ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997
Seria: BUDOWNICTWO z. 84 Nr kol. 1376

Jan KUBIK

SYMETRIE PROCESÓW TERMOMECHANICZNYCH W CIAŁACH WIELOSKŁADNIKOWYCH

Streszczenie. Analizuje się symetrie równań procesów termomechanicznych, z których otrzymano twierdzenia o wzajemności. Twierdzenia te obejmują zarówno liniowe, jak i nieliniowe przypadki oddziaływania pola mechanicznego z przepływami ciepła i masy.

SYMMETRIES OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN MULTI-COMPONENT BODIES

Summary. Equations' symmetries of thermomechanical processes are analysed from which the reciprocal theorems are obtained. The theorems considers both linear and non-linear cases of relation between mechanical field and the heat-mass flow.

1. Wprowadzenie

Analizować będziemy dosyć ogólny przypadek oddziaływań pola mechanicznego z przepływami ciepła i masy w ośrodku ciągłym. Problematyka z tego zakresu jest przedmiotem zainteresowania termomechaniki, będącej udanym powiązaniem mechaniki i termodynamiki ośrodka ciągłego.

Typowy problem termomechaniki opisywany jest w zasadzie przez trzy grupy równań, a mianowicie:

- równania bilansów,
- równania tworzące,
- warunki początkowo-brzegowe (lokalizacja zagadnień).

Pierwsza z wymienionych grup równań określa ogólne sposoby oddziaływań pól. Równania te są niezależne od fizycznych właściwości ciała, które są z kolei badane w ramach teorii równań konstytutywnych.

W niniejszym ujęciu problemu analizować będziemy jedynie symetrie tkwiące w równaniach bilansów uzyskując pewną ogólną postać twierdzenia o wzajemności. Postać tego twierdzenia jest niezależna od równań tworzących. Słuszne jest więc ono zarówno w liniowych i nieliniowych równaniach fizycznych, a w tym np. dla nieliniowych równań łączących strumienie masy i ciepła z polami temperatur i potencjału chemicznego. Podobnie uzyskana zależność jest słuszna także dla nieliniowej lepkosprężystości itp. Otrzymujemy więc wynik o znacznej ogólności, który wykorzystamy dalej do sformułowania ograniczeń, jakie istnieją między pewnym rzeczywistym procesem termomechanicznym a jego modelem.

Wywód podstawowych zależności, a w tym twierdzenia o wzajemności, przedstawimy w sposób zupełnie elementarny, kładąc nacisk na fizyczną stronę problematyki. Możliwe są więc uogólnienia związane zarówno ze sposobem opisu ruchu w ośrodku, jak i z szerszym fizykalnym ujęciem problemu, uwzględniającym np. oddziaływania pola elektromagnetycznego, filtracji itp.

2. Równania bilansów

Analizować będziemy układ równań bilansów procesu termomechanicznego przebiegającego w ciele wieloskładnikowym. Zawiera on parcjalne bilanse masy, pędu, krętu, energii i entropii. Występujące w nim pola są funkcjami współrzędnych przestrzennych i czasu.

Wzmiankowany układ bilansów w zapisie przestrzennym przyjmie postać:

- parcjalne bilanse migrującej masy składnika $\alpha(\alpha = 0,1,\ldots n)$

$$\rho\frac{dc^{\alpha}}{dt} = \rho R^{\alpha} - div\,\mathbf{j}^{\alpha} \tag{1}$$

lub

$$\rho\left(dc^{\alpha} + c^{\alpha}\left(0_{+}\right) + \mathbf{v}grad\,c^{\alpha}\right) = \rho R^{\alpha} - div\,\mathbf{j}^{\alpha}, \quad \mathbf{v}^{\alpha} = \mathbf{v} + \mathbf{u}^{\alpha}, \quad \rho\mathbf{v} = \sum_{\alpha}\rho^{\alpha}\mathbf{v}^{\alpha}, \quad \mathbf{j}^{\alpha} = \rho^{\alpha}\mathbf{u}^{\alpha}$$

- pędu

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{F}_{o} + div\,\sigma \tag{2}$$

lub

$$\rho\left(d\mathbf{v} + \mathbf{v}\left(0_{+}\right) + \mathbf{v}grad\,\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{F} + div\,\sigma$$

- krętu

$$\sigma = \sigma^T \qquad \left(\sigma = \sum_\alpha \sigma^\alpha\right) \tag{3}$$

- energii wewnętrznej

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho\left(r + \frac{1}{\rho}\sigma : \mathbf{d}\right) - div\left(\mathbf{q} - \sum_\alpha M^\alpha \mathbf{j}^\alpha\right) \tag{4}$$

lub

$$\rho\left(dU + U(0_+) + \mathbf{v} gradU\right) = \rho r + \sigma : \mathbf{d} - div\left(\mathbf{q} - \sum_\alpha M^\alpha \mathbf{j}^\alpha\right)$$

- entropii

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{\rho r}{T} - div\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) + \rho\Re \qquad \rho\Re \geq 0 \tag{5}$$

lub

$$\rho\left(dS + S(0,) + \mathbf{v} gradS\right) = \frac{\rho r}{T} - div\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) + \rho\Re$$

W równaniach bilansów symbolami ρ^α, $c^\alpha = \rho^\alpha / \rho$, ρR^α, $\mathbf{j}^\alpha$, $\rho\mathbf{v} = \sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha$, $\rho\mathbf{F}_0$, σ, $\mathbf{d}$, ρU, ρS, ρr, $\mathbf{q}$, M^α, $\rho R \geq 0$ oznaczono kolejno gęstość, stężenie, źródło i strumień masy składnika (α), prędkość, siłę masową, tensory naprężeń i prędkości deformacji, energię wewnętrzną, entropię, źródło i strumień ciepła, potencjał chemiczny oraz wewnętrzne źródło entropii.

Zwróćmy uwagę, że wszystkie z wyszczególnionych bilansów mają podobną budowę i określają zmiany w czasie pewnego pola w wyniku działania źródła tegoż składnika i strumienia.

Możemy więc bilanse te zapisać w postaci jednego równania macierzowego

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \rho\mathbf{F} - div\mathbf{A} \tag{6}$$

gdzie wektory $\mathbf{U}$, $\rho\mathbf{F}$ i $\mathbf{A}$ przyjmą formę

$$\mathbf{U}^T = \left[c^\alpha, v_1, v_2, v_3, U, S\right]$$

$$\rho\mathbf{F}^T = \left[\rho R^\alpha,\ \rho F_{10},\ \rho F_{20},\ \rho F_{30},\ \rho r + \sigma : \mathbf{d},\ \frac{\rho r}{T} + \rho\Re\right]$$

$$\mathbf{A}^T = \left[\mathbf{j}^\alpha - \sigma,\ \ \mathbf{q} - \sum_\alpha {}^\alpha \mathbf{j}^\alpha,\ \ \frac{\mathbf{q}}{T}\right]$$

lub też w postaci równoważnej

$$\rho\left(d\mathbf{U} + \mathbf{U}(0_+) + \mathbf{v}grad\ \mathbf{U}\right) = \rho\mathbf{F} - div\mathbf{A} \tag{7}$$

gdzie $d\mathbf{U}^T = \left[dc^\alpha,\ d\mathbf{v},\ dU,\ \mathrm{d}S\right]$

$$\left[\mathbf{v}grad\ \mathbf{U}\right]^T = \left[\mathbf{v}gradc^\alpha,\ \mathbf{v}grad\mathbf{v},\ \mathbf{v}gradU,\ \mathbf{v}gradS\right]$$

Równanie (7) będące formalnym zapisem bilansów termomechaniki posłuży dalej do wyprowadzenia twierdzenia o wzajemności.

3. Twierdzenie o wzajemności

Symetria równania (7) pozwala wydedukować twierdzenie o wzajemności, które jest uogólnieniem odpowiednich relacji znanych z klasycznej mechaniki ciał odkształcalnych, przepływów ciepła oraz masy.

Rozpatrzymy w tym celu dwa układy przyczyn i skutków opisanych wektorami

$$\left[\rho\mathbf{U}^1,\ \rho\mathbf{F}^1,\ \mathbf{A}^1\right] \quad \text{oraz} \quad \left[\rho\mathbf{U}^2,\ \rho\mathbf{F}^2,\ \mathbf{A}^2\right]$$

Wzmiankowane stany ciała opisane są przez bilanse

$$\rho\frac{d\mathbf{U}^1}{dt} = \rho\mathbf{F}^1 - div\mathbf{A}^1 \qquad \rho\frac{d\mathbf{U}^2}{dt} = \rho\mathbf{F}^2 - div\mathbf{A}^2 \tag{8}$$

lub

$$\rho\left(d\mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^1(0_+) + \mathbf{v}^1 grad\mathbf{U}^1\right) = \rho\mathbf{F}^1 - div\mathbf{A}^1,$$

$$\rho\left(d\mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^2(0_+) + \mathbf{v}^2 grad\mathbf{U}^2\right) = \rho\mathbf{F}^2 - div\mathbf{A}^2,$$

Z symetrii równań bilansów wynika, że

$$\rho\mathbf{F}^1 * \mathbf{U}^2 - div\mathbf{A}^1 * \mathbf{U}^2 + Q^1 * \mathbf{U}^2 = \rho\mathbf{F}^2 * \mathbf{U}^1 - div\mathbf{A}^2 * \mathbf{U}^1 + Q^2 * \mathbf{U}^1 \tag{9}$$

$$F^1 * F^2 = \int_o^t F^1(t-\tau)F^2(\tau)d\tau$$

Całkując (9) po całym obszarze V ciała B, a następnie stosując twierdzenie Gaussa, otrzymamy zależność

$$\int_A (\mathbf{A}^1 * \mathbf{U}^2)\mathbf{n}\ \mathrm{d}A + \int_V \rho\mathbf{F}^1 * \mathbf{U}^2 dV - \int_V \mathbf{A}^1 * grad\mathbf{U}^2 dV + \int_V Q^1 * \mathbf{U}^2 dV =$$

$$\int_A (\mathbf{A}^2 * \mathbf{U}^1)\mathbf{n}\ dA + \int_V \rho\mathbf{F}^2 * \mathbf{U}^1 dV - \int_V \mathbf{A}^2 * grad\mathbf{U}^1 dV + \int_V Q^2 * \mathbf{U}^1 dV \tag{10}$$

która stanowi już pierwszą postać twierdzenia o wzajemności. W równaniu (10) pojawiła się całka po brzegu A ciała B na której są określone wartości wektora **A**, a więc strumienie masy, ciepła i siła powierzchniowa oraz wektory związane z warunkami początkowymi

$$\mathbf{Q}^1 = \rho\left(\mathbf{U}^1(0_+) + \mathbf{V}^1 grad\mathbf{U}^1\right) \text{ i } \mathbf{Q}^2 = \rho\left(\mathbf{U}^2(0_+) + \mathbf{V}^2 grad\mathbf{U}^2\right). \tag{11}$$

Z przytoczonej zależności w przypadku liniowych równań fizycznych (których tu nie analizujemy) znikają całki zawierające gradient wektora **U**.

Ogólniejszą postać twierdzenia o wzajemności uzyskamy po wprowadzeniu operatora samosprzężonego A. Przyjmiemy w tym celu, że wektory $\mathbf{U}^1$, $\mathbf{U}^2$ są elementami pewnej przestrzeni Hilberta oraz że słuszna jest relacja

$$< \mathbf{U}^1, A\mathbf{U}^2 > \; = \; < \mathbf{U}^2, A\mathbf{U}^1 > \qquad \mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2 \in H$$

która stanowi istotę relacji o wzajemności.

W wyniku podobnego postępowania otrzymamy następujące twierdzenie o wzajemności

$$\int_A < A^1, A\mathbf{U}^2 > \mathbf{n}\, dA + \int_V < \rho\mathbf{F}^1, A\mathbf{U}^2 > dV - \int_V < A^1, grad' A\mathbf{U}^2 > dV + \int_V < \mathbf{Q}^1, A\mathbf{U}^2 > dV =$$

$$= \int_A < A^2, A\mathbf{U}^1 > \mathbf{n}\, dA + \int_V < \rho\mathbf{F}^2 A(\mathbf{U}^1) > dV - \int_V < A^2 grad' A\mathbf{U}^1 > dV + \int_V < \mathbf{Q}^2 A(\mathbf{U}^1) dV \tag{12}$$

Przypadkiem szczególnym operatorów sprzężonych są np. operatory splotu. Równość (12) przyjmie wówczas formę

$$\int_A \mathbf{A}^1 * d\mathbf{U}^2 \mathbf{n}\, dA + \int_V \rho\mathbf{F}^1 * d\mathbf{U}^2 dV - \int_V \left(\mathbf{A}^1 * grad\, d\mathbf{U}^2\right) dV + \int_V \mathbf{Q}^1 * d\mathbf{U}^2\, dV =$$

$$= \int_A \mathbf{A}^2 * d\mathbf{U}^1 \mathbf{n}\, dA + \int_V \rho\mathbf{F}^2 * d\mathbf{U}^1 dV - \int_V \left(\mathbf{A}^2 * grad\, d\mathbf{U}^1\right) dV + \int_V \mathbf{Q}^2 * d\mathbf{U}^1\, dV \tag{13}$$

Podane w tym punkcie twierdzenia o wzajemności wykorzystamy do sformułowania ograniczeń nakładanych na procesy termomechaniczne.

4. Grupy podobieństw

Inną równie ogólną cechą liniowych równań bilansów termomechaniki określają grupy podobieństw.

Okazuje się, że zmiana skali czasowej $t \to \alpha t$, gdzie $\alpha > 0$, prowadzi do następujących grup ciągłych przekształceń związanych z równaniem (7), w którym przyjęto, że

$$\rho\frac{d\mathbf{U}}{dt} \Rightarrow \rho\mathbf{U}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \in G_1 \Rightarrow \left[\mathbf{U}(t) \to \alpha_1^{-1}\mathbf{U}(\alpha_1 t),\ \mathbf{F}(t) \to \mathbf{F}(t),\ \mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(t)\right] \\
&\alpha_2 \in G_2 \Rightarrow \left[\mathbf{U}(t) \to \alpha_2^{-1}\mathbf{U}(\alpha_2 t),\ \mathbf{F}(t) \to \mathbf{F}(\alpha_2 t),\ \mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(\alpha_2 t)\right] \\
&\alpha_3 \in G_3 \Rightarrow \left[\mathbf{U}(t) \to \mathbf{U}(\alpha_3 t),\ \mathbf{F}(t) \to \alpha_3\mathbf{F}(\alpha_3 t),\ \mathbf{A}(t) \to \alpha_3\mathbf{A}(\alpha_3 t)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Warto przy tym zwrócić uwagę, że stacjonarny proces termomechaniczny określa wymaganie

$$\alpha \to \infty \text{ i } \frac{1}{\alpha}\rho\mathbf{U}(\alpha t) \to \mathbf{0}$$

Podane grupy przekształceń dotyczą jedynie zlinearyzowanych równań bilansów, kiedy pomijamy konwekcyjne składowe prędkości.

5. Relacje między procesami termomechanicznymi

Przedstawione poprzednio wyniki, a szczególnie twierdzenia o wzajemności, sugerują, że istnieją dodatkowe ograniczenia nakładane na każdą parę dowolnych procesów termomechanicznych. Ograniczenia te wynikają z symetrii równań bilansów i są niezależne od równań tworzących. Fakt ten wykorzystamy do podania pewnej ogólnej zależności zachodzącej między rzeczywistym procesem termomechanicznym a jego opisem uzyskanym w ramach przybliżonych teorii.

Przyjmiemy w tym celu, że układ wektorów $\left[\rho\mathbf{U}^1,\ \rho\mathbf{F}^1,\ \mathbf{A}^1\right]$ określa pewien rzeczywisty proces termomechaniczny, a układ $\left[\rho\mathbf{U}^2,\ \rho\mathbf{F}^2,\ \mathbf{A}^2\right]$ jego aproksymację w ramach określonego modelu. Dla obu układów słuszne są więc ograniczenia narzucone przez przytoczone poprzednio twierdzenia o wzajemności. W szczególności możemy przeanalizować przypadek, kiedy składowe wektora $\rho\mathbf{F}^2$ przyjmą postać

$$\left(\rho F^2\right)^T = \left[0,0\ldots\rho F_i^0\delta(x-x_0),\ldots\right]$$

gdzie $\delta(x-x_0)$ oznacza dystorsję δ - Diraca o osobliwości w miejscu x_0.

Twierdzenie o wzajemności pozwala wówczas na przeniesienie wyników z modelu na rzeczywisty proces termomechaniczny.

LITERATURA

1. Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.
2. Trusdell C., Noll W.: The non-linear theories of mechanics Handbuch der Physik, Springer Verlag", Berlin-Heidelberg-New York 1965, Bd. III/3.
3. Wigner E.: Symmetries and Reflections. Indiana University Press, Bloomington-London 1970.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał
Prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

Thermomechanical processes in multicomponents bodies are described with balances equations (mass (1), momentum (2), moment of momentum (3) energy and entropy) and constitutive relations and initial-boundary conditions. Among these equations balances are independent from concrete material properties so their analysis has a general character.

There are analysed symmetries of considered balances of mass momentum, energy and entropy obtaining general reciprocal relations (10), (12) or (13) which are generality right in the thermomechanical processes which proceed in the multicomponents bodies.