ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997
Seria: BUDOWNICTWO z. 84 Nr kol. 1376

Stanisław KEMPNY

RÓWNANIA METODY PRZEMIESZCZEŃ I MES USTROJÓW Z JEDNOSTRONNYMI WIĘZAMI

Streszczenie. Z zasady prac przygotowanych przy przygotowanym stanie naprężenia wyprowadzono równania metody przemieszczeń dla ustrojów z jednostronnymi więzami punktowymi. Następnie, wychodząc ze znanej aproksymacji MES, wyprowadzono równania dyskretyzowanego ustroju z jednostronnymi więzami w węzłach.

EQUATIONS OF THE DISPLACEMENT METHOD AND THE FINITE ELEMENT METHOD FOR STRUCTURES WITH UNILATERAL CONSTRAINS

Summary. Using the principle of complementary virtual work equations of the displacements method were deduced for structures with unilateral nodal point constraints. Then applying the well known approximation of the finite element analysis, the equations of a discrete structure with unilateral constraint at its nodes were derived.

1. Wstęp

W ustrojach prętowych i prętowo-cięgnowych więzy jednostronne mogą być rozmieszczone dyskretnie, w skończonej liczbie punktów lub być ciągłe na ogół na nieokreślonej długości elementu ustroju. Są to więzy liniowe lub wewnętrzne.

Równania metody przemieszczeń dla ustrojów z jednostronnymi więzami były już wyprowadzone w [2,5]. Oparto się przy tym na ich interpretacji statycznej. W niniejszej pracy wyprowadzono je z zasady prac przygotowanych przy przygotowanym stanie naprężenia. Następnie wychodząc ze znanej aproksymacji MES wyprowadzono równania dyskretyzowanego ustroju z jednostronnymi więzami w węzłach dwoma sposobami.

2. Metoda przemieszczeń

W ustroju podstawowym metody przemieszczeń więzy jednostronne mogą występować bądź nie. Dla ustroju z jednostronnymi więzami punktowymi, w którym dodano n uzupełniających do dwustronnych więzi, dla każdej z nich można napisać równanie prac przy przygotowanym stanie naprężenia

$$\sum\int \delta \underset{\sim}{M}^T \cdot d\underset{\sim}{\varphi} = \sum\int \delta \underset{\sim}{M}_k^T \cdot d\underset{\sim}{\varphi} = \delta u_k\left(\underset{\sim}{r}_k^T \cdot \underset{\sim}{u} + r_{kp} + r_{k\sigma_o\varepsilon_o}\right) = \delta u_k \cdot P_k = 0 \qquad (1)$$

Uwzględniono przy tym następujące zależności

$$\underset{\sim}{M}(x) = \underset{\sim}{M}_p(x) + \underset{\sim}{M}_{\sigma_o\varepsilon_o}(x) + \underset{\sim}{M}_u(x) \cdot \underset{\sim}{u},$$

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{P}_{\sigma_o\varepsilon_o} + \underset{\sim}{P}_u \cdot \underset{\sim}{u},$$

$$d\underset{\sim}{\varphi} = diag(\underset{\sim}{\alpha}) \cdot \underset{\sim}{M}\, dx.$$

Przyjęto oznaczenia:

$\underset{\sim}{r}_k^T = \{r_{k1}\, r_{k2} \dots r_{kn}\}$ siły w węźle k, w miejscu i kierunku wprowadzonej w ustroju podstawowym uzupełniającej do dwustronnej więzi, w poszczególnych stanach $u_i = 1.(i = 1\ 2 \dots n)$,

$r_{kp}, r_{k\sigma_o\varepsilon_o}$ siły jw., lecz od danego obciążenia oraz naprężeń i odkształceń początkowych.

Jeśli w ustroju podstawowym metody przemieszczeń występują jednostronne więzy, wówczas ostatnie równanie przyjmuje postać

$$\delta u_k\left(\underset{\sim}{r}_k^T \cdot \underset{\sim}{u} + r_{kp} + r_{k\sigma_o\varepsilon_o}\right) - \delta \underset{\sim}{u}_{sk}^T \cdot \underset{\sim}{P}_s = 0, \qquad (2)$$

gdzie $\delta \underset{\sim}{u}_{sk}^T = \{\delta u_{1k}\, \delta u_{2k} \dots \delta u_{mk}\}$, $\underset{\sim}{P}_s^T = \{P_1\, P_2 \dots P_m\}$.

Ostatni składnik w tym równaniu oznacza komplementarną pracę w jednostronnych więzach występujących w ustroju podstawowym. Każdy składnik tego członu jest oczywiście równy zeru.

Jeśli $\delta u_k = 1$, równanie (2) przyjmuje postać

$$\underset{\sim}{r}_k^T \cdot \underset{\sim}{u} + r_{kp} + r_{k\sigma_o\varepsilon_o} - P_k - \underset{\sim}{u}_{sk}^T \cdot \underset{\sim}{P}_s = 0, \qquad (3)$$

gdzie $P_k \geq 0$ i $\underset{\sim}{u} \geq 0$.

Równania opisujące pracę statyczną ustroju z jednostronnymi więzami można zapisać w postaci

$$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{r}_p + \underset{\sim}{r}_{\sigma_o \varepsilon_o} - \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{u}_s \cdot \underset{\sim}{P}_s = \underset{\sim}{0}. \tag{4}$$

Oznaczenia są:

$\underset{\sim}{u}^T = \{u_1\, u_2 \ldots u_n\}$, $\underset{\sim}{u} \geq \underset{\sim}{0}$ wektor niewiadomych przemieszczeń w miejscu i kierunku wprowadzonych w ustroju podstawowym uzupełniających do dwustronnych więzów,

$\underset{\sim}{r}_p^T = \{r_{1p}\, r_{2p} \ldots r_{np}\}$, $\underset{\sim}{r}^T = \{\underset{\sim}{r}_1^T\, \underset{\sim}{r}_2^T \ldots \underset{\sim}{r}_n^T\}$ $\underset{\sim}{r}_{\sigma_o \varepsilon_o}^T = \{r_{1\sigma_o \varepsilon_o}\, r_{2\sigma_o \varepsilon_o} \ldots r_{n\sigma_o \varepsilon_o}\}$, reakcje jw.

$\underset{\sim}{P}^T = \{P_1\, P_2 \ldots P_n\}$, $\underset{\sim}{P} \geq \underset{\sim}{0}$ wektor sił w uzupełniających do dwustronnych, dodanych w ustroju podstawowym, więzach jednostronnych,

$\underset{\sim}{u}_s$ i $\underset{\sim}{P}_s$ macierz przemieszczeń w więzach jednostronnych występujących w ustroju podstawowym w poszczególnych stanach $u_i=1$ i wektor odpowiadających im sił.

3. Metoda elementów skończonych

W najprostszym zastosowaniu metody elementów skończonych określa się funkcję przemieszczeń wewnątrz elementu o postaci [1,7]

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{\alpha},$$

gdzie: $\underset{\sim}{u}$ jest wektorem przemieszczeń wewnątrz elementu,

$\underset{\sim}{L}$ macierzą funkcyjną, wielomianów lub określonych funkcji elementarnych,

$\underset{\sim}{\alpha}$ zaś oznacza wektor uogólnionych stopni swobody.

Dążąc do wyrażenia przemieszczeń wewnątrz elementu przemieszczeniami jego węzłów, układa się równania o postaci

$$\underset{\sim}{u}\Big|_{\partial\Omega_l} = \underset{\sim}{q}_l = \underset{\sim}{L}\Big|_{\partial\Omega_l} \cdot \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{\alpha}.$$

Gdzie $\underset{\sim}{q}_l$ jest wektorem przemieszczeń węzłów znajdujących się w wytypowanych punktach na brzegu elementu.

Równość ta ma sens, jeśli wymiary wektorów $\underset{\sim}{q}_l$ i $\underset{\sim}{\alpha}$ są identyczne. Przemieszczenia wewnątrz elementu, o ile macierz $\underset{\sim}{A}$ nie jest osobliwa, można wówczas wyrazić przemieszczeniami jego węzłów za pomocą tzw. macierzy funkcji kształtu elementu

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{q}_l , \quad \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{q}_l = \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{q}_l$$

gdzie $\underset{\sim}{N}$ jest macierzą funkcji kształtu elementu.

Odkształcenia wewnątrz elementu określa się w następujący sposób

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\partial}_{,(\cdot)} \cdot \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\partial}_{,(\cdot)} \cdot \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{q}_l = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{q}_l ,$$

gdzie symbolem $\underset{\sim}{\partial}_{,(\cdot)}$ oznaczono macierz operatorów różniczkowych.

Naprężenia przy założeniu jego sprężystej pracy można wyrazić następującym równaniem

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_p + \underset{\sim}{\sigma}_o + \underset{\sim}{\sigma}_{\varepsilon o} + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{L}_l \cdot \underset{\sim}{q} , \qquad (5)$$

wykorzystano przy tym równania konstytutywne

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}$$

oraz równanie transformacji wektorów przemieszczeń węzłów elementu, z układu współrzędnych globalnego do lokalnego

$$\underset{\sim}{q}_l = \underset{\sim}{L}_l \cdot \underset{\sim}{q} .$$

Gdzie $\underset{\sim}{D}$ jest znaną macierzą sprężystości [7].

Dla ustrojów prętowych $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{M}$ oznacza wektor sił wewnętrznych w elemencie skończonym, czyli pręcie. Zgodnie z tym można przez analogię do wzoru (5) napisać

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}_p + \underset{\sim}{M}_{\sigma_o \varepsilon_o} + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{L}_l \cdot \underset{\sim}{q} .$$

Jeśli w pewnych węzłach elementów skończonych dyskretyzowanego ustroju występują więzy jednostronne, wówczas analogicznie jak w p.2 dla każdego z tych więzów można napisać równanie prac przy przygotowanym stanie naprężenia

$$\sum \int \delta \underset{\sim}{M}^T \cdot d\underset{\sim}{\varphi} = \sum \delta \underset{\sim}{q}^T \cdot \underset{\sim}{L}_l^T \cdot \left[\left(\int \underset{\sim}{B}^T \cdot \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot dx \right) \cdot \underset{\sim}{L}_l \cdot \underset{\sim}{q} + \int \underset{\sim}{B}^T \left(\underset{\sim}{M}_p + \underset{\sim}{M}_{\sigma_o \varepsilon_o} \right) \cdot dx \right] =$$

$$= \delta q_k \left(\underset{\sim}{r}_k^T \cdot \underset{\sim}{q} + r_{kp} + r_{k\sigma_o \varepsilon_o} \right) = \delta q_k \cdot F_k = 0 ,$$

gdzie: δq_k przygotowane przemieszczenie więzi jednostronnej k,

F_k siła w tej więzi,

$d\underset{\sim}{\varphi} = \underset{\sim}{D}^{-1} \cdot \underset{\sim}{M} \cdot dx$.

Dzieląc przez δq_k, otrzymujemy następujące równanie dla więzi jednostronnej k

$$\underset{\sim}{r}_k^T \cdot \underset{\sim}{q} + r_{kp} + r_{k\sigma_o\varepsilon_o} - F_k = 0. \tag{6}$$

W równaniu tym $F_k \geq 0$ i $q_k \geq 0$ oraz $F_k \cdot q_k = 0$.

Wynika stąd, że równania kanoniczne dyskretyzowanego ustroju z jednostronnymi więzami przyjmują taką samą postać (4), o ile więzy jednostronne występują w węzłach elementów skończonych. Sposób ten może być wykorzystany do tworzenia równań kanonicznych ustroju z jednostronnymi więzami, dla którego dysponujemy programem komputerowym MES. Posługując się ustrojem bez więzów jednostronnych (uzupełnionym do dwustronnych więzami jednostronnymi ustrojem podstawowym), wymusza się kolejno przemieszczenia w miejscu i kierunku wprowadzonych więzi i oblicza siły we wszystkich dodanych więzach jednostronnych. Wyznaczając analogicznie składniki równań (4) od obciążeń i innych wpływów, mamy określone równania rozwiązujące zagadnienie pracy statycznej dyskretyzowanego ustroju, z jednostronnymi więzami w węzłach elementów skończonych.

Drugi sposób polega na określeniu podstawowego związku pomiędzy siłami w węzłach elementu skończonego oraz ich przemieszczeniami, jeśli w pewnych węzłach występują więzy jednostronne. Z postaci równania dla więzi jednostronnej k (6) wynika, że równania dyskretyzowanego ustroju z jednostronnymi więzami można również tworzyć przez agregację macierzy i wektorów poszczególnych elementów skończonych ustroju, występujących w następujących równaniach równowagi pojedynczego elementu skończonego z jednostronnymi więzami w węzłach w globalny układ równań,

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K} \cdot \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{F}_p + \underset{\sim}{F}_{\sigma_o\varepsilon_o} - \underset{\sim}{F}_s,$$

gdzie: $\underset{\sim}{K}$ macierz sztywności elementu skończonego,

$\underset{\sim}{q}$ wektor przemieszczeń węzłów,

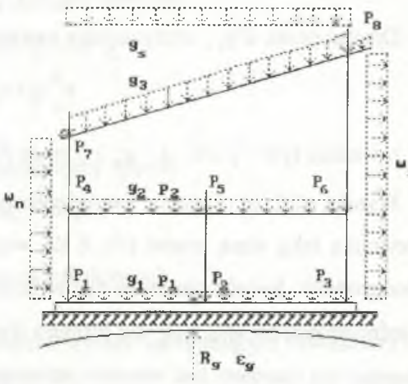
$\underset{\sim}{F}_p$, $\underset{\sim}{F}_{\sigma_o\varepsilon_o}$ siły w węzłach od obciążeń i wpływów niemechanicznych,

$\underset{\sim}{F}_s$ siły w jednostronnych więzach.

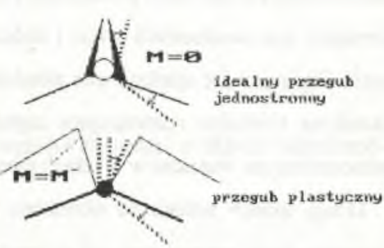
Jeśli w elemencie skończonym więź k jest jednostronna, obowiązują wówczas warunki (6_2).

Przykład

Stalową ramę płaską, wspartą na żelbetowej ławie, poddaną działaniu określonego programu obciążeń i wpływów górniczych, sprawdzić na przystosowanie [6]. Przyjęto, że dominującym wpływem jest zginanie, w wyniku którego w przekroju może powstać przegub plastyczny ze skoncentrowanymi w nim trwałymi odkształceniami. W trakcie realizacji programu obciążeń w pewnych przekrojach krytycznych ramy może dojść do uplastycznienia. Powstaje pytanie, czy dla przyjętego programu obciążeń trwałe odkształcenia plastyczne stabilizują się i następuje przystosowanie, czy też konstrukcja będzie narażona na zniszczenie niskocyklowe bądź przyrostowe.



Rys.1.



Rys.2.

Można zauważyć, że idealnym modelem przegubu plastycznego jest przegub jednostronny (rys.2). Zmiana kąta w przegubie plastycznym tak samo jak w przegubie jednostronnym może się odbyć tylko w jednym kierunku. Różnica polega na tym, że zmiana tego kąta w przegubie plastycznym może się dokonać dopiero po osiągnięciu przez moment zginający w pewnym przekroju, granicznej wartości $M = \mp M^{\mp}$ (w idealnym przegubie jednostronnym M=0). Każdemu przekrojowi, w którym może nastąpić uplastycznienie, odpowiadają dwie wartości momentów uplastycznienia o przeciwnych zwrotach. Tym samym w modelu, tj. ustroju z jednostronnymi więzami, w każdym przekroju, odpowiadającym przekrojowi krytycznemu, występują dwa przeguby jednostronne o przeciwnie ograniczonej możliwości zmiany kąta obrotu.

W dalszym ciągu należy określić program obciążenia, tj. np. utworzyć kombinacje obciążeń niezależnych. Można zauważyć, że każde obciążenie z rys.1 jest interwałem rzeczywistym, np.: $g_l \in \langle g_{li}, g_{ls} \rangle, p_l \in \langle 0, p_{ls} \rangle$ itp.[4]. Tym samym i wektory wyrazów wolnych $\underset{\sim}{r}_{p}, \underset{\sim}{r}_{\sigma_g \varepsilon_g}$ są wektorami interwałowymi itd. Zatem momenty w wytypowanych przekrojach krytycznych od niezależnych kombinacji obciążeń można przedstawić w postaci macierzy interwałowej o wymiarach, liczba przekrojów krytycznych, liczba kombinacji obciążeń niezależnych. Każdy element tej macierzy jest interwałem jednowymiarowym. Jeśli przystosowanie przedmiotowej ramy jest możliwe, wówczas musi istnieć taki wektor $\underset{\sim}{u}^{\pm}$, przy którym zachodzi następująca nierówność

$$-\underset{\sim}{M}^{-} \leq \underset{\sim}{M} \leq \underset{\sim}{M}^{+}.$$

Nierówność tę można sprowadzić do następującej równości

$$\underset{\sim}{M} \pm \underset{\sim}{m}^{\pm} = \pm \underset{\sim}{M}^{\pm}, \; \underset{\sim}{m}^{\pm} \geq 0, \tag{7}$$

za pomocą osłabiającej macierzy interwałowej o identycznych kolumnach. Równość ta w poszczególnych przekrojach krytycznych może zachodzić bądź dla znaku plus, bądź minus. Wynika stąd, że wektor $\underset{\sim}{u}^{\pm}$ może być poszukiwany jak warunkowe rozwiązanie dopuszczalne programowania liniowego z równań (7) z warunkami $m^{\pm} \cdot u^{\pm} = 0$. Ze względu na ławę rozwiązanie, o ile istnieje, może być wyznaczone iteracyjnie przy wykorzystaniu programu [3].

LITERATURA

1. JENKINS W.: M Matrix and digital computer methods in structural analysis. McGraw-Hill, London 1969.
2. KEMPNY S.: Podstawy komputerowej analizy statycznej płaskich ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami. Z. Nauk. Pol. Śl. z 60, Gliwice 1985.
3. KEMPNY S.: Siły kontaktowe ławy i półprzestrzeni sprężystej, XLI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1995.
4. Neumaier A.: Interval methods for system of equations, Cambridge Univ. Press, New York 1990.
5. PIERELMUTER A.W.: Ustroje prętowo cięgnowe. Arkady, Warszawa, 1972.
6. SAWCZUK A.: Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych. PWN, Warszawa 1982.
7. ZIENKIEWICZ O. C.: The element method in engineering science, McGraw-Hill, London 1971.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stanisław Bielak

Abstract

For structures with unilateral constrains equations of the displacements method were derived using the complementary virtual work. Applying approximation of the finite element method two ways of constructing of equations of a discrete structure with unilateral constrains were given, modelling its statical work.