

Ryszard WALENTYŃSKI

WARIACYJNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO TARCZY

Streszczenie. W pracy przedstawiono przykład zastosowania uogólnionej metody najmniejszych kwadratów do przybliżonego rozwiązania zagadnienia brzegowego tarczy prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych. Przedstawiono niektóre metody oceny dokładności aproksymacji.

VARIATIONAL SOLUTION OF THE SHIELD'S BOUNDARY VALUE PROBLEM

Summary. There is presented an example of the refined least squares method application for the approximate solution of the boundary value problem of the rectangular shield with non-continuous boundary conditions. Some methods of the evaluation of the approximation error are presented.

1. Wprowadzenie

Metoda najmniejszych kwadratów jest znaną w matematyce wariacyjną metodą przybliżonego rozwiązania zagadnień brzegowych. Opisana jest między innymi w książce Michlina i Smolickiego [1]. Stosowana jest ponadto do aproksymacji funkcji lub wyznaczania krzywych regresji dla zależności otrzymanych z badań eksperymentalnych, Burden i Faires [2].

W podejściu tradycyjnym dominuje wersja zakładająca konieczność spełnienia wszystkich warunków brzegowych przez funkcje aproksymujące. Ogranicza to stosowanie metody do zadań o prostych warunkach brzegowych. Nie jest bowiem łatwo znaleźć zbiór niezależnych funkcji spełniających nieciągłe warunki brzegowe dla zagadnień wielowymiarowych.

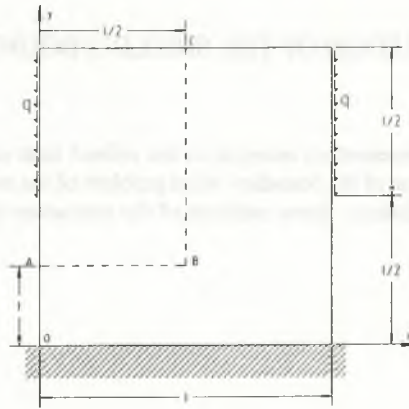
W podejściu uogólnionym traktujemy wszystkie warunki brzegowe jako dynamiczne [1]. Zakładamy, że funkcje aproksymujące nie muszą spełniać warunków brzegowych. Warunki te

uwzględniamy w minimalizowanym funkcjale. Podejście takie powoduje jednocześnie znaczne uproszczenie metody oraz jej uogólnienie na zadania o nieciągłych warunkach brzegowych.

Podstawy metody zostały zaprezentowane w pracach [3, 4]. W pracy tej przedstawimy przykład rozwiązania zadania brzegowego tarczy o nieciągłych warunkach brzegowych. Zadania statyki są szczególnie wdzięcznymi przykładami, gdyż pozwalają na dodatkową ocenę dokładności rozwiązania na podstawie sprawdzenia globalnej równowagi układu.

2. Tarcza o nieciągłych warunkach brzegowych

Rozpatrzmy tarczę o nieciągłych warunkach brzegowych przedstawioną na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat statyczny tarczy
Fig.1. Statical scheme of the shield

Do obliczeń przyjęto:

- moduł Younga $E = 32,4 \cdot 10^6 \text{ kPa}$
- współczynnik Poissona $\nu = \frac{1}{6}$
- obciążenie styczne $q = 10 \text{ kN/m}$
- wymiar tarczy kwadratowej $l = 10 \text{ m}$.

Zagadnienie tarczy w wersji przemieszczeniowej sprowadza się do rozwiązania dwóch znanych równań różniczkowych, których lewe strony R_1 i R_2 wyrażają się następująco:

$$R_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_x + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w_y + \frac{p_x}{B}, \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w_x + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_y + \frac{p_y}{B}, \quad (2)$$

gdzie:

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}.$$

Siły wewnętrzne w tarczy wyrażają się jako funkcje składowych stanu naprężenia:

$$n_x = B \left(\frac{\partial}{\partial x} w_x + \nu \frac{\partial}{\partial y} w_y \right), \quad (3)$$

$$n_y = B \left(\frac{\partial}{\partial y} w_y + \nu \frac{\partial}{\partial x} w_x \right), \quad (4)$$

$$n_{xy} = B \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} w_y + \frac{\partial}{\partial y} w_x \right). \quad (5)$$

Dla naszego zadania powinny być spełnione warunki brzegowe, których lewe strony oznaczmy:

$$R_3 = \frac{n_x(l/2, y)}{B}, \quad (6)$$

$$R_4 = \frac{n_{xy}(l/2, y) - q H(y - l/2)}{B}, \quad (7)$$

$$R_5 = \frac{n_y(x, l)}{B}, \quad (8)$$

$$R_6 = \frac{n_{xy}(x, l)}{B}, \quad (9)$$

$$R_7 = w_x(x, 0), \quad (10)$$

$$R_8 = w_y(x, 0), \quad (11)$$

gdzie H jest funkcją Heaviside'a.

Funkcje aproksymujące dobieramy tak, aby spełniały warunki symetrii zadania.

Rozwiązanie dokładne zadania równoważne jest temu, że $R_i = 0$, dla każdego przybliżenia przynajmniej niektóre z tych równań nie są spełnione.

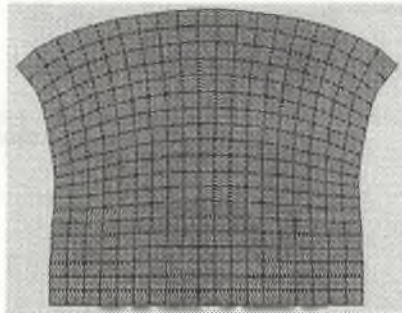
Zbudujmy zatem dla funkcji R_i następujący funkcjonal:

$$\begin{aligned} F = & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[(R_1)^2 + (R_2)^2 \right] + \\ & + \int_0^1 dy \left[(R_3)^2 + (R_4)^2 \right] + \\ & + \int_0^1 dx \left[(R_5)^2 + (R_6)^2 + (R_7)^2 + (R_8)^2 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Funkcjonał ten przyjmuje wartości nieujemne. Dobranie optymalnej kombinacji funkcji aproksymujących równoznaczne jest z jego minimalizacją. Stosujemy tu metodę Ritza.

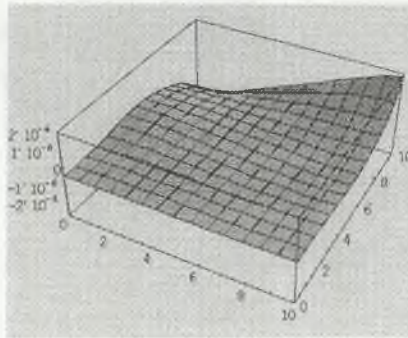
Jako funkcje aproksymujące przyjęto zbiór iloczynów monicznych wielomianów Czebyszewa względem zmiennych x oraz y . W prezentowanym przykładzie przedstawiono aproksymację kombinacją 196 funkcji dla każdej składowej wektora przemieszczenia. Zadanie sprowadza się zatem do rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych o 392 niewiadomych.

Na rysunku 2 przedstawiono obraz deformacji tarczy powiększony 5 000 000 razy.

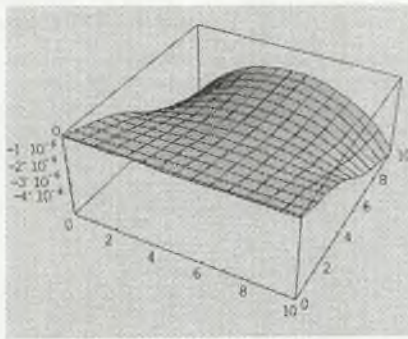


Rys. 2. Obraz deformacji tarczy
Fig. 2. The shield deformation picture

Rysunki 3 i 4 przedstawiają wykres składowych wektora przemieszczenia.

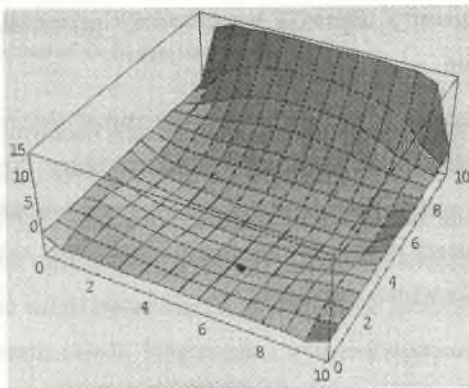


Rys. 3. Wykres składowej w_x wektora deformacji
Fig.3. Diagram of the W_x component of the deformation

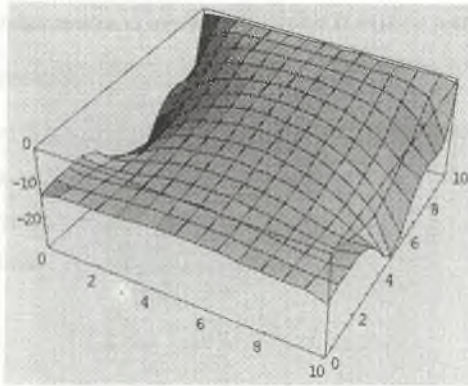


Rys.4. Wykres składowej w_y wektora deformacji
Fig.4. Diagram of the W_y component of the deformation

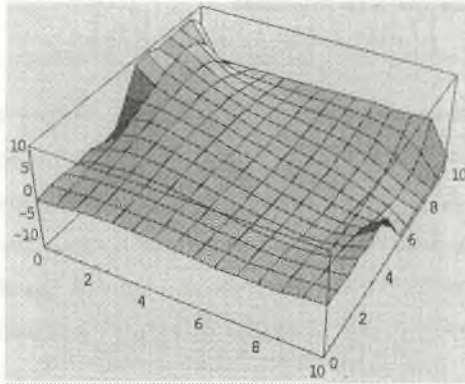
Na rysunkach 5, 6 i 7 przedstawiono kolejno wykresy składowych tensora sił wewnętrznych.



Rys. 5. Wykres sił normalnych n_x
Fig. 5. Diagram of the normal forces n_x



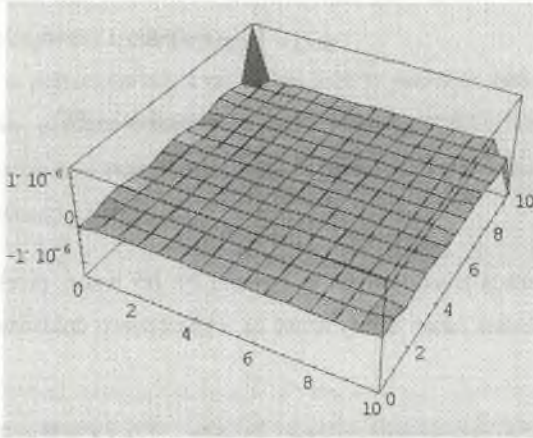
Rys.6. Wykres sił normalnych n_x
 Fig.6. Diagram of the normal forces n_x



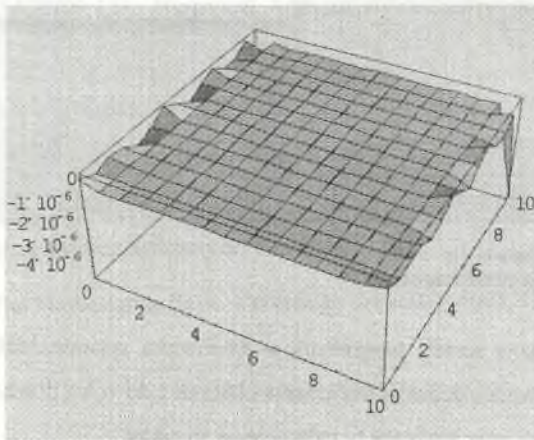
Rys.7. Wykres sił stycznych n_{xy}
 Fig.7. Diagram of the shier forces n_{xy}

Jak łatwo się zorientować z wykresów przedstawionych powyżej, warunki brzegowe są spełnione dosyć dokładnie.

Wykresy 8 i 9 przedstawiają dokładność przybliżenia równań równowagi. Warto zauważyć, że przybliżenie jest najdokładniejsze w partiach środkowych tarczy. Przy brzegu, gdzie funkcje aproksymujące „usiłują” spełnić warunki brzegowe, występują większe odchylenia. Należy tu dodać, że błędy aproksymacji równań bywają zwykle większe, gdy zakładamy funkcje aproksymujące spełniające ściśle warunki brzegowe.



Rys. 8. Wykres residuum równania R_1
 Fig. 8. Diagram of the residuum of the R_1 equation



Rys. 9. Wykres residuum równania R_2
 Fig. 9. Diagram of the residuum of the R_2 equation

„Globalną” miarą zbieżności rozwiązania jest malenie funkcjonału (12). Minimum funkcjonału jest znane i wynosi zero. Zgodnie z własnościami metody Ritza jego wartość maleje (dokładniej: nie rośnie) [1] wraz z rozszerzaniem zbioru funkcji aproksymujących. Zbieżność funkcjonału do zera jest wskazówką zbieżności aproksymacji do rozwiązania dokładnego.

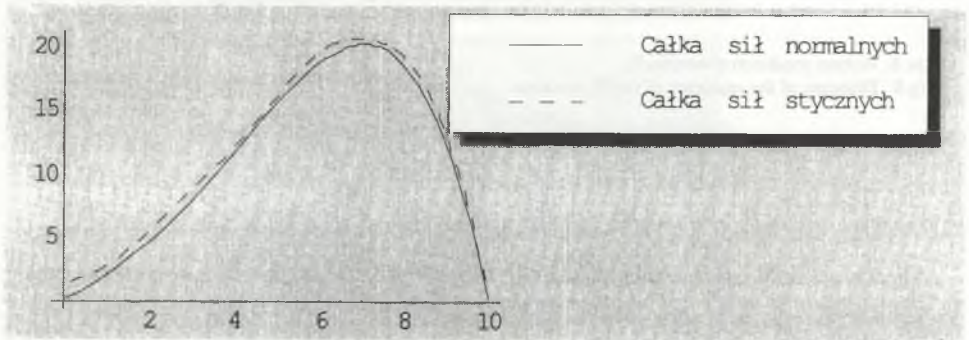
W przypadku zadań statyki mamy możliwość dodatkowo sprawdzenia warunku równowagi globalnej całości lub części układu. Przykładowo, wytnijmy myślowo fragment tarczy przekrojem wzdłuż linii łamanej ABC (rys. 1). Dla tego fragmentu tarczy powinna zachodzić równowaga sił stycznych scałkowanych wzdłuż boku odcinka AB , co wyraża się wzorem:

$$g(t) = \int_0^{l/2} n_{xy}(t, y) dx, \quad (13)$$

z siłami normalnymi do przekroju scałkowanymi wzdłuż odcinka BC :

$$f(t) = \int_l^l n_x(l/2, y) dy. \quad (14)$$

Wykresy obu tych funkcji przedstawiono na rysunku 10. Jak widać, przebieg obu funkcji jest bardzo bliski. Przybliżenie zatem należy uznać za wystarczająco dokładne z punktu widzenia technicznego.



Rys. 10. Równowaga wycinka tarczy
Fig.10. Equilibrium of the shield fragment

Obliczenia wykonane zostały programem w środowisku systemu *Mathematica*, Wolfram [5]. System ten zapewnia możliwość wykonania obliczeń z dowolną dokładnością, analityczne opracowanie wyników oraz graficzne przedstawienie wyników.

3. Wnioski

Przedstawiony przykład ilustruje praktyczną i bezpośrednią możliwość wykorzystania analitycznych metod wariacyjnych do rozwiązywania zagadnień brzegowych.

Wobec rozwoju systemów algebry komputerowej rodzi się możliwość powrotu do metod analitycznych.

Sformułowanie zadania w ramach metody jest niezwykle proste i naturalne. Nie występuje konieczność generowania ogromnych zbiorów danych.

Prezentowana metoda daje możliwość przybliżonego rozwiązania zadań z bezpośrednią możliwością oceny dokładności aproksymacji.

Rozwiązanie dane w postaci funkcji, a nie zbioru liczb w punktach dyskretnych, nie wymaga interpolacji wyników, obróbka wyników jest łatwa.

Wszystko to oszczędza czas pracy programisty-użytkownika dając jednocześnie możliwość dobrej oceny wiarygodności rozwiązania.

LITERATURA

1. MICHLIN S.G., SMOLICKI C.L.: Metody przybliżone rozwiązania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1972.
2. BURDEN R.L., FAIRES J.D.: Numerical Analysis. PWS Publishing Company, Boston 1993.
3. WALENTYŃSKI R.: Computer assisted analytical solution of initial-boundary value problems. XIII Polish Conference of Computer Methods in Mechanics, Poznań 1997.
4. WALENTYŃSKI R.: A least squares method for solving initial-boundary value problems. 2nd International *Mathematica* Symposium, Rovaniemi 1997.
5. WOLFRAM S.: The Mathematica Book. Cambridge University Press, Cambridge 1996.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stanisław Bielak

Abstract

There is presented an example of the approximate solution of the boundary value problem of the square shield with non-continuous boundary conditions. The variational method of least squares has been applied. Results of the solution are presented.

Ways of the solution error is discussed. The solution obtained as functions can be substituted into the shield equations or the functional. If the residuum becomes smaller enough the solution is better. Another way is analysis of an overall equilibrium of the static system.

The method is very simple and straightforward in application. Therefore it saves programmer's time and is very reliable.