

Stanisław KEMPNY

OPTYMALNY KSZTAŁT SŁUPA ŚCISKANEGO

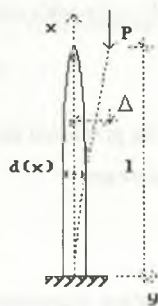
Streszczenie. Postępując się systemem programów *Mathematica*, w pracy wyznaczono optymalny kształt jednorodnego słupa ściskanego z uwzględnieniem wybozczenia z warunku na minimum objętości materiału konstrukcyjnego.

OPTIMUM SHAPE OF A PILLAR

Summary. In the paper the optimal shape of homogeneous pillar undergoing flexural buckling, under condition of minimum volume of the constructional material by means of the Mathematical system of programs was determined.

1. Wstęp

Systemy komputerowe [3,4] są bardzo wygodnym narzędziem ułatwiającym rozwiązywanie i analizę różnych zagadnień mechaniki. Wszeczhronne poznanie tych narzędzi może się okazać skuteczniejsze przy rozwiązywaniu mniej skomplikowanych zadań, jednak wymagających jednocześnie wykorzystania wielu ich funkcji. Pozwoli to następnie ocenić ich przydatność do rozwiązywania np. problemów, których postawienie do niedawna było co najwyżej możliwe. Do takich nieskomplikowanych zagadnień należy m. in. sformułowane przez Lagrange'a w 1770 r. zagadnienie poszukiwania optymalnego kształtu słupa ściskanego z uwzględnieniem wybozczenia, ze względu na minimum ciężaru (minimum objętości materiału konstrukcyjnego) [2].



Rys. 1.

Fizyczna strona zagadnienia zapewnia tutaj, że można się ograniczyć do zbadania warunku koniecznego istnienia minimum funkcjonału objętości materiału konstrukcyjnego słupa, a na-

stępnie do rozwiązania zagadnienia brzegowego dla nieliniowego równania różniczkowego zwyczajnego. W niniejszej pracy podjęto próbę wyznaczenia optymalnego kształtu jednorodnego słupa ściskanego z uwzględnieniem wybożenia za pomocą systemów [3,4]. Zagadnienie to było już przedmiotem wielu prac. W monografii [2] sprowadzono je do zagadnienia izoperymetrycznego, w [1] zaś poszukiwano optymalnego kształtu kolumny za pomocą MES oraz niezależnie sprowadzając je do zagadnienia Bolzy. Otrzymane tym drugim sposobem nieliniowe zagadnienie brzegowe rozwiązano metodą iteracyjną opartą na algorytmie Newtona.

2. Sformułowanie zagadnienia

Dla ustalonej wartości siły P (rys.1), spośród funkcji $A(x)$, $J(x)$, $y(x)$ spełniających równanie (1) i odpowiednie warunki brzegowe np. (4), należy znaleźć takie, przy których funkcjonal objętości materiału konstrukcyjnego (1₂) osiąga minimum.

$$EJ \cdot y'' = P(\Delta - y), \quad (1)$$

$$V = \int_0^l A \cdot dx.$$

Materiał słupa ma nośność określoną następującą nierównością

$$\frac{P}{A} \leq R, \quad \frac{P}{A} + s = R, \quad A = \frac{P}{R-s}, \quad (2)$$

gdzie: $s=s(x)$ jest pewną nieujemną funkcją $\forall x \in \langle 0, l \rangle \quad s(x) \geq 0$,

$A(x)$ i $J(x)$ oznaczają pole przekroju słupa oraz jego moment bezwładności.

W przypadku kolumny, tj. słupa o przekroju kołowym

$$J = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot A^2.$$

Dla przekroju prostokątnego przy ustalonej szerokości b moment bezwładności można wyrazić wzorem

$$J = \frac{A^3}{12 \cdot b^2}.$$

Dalsze postępowanie można łatwo przeprowadzić, w każdym przypadku gdy moment bezwładności da się wyrazić w postaci

$$J = \alpha_i \cdot A^i \quad i=1, 2, 3.$$

Wstawiając wyrażenie na moment bezwładności do równania (1₁), otrzymujemy

$$y' = \frac{S^2}{A^2} \cdot (\Delta - y),$$

gdzie $S^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot P}{E}$.

Kładąc

$$-y' = (\Delta - y) \cdot u, \quad -y'' = -y' \cdot u + (\Delta - y) \cdot u' = (\Delta - y)(u' + u^2),$$

otrzymujemy następującą postać równania różniczkowego pręta wyobczonego

$$u' + u^2 + \frac{S^2}{A^2} = 0.$$

Stąd pole przekroju kolumny można wyrazić wprowadzoną funkcją u i jej pochodną

$$A = \frac{S}{\sqrt{-u^2 - u'}}.$$

Funkcjonał objętości materiału konstrukcyjnego (1₂) w tym przypadku przyjmuje postać

$$V = \int_0^l A \cdot dx = S \cdot \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{-u^2 - u'}}. \quad (3)$$

Dla kolumny jak na rys. 1 warunki brzegowe dla funkcji $u(x)$ są

$$-y' = (\Delta - y) \cdot u \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow u(0) = 0, \quad u' + u^2 \Big|_{x=l} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{E \cdot P}. \quad (4)$$

Zmianę optymalnej średnicy kolumny wzdłuż jej wysokości można wyrazić wzorem

$$d = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{P}{\pi \cdot E \cdot (-u^2 - u')}}. \quad (5)$$

Równanie Eulera, tj. warunek konieczny istnienia ekstremum funkcyjonału (3), obliczone za pomocą programu [4] przyjmuje postać następującego równania różniczkowego

$$S \cdot \frac{-3 \cdot u'' - 10 \cdot u' \cdot u - 4 \cdot u^3}{4 \cdot (-u^2 - u')^{(5/2)}} = 0,$$

stąd

$$u'' + \frac{10}{3} \cdot u' \cdot u = -\frac{4}{3} \cdot u^3.$$

Oznaczając

$$u' = v,$$

można je sprowadzić do równania rzędu niższego, czyli do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\frac{dv}{du} \cdot v + \frac{10}{3} \cdot v \cdot u = -\frac{4}{3} \cdot u^3. \quad (6)$$

Są trzy całki równania (6), które obliczono systemem [4]:

$$v = \{v_1, v_2, v_3\} = -u^2 + 3 \cdot c_1 + c_1^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{9 \cdot c_1 - 2 \cdot u^2}{\varphi(u)} \cdot \left\{ 2^{\frac{1}{3}}, -2^{\frac{2}{3}} \cdot (1 + I \cdot \sqrt{3}), -2^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - I \cdot \sqrt{3}) \right\} + \\ + c_1^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(u) \cdot \left\{ 2^{\frac{1}{3}}, -\frac{1 - I \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, -\frac{1 + I \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \right\}, \quad (7)$$

gdzie $\varphi^3(u) = u^4 + u^3 \cdot \sqrt{u^2 - 4 \cdot c_1} - 18 \cdot c_1 \cdot u^2 + 54 \cdot c_1^2$, $I^2 = -1$.

W rozwiązaniach przybliżonych przydatna może być prosta postać zawierająca przytoczone trzy całki

$$\frac{2 \cdot u^2 + 3 \cdot v}{3 \cdot c_1} = \left(\frac{u^2 + v}{c_1} \right)^{\frac{2}{3}}$$

3. Pierwsza postać wyboczenia

Dalsze rozważania dotyczą pierwszej postaci wyboczenia (rys.1). Z przytoczonych trzech całek (7) równania różniczkowego (6) tylko druga stanowi rozwiązanie postawionego problemu, gdyż jest całką rzeczywistą zagadnienia brzegowego (4,7). Całki pierwsza i trzecia nie spełniają warunku

$$-u^4 - u^2 = -v - u^2 \Big|_{x=0} > 0,$$

czyli dają rozwiązanie urojone.

Funkcję rozwiązującą $u(x)$ można przedstawić w postaci funkcji odwrotnej, za pomocą całki

$$\int_0^u \frac{du}{v_2(u, c_1)} = x. \quad (8)$$

W dalszym postępowaniu wykorzystuje się pakiety numeryczne systemu *Mathematica*. Należy wyznaczyć stałą c_1 oraz wartość u_1 z warunków brzegowych (4)

$$v_1(u_1, c_1) + u_1^2 = -\frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{E \cdot P},$$

$$\int_0^{u_1} \frac{du}{v_2(u, c_1)} = l, \tag{9}$$

gdzie: $u_1 = u(l) = u(x)|_{x=l}$, $v_2(u(x), c_1)|_{x=l} = v_1(u_1, c_1)$,

$$v_2(u, c_1) = -u^2 + 3 \cdot c_1 - 2^{\frac{2}{3}} \cdot c_1^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{9 \cdot c_1 - 2 \cdot u^2}{\varphi(u)} \cdot (1 + I \cdot \sqrt{3}) - c_1^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi(u) \cdot \frac{1 - I \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

Przykład

Wyznaczyć optymalny kształt stalowej kolumny długości 5 m ściskanej siłą $P=10$ kN z uwzględnieniem wybočenja. $R=200$ MPa, $E=205$ GPa.

Do oceny stałej c_1 dla podstawowej i następných postaci wybočenja może służyć rozwiązanie przybliżone w postaci

$$u = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{5} \cdot c_1} \cdot th(x \cdot \sqrt{15 \cdot c_1}), \tag{10}$$

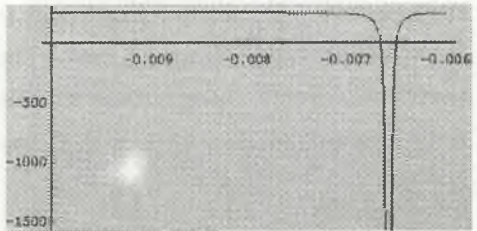
$$u' = 9 \cdot c_1 \cdot sch(x \cdot \sqrt{15 \cdot c_1}).$$

Z warunku (9₁) można obliczyć stałą c_1

$$u^2(5) + u'(5) + 250 = 250 + 9 \cdot c_1 \cdot sch^2(5 \cdot \sqrt{15 \cdot c_1}) + \frac{27}{5} \cdot c_1 \cdot th^2(5 \cdot \sqrt{15 \cdot c_1}) = 0.$$

Ostatni krok poszukiwania wartości tej stałej metodą graficzną przedstawiono na rys.2 wykonanym za pomocą funkcji plot systemu [4]. Dokładniejsza wartość stałej c_1 wynosi

$$c_1 = -0,0065.$$



Rys.2.

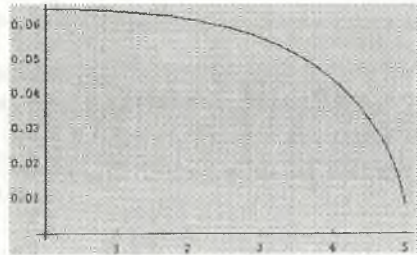
Pozwala to za pomocą wzoru (5) określić optymalny kształt kolumny wg wzorów przybliżonych (10). Wstawiając do (10) obliczoną wartość c_1 , a otrzymany wynik do (5), otrzymano przybliżony kształt optymalny kolumny, który przedstawiono na rys.3. Kształt ten określony jest następującym wzorem

$$d = \frac{0,0316}{\sqrt[3]{0,585 \cdot \sec^2(0,3122 \cdot x) - 0,0351 \cdot \operatorname{tg}^2(0,3122 \cdot x)}} \quad (11)$$

Z równań (9_{1,2}) można za pomocą systemu *Mathematica* obliczyć stałe c_1 i u_1 mając ich wartości przybliżone. Dokładne wartości tych stałych wynoszą

$$c_1 = -0,00821, u_1 = -207,064.$$

Optymalny kształt kolumny wyznaczony wzorem (8) pokazano na rys.4. Średnica jej podstawy wynosi ok. 12 cm. Różnicę pomiędzy kształtem optymalnym słupa (rys 4) a przybliżonym określonym wzorem (11) (rys.3)



Rys.3.

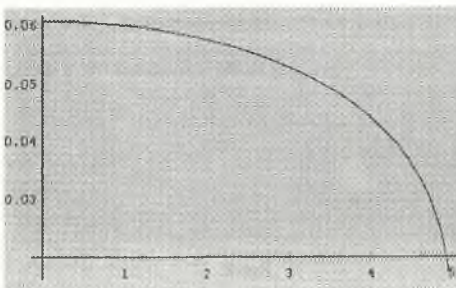
pokazano na rys.5. Procentowa różnica objętości materiału konstrukcyjnego słupa optymalnego i walca o tej samej nośności wynosi 15%. Objętość słupa o optymalnym kształcie można wyrazić wzorem

$$V_{opt} = S \cdot \int_0^{u_1} \frac{du}{v_2(u) \cdot \sqrt{-u^2 - v_2(u)}}.$$

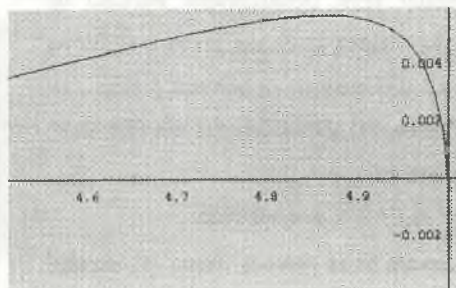
Dla słupa w formie walca objętość ta wynosi

$$V_w = A \cdot l = 2 \cdot l \cdot l_w \cdot \sqrt{\frac{P}{\pi \cdot E}},$$

gdzie dla słupa utwierdzonego u podstawy (rys.1) $l_w = 2 \cdot l$.



Rys.4.



Rys.5.

4. Wnioski

Zastosowanie systemu programów takich jak *Mathematica* [3,4] usprawnia rozwiązywanie i analizę zagadnień optymalizacji, wymagających posługiwania się zaawansowanym aparatem matematycznym.

Dla słupa smukłego o optymalnym kształcie różnica objętości jego materiału konstrukcyjnego w stosunku do słupa o tej samej nośności, lecz w formie walca, przekracza 15%.

LITERATURA

1. HAUG E. J., ARORA J. S.: Mechanical and structural system. A Wiley - Interscience Publication, New York 1979.
2. TROCKIJ W. A., PIETRUCHOW L.B.: Optimizacija formy uprugich tieł. Izdatielstwo „Nauka”, Moskwa 1982.
3. MARLEWSKI A.: Derive. Pomocnik matematyczny, Nakom, Poznań 1992.
4. WOLFRAM ST.: *Mathematica*: A System for Doing Mathematics by Computer. Second Edition, Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Champaign, Illinois, 1991.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stanisław Bielak

Abstract

Versatility of knowledge of tool problems, yet requiring many functions of this system. To such problem belong among others, an investigation of optimum shape of a pillar undergoing flexural buckling, that was determined in this paper. It will then allow to take advantage of this system to solve more difficult problems.