąpi wkrótce, będzie możliwe przedstawienie szczegółowych wyników analiz numerycznych.

LITERATURA

1. BURMINSTER D.M.: The general theory of stresses and displacement in layered systems, J. Appl. Physics, vol.16, 2,3,5, 1945.
2. CHEUNG A. Y. K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford 1976.
3. GRYCZMAŃSKI M.: Metoda elementów skończonych w analizie podłoża budowli. Zeszyty naukowe WSI w Opolu, z. nr 21, Opole 1975.
4. GRYCZMAŃSKI M.: Metoda elementów skończonych w liniowej i nieliniowej mechanice. Materiały Seminarium Instytutu Konstrukcji Budowlanych, Gliwice 1994.
5. GRYCZMAŃSKI M.: Rozwiązanie zagadnienia równowagi wielowarstwowego podłoża obciążonego pionowo w obszarze prostokątnym, z zastosowaniem szeregów trygonometrycznych. Archiwum Hydrotechniki, tom XVI, zeszyt 2, Warszawa 1969.
6. KUJAWSKI J., OLEJNIK M.: Obliczanie warstwy sprężystej półanalityczną metodą elementów skończonych, Archiwum Inżynierii Lądowej, t.XXXI, z 4 , 1983.
7. WILSON E. L.: Structural analysis of the axisymmetric solids, J. AIAA, 3, 12, 1965.
8. WITMER E. A., KOTANCHIK J. J.: Progress report of discrete element elastic and elastic-plastic analyses of shells of revolution subjected to axisymmetric and asymmetric loading, Proc. 2nd Conf. „Matrix Methods in Struct. Mech”, Wright-Patterson A. F. Base Ohio, 1968.
9. ZIENKIEWICZ O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stanisław Biela

Abstract

This paper deals with the problem of the static analysis of a multi layer substratum subjected to a vertical load in rectangular area. The horizontal layers are linearly deformed and isotropic. The paper presents: basic formulations, a solution algorithm and advantages with the application of the semi-analytic finite element method.