ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997
Seria: BUDOWNICTWO z.84 Nr kol. 1376

Jan KUBIK

TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI DLA NIELINIOWYCH ZADAŃ MECHANIKI

Streszczenie. W opracowaniu formułuje się ogólną postać relacji wzajemności słuszną w nieliniowych problemach brzegowych mechaniki ciała stałego. Rezultat ten jest wynikiem symetrii równań ruchu ośrodka.

RECIPROCAL THEOREM FOR NON-LINEAR MECHANICS

Summary. There was formulated a general form of the reciprocal relation which is applicable in non-linear boundary value problems of the continuous body. It is result of the motion equations' symmetry.

Wstęp

Symetrie występujące w równaniach ruchu ośrodka ciągłego posłużą do sformułowania pewnych ogólnych relacji o wzajemności, które mogą być wykorzystane zarówno do konstrukcji metod rozwiązań zadań brzegowych, jak i do formułowania twierdzeń wariacyjnych. Punktem wyjścia będą równania ruchu w opisie Lagrange'a, z których po przekształceniach otrzymamy poszukiwane twierdzenie o wzajemności. W całym opracowaniu stosujemy tradycyjny zapis wskaźnikowy ograniczony zresztą do tensorów kartezjańskich.

1. Równania zagadnienia

Problem brzegowy opisany jest przez następujący układ równań:

- kinematyki

$$x_i = x_i(X_k, t) \tag{1}$$

$$x_i = X_i + u_i, \quad u_i = u_i(X_k, t) \tag{2}$$

$$v_i = \dot{u}_i, \quad v_i = \ddot{u}_i \tag{3}$$

- geometrycznych

$$F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}, \quad (\mathbf{F} = \nabla_X \mathbf{x}) \tag{4}$$

$$E_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} + \frac{\partial u_m}{\partial X_k}\frac{\partial u_m}{\partial X_l}\right) \tag{5}$$

- ruchu

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left(S_{jk}\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\right) + \rho F_i = \rho_o v_i \tag{6}$$

- tworzących, których postaci na tym etapie rozważań nie precyzujemy
- warunków brzegowych

$$S_{jk}\frac{\partial x_i}{\partial X_k} n_j\Big|_{X \in A_1} = P_i \qquad u_i\Big|_{X \in A_2} = \dot{u}_{io} \tag{7}$$

- warunków początkowych

$$u_i(X_k, \tau = t_o) = U_{io}, \quad \dot{u}_i(X_k, \tau = t_o) = v_{io} \tag{8}$$

W równaniach tych przez X_i, x_i i U_i oznaczono położenie cząstki $X \in B$ w konfiguracji odniesienia i aktualnej oraz przemieszczenie tejże cząstki $(u_i = x_i - X_i)$. Natomiast symbole $S_{ij}, F_{ij}, E_{kl}, V_i, P_i, v_i, \rho_0$ są kolejno tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa, gradientem deformacji (materialnym), tensorem skończonych deformacji Greena, wektorem siły masowej i powierzchniowej, wektorem prędkości i przyśpieszenia oraz gęstością ośrodka w konfiguracji odniesienia. Wymienione wielkości są funkcjami zmiennych: X_k t, czyli położenia cząstki w konfiguracji odniesienia i czasu.

W równaniach określających problem nie precyzowano równań fizycznych, gdyż przeprowadzone rozważania nie wymagają ich skonkretyzowania. W efekcie otrzymamy wynik słuszny zarówno dla ośrodków sprężystych, lepkosprężystych, jak i innych.

2. Kinematyczne relacje wzajemności

Łatwo wykazać słuszność następujących równości

$$\int_{t_o}^{t} \rho_o v_i^1 \dot{v}_i^2 \, dt = \int_{t_o}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \left(S_{jk}^1 \frac{\partial x_i^1}{\partial X_k} \right) + \rho_o F_i^1 \right] v_i^2 dt + \rho_0 v_i^1 v_i^2 \Big|_{t_o}^{t}$$

$$\int_{t_o}^{t} \rho_o v_i^1 v_i^2 dt = \int_{t_o}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \left(S_{jk}^2 \frac{\partial x_i^2}{\partial X_k} \right) + \rho_o F_i^2 \right] v^1 dt + \rho_0 v_i^1 v_i^2 \Big|_{t_o}^{t} \tag{9}$$

wynikających z równań ruchu (6) wypisanych odpowiednio dla dwóch układów pól określających dwa zadania brzegowe. Dla zadań tych skonstruujemy relacje o wzajemności.

Z równości (9) otrzymamy następującą zależność

$$\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \left(S_{jk}^1 \frac{\partial x_i^1}{\partial X_k} \right) + \rho_0 F_i^1 \right] v_i^2 dt - \int_{t_0}^{t} \rho_0 v_i^1 v_i^2 \, dt =$$

$$= \int_{t_o}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \left(S_{jk}^2 \frac{\partial x_i^2}{\partial X_k} \right) + \rho_0 F_i^2 \right] v_i^1 \, dt - \int_{t_0}^{t} \rho_0 v_i^2 v_{i1} \, dt \tag{10}$$

która posiada już formę twierdzenia o wzajemności.

W wyniku całkowania po całym obszarze ciała V oraz po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa otrzymujemy relację

$$\int_{A_1} \int_{t_0}^{t} \left[S_{jk}^1 \frac{\partial x_i^1}{\partial X_k} v_i^2 \right] n_j \, dt \, dA - \int_V \int_{t_0}^{t} S_{jk}^1 \left(\frac{\partial v_k^2}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^1}{\partial X_k} \frac{\partial v_i^2}{\partial X_j} \right) dt \, dV +$$

$$+ \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 F_i^1 v_i^2 \, dt \, dV - \int_V \int_{t_0}^{t} \rho v_i^1 v_i^2 \, dt \, dV = \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 F_i^2 v_i^1 \, dt \, dV - \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 v_i^2 v_i^1 \, dt \, dV$$

$$+ \int_{A_1} \int_{t_0}^{t} \left[S_{jk}^2 \frac{\partial x_i^2}{\partial X_u} V_i^1 \right] n_j \, dt \, dA - \int_V \int_{t_0}^{t} S_{jk}^2 \left(\frac{\partial v_k^1}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^2}{\partial X_k} \frac{\partial v_i^1}{\partial X_j} \right) dt \, dV \tag{11}$$

Ostateczna forma twierdzenia o wzajemności jest następująca

$$\int_{A_1} \int_{t_0}^{t} P_i^1 v_i^2 \, dt \, dA + \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 F_i^1 v_i^2 \, dt \, dV - \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 v_i^1 v_i^2 \, dt \, dV - \int_V \int_{t_0}^{t} S_{jk}^1 \left(\frac{\partial v_k^2}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^1}{\partial X_k} \frac{\partial v_i^2}{\partial X_j} \right) dt dV$$

$$= \int_{A_1} \int_{t_0}^{t} P_i^2 v_i^1 \, dt \, dA + \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 F_i^2 v_i^1 \, dt \, dV - \int_V \int_{t_0}^{t} \rho_0 v_i^2 v_i^1 \, dt \, dV -$$

$$- \int_V \int_{t_0}^{t} S_{jk}^2 \left(\frac{\partial v_k^1}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^2}{\partial X_k} \frac{\partial v_i^1}{\partial X_j} \right) dt \, dV \tag{12}$$

Zależność ta jest słuszna zarówno dla nieliniowych geometrycznie, jak i fizycznie zadań mechaniki. W trakcie praktycznego wykorzystania tego twierdzenia należy skonkretyzować równania fizyczne i wprowadzić je do równości (12) w miejsce tensora naprężenia.

Natomiast przypadkami szczególnymi relacji (12), po linearyzacji są klasyczne twierdzenia o wzajemności. Na tej drodze otrzymamy twierdzenie o wzajemności zarówno dla liniowych, jak i nieliniowych zadań sprężystych i lepko sprężystych, a także teorii naprężeń cieplnych i dyfuzyjnych.

Twierdzenie o wzajemności postaci (12) może służyć do wyprowadzania równań mechaniki oraz poszukiwania ich rozwiązań, np. z wykorzystaniem iteracyjnych procedur opartych na funkcji Greena. Natomiast w przypadku układów prętowych z relacji (12) można otrzymać równania statyki nieliniowych geometrycznie układów prętowych.

LITERATURA

1. Bland D.R.: Nonlinear Dynamic Elasticity. Blaidell, Publishing Company, Waltham, Toronto-Londyn 1969.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał
Prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

Symmetries in the motion of the material continuum are analysed. This symmetries belongs from the concrete shape of constitutive and geometrical equations. On their baisis the identity (12) can be formulated which is true for each pair of the stress S_{ij}, surface forces $P_i = S_{ij}n_j$ and mess forces $\rho_0 F_i$ and strains E_{ij} (Green tensor).