ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1997
Seria : BUDOWNICTWO z.84 Nr kol.1376

Barbara WIECZOREK

ROZWIĄZANIA FUNDAMENTALNE ZAGADNIENIA QUASI-STATYCZNEGO TERMODYFUZJI SPRĘŻYSTEJ

Streszczenie. W opracowaniu analizowane jest zadanie początkowo-brzegowe dotyczące wyznaczenia stanu przemieszczenia w ośrodku sprężystym z uwzględnieniem przepływów masy i ciepła, opisanych równaniami dyfuzji i przewodnictwa cieplnego.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THE QUASI-STATIC PROBLEM OF ELASTIC THERMODIFFUSION

Summary. There is analysed an initial-boundary problem of the displacement evaluation in the elastic body with the flow of mass and heat consideration, described with diffusion and conductivity equations.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie statyczne sprzężonej termodyfuzji sprężystej (por.[2]) opisane jest układem pięciu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, określających charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola naprężeń. Postać tych równań jest następująca:

$$\begin{aligned} -\mu u_{i,jj} - (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \gamma_S S_{,i} + \gamma_C c_{,i} &= \rho F_i \\ \rho T_0 \dot{S} - k_1\left[\gamma_S u_{i,i} + mS + 1c\right]_{,jj} &= \rho r_1 \\ \rho\dot{c} - k_2\left[\gamma_C u_{i,i} + 1S + nc\right]_{,jj} &= r_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Przy wyznaczaniu rozwiązania układu (1) stosowana będzie transformata Fouriera, która dla dowolnej funkcji $f(x_i,t)$ określonej w przestrzeni $\Re^4$ zdefiniowana jest wzorem:

$$\mathrm{F}\,\left[f(x_i,t)\right]=\hat{f}(s_i,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\Re^4} f(x_i,t)e^{-i(x_i s_i+t\omega)}dx_i dt \tag{2}$$

gdzie $s=(s_1,s_2,s_3)$, a powtarzające się indeksy są sumą od 1 do 3.

Transformatę odwrotną określa wyrażenie

$$f(x_i,t)=\mathrm{F}^{-1}\left[f(s_i,\omega)\right]=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\Re^4} f(s_i,\omega)e^{i(x_i s_i+t\omega)}ds_i d\omega \tag{3}$$

Zdefiniowane przekształcenie ma następujące własności:

$$\mathrm{F}\,\left[\partial_k f(x_i,t)\right]=is_k\hat{f}(s_i,\omega) \qquad \mathrm{F}\,\left[\partial_t f(x_i,t)\right]=i\omega_k\hat{f}(s_i,\omega) \tag{4}$$

oraz

$$\mathrm{F}\,\left[f(x_i,t)*g(x_i,t)\right]=(2\pi)^2\hat{f}(s_i,\omega)\hat{g}(s_i,\omega) \tag{5}$$

przy czym

$$f(x_i,t)*g(x_i,t)=\int\limits_{\Re^4} f(x_i-x_i',t-t')g(x_i',t')dx_i'dt'$$

oznacza splot funkcji f i g.

Wykorzystane zostaną również następujące relacje

$$\mathrm{F}\left[\frac{\delta(t)}{|x|}\right]=\frac{1}{\pi s^2}\quad,\quad \mathrm{F}\,\left[\Gamma_{\mathrm{d}}(x_i,t)\right]=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{s^2+i\mathrm{d}\omega} \tag{6}$$

gdzie: $|x|=\sqrt{(x_i x_i)}$

$$\Gamma_{\mathrm{d}}(x_i,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{4\pi t}{\mathrm{d}}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{d}\,(x_i x_i)}{4t}} & ,\ dla\quad t>0\\ 0 & ,\ dla\quad t<0\end{cases}$$

Różniczkując pierwsze z równań układu (1) i wprowadzając dylatację przemieszczania

$$e=u_{i,i}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{7}$$

otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}-(\lambda+2\mu)e_{,ii}+\gamma_S S_{,ii}+\gamma_C c_{,ii}&=\rho F_{i,i}\\ -\gamma_S\dot{e}+\mathrm{k}\dot{S}-\mathrm{m}S_{,ii}-\mathrm{l}c_{,ii}&=\frac{\rho r_1}{k_1}\\ -\gamma_C e_{,ii}-\mathrm{l}S_{,ii}+\mathrm{h}\dot{c}-\mathrm{n}c_{,ii}&=\frac{r_2}{k_2}\end{aligned} \tag{8}$$

w którym przyjęto oznaczenia

$$\mathrm{k} = \frac{\rho T_0}{k_1} \; , \quad \mathrm{h} = \frac{\rho}{k_2}$$

2. ROZWIĄZANIE FUNDAMENTALNE

Rozważany układ (8) można zapisać w postaci macierzowej:

$$A(\partial_i,\partial_t)\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f} \tag{9}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = [\, e \, , S \, , c \,] \quad , \quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} = \left[\; \rho F_{i,i} \, , \; \frac{\rho\, r_1}{k_1} \, , \; \frac{r_2}{k_2} \;\right]$$

przy czym macierz układu jest określona następująco:

$$A(\partial_i,\partial_t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

gdzie:

$$A_{11} = (\lambda + 2\mu)\, \partial_{ii} \qquad A_{12} = \gamma_S\, \partial_{ii} \qquad A_{13} = \gamma_C \partial_{ii}$$

$$A_{21} = -\gamma_S\, \partial_{ii} \qquad A_{22} = \mathrm{k}\partial_t - \mathrm{m}\partial_{ii} \qquad A_{23} = -\mathrm{l}\,\partial_{ii}$$

$$A_{31} = -\gamma_T\, \partial_{ii} \qquad A_{32} = -\mathrm{l}\,\partial_{ii} \qquad A_{33} = \mathrm{h}\partial_t - \mathrm{n}\partial_{ii}$$

Dla zagadnienia opisanego układem równań różniczkowych (9) wyznacza się rozwiązanie podstawowe operatora termodyfuzji poszukując dystrybucji $\boldsymbol{E}$ spełniającej równanie

$$A(\partial_i,\partial_t)\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\delta} \tag{11}$$

gdzie $\boldsymbol{\delta} = \delta(x)\, \delta(t)$. Rozwiązanie układu (11) sprowadza się do wyznaczenia macierzy niezależnych dystrybucji temperowanych.

Po wykonaniu transformacji Fouriera na równaniu (11) zgodnie ze wzorem (2) otrzymuje się układ równań:

$$\hat{A}(s_i,\omega)\; \hat{\boldsymbol{E}}(s_i,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \boldsymbol{I} \tag{12}$$

który jest układem równań algebraicznych, a macierz $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową. Macierz układu (12) jest określona następująco:

$$\hat{A}(s_i,\omega) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} \end{bmatrix} \tag{13}$$

gdzie:

$$\hat{A}_{11} = (\lambda + 2\mu)s^2 \qquad \hat{A}_{12} = -\gamma_S s^2 \qquad \hat{A}_{13} = -\gamma_C s^2$$

$$\hat{A}_{21} = \gamma_S s^2 \qquad \hat{A}_{22} = \mathrm{k}i\omega + \mathrm{m}s^2 \qquad \hat{A}_{23} = \mathrm{l}s^2$$

$$\hat{A}_{31} = \gamma_C s^2 \qquad \hat{A}_{32} = \mathrm{l}s^2 \qquad \hat{A}_{33} = \mathrm{h}i\omega + \mathrm{n}s^2$$

przy czym $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$.

Wyznacznik macierzy $\hat{A}(s_i, \omega)$ przyjmuje wartość:

$$\det(\hat{A}) = s^2 \left(\vartheta_1 s^4 + \vartheta_2 i\omega\, s^2 - \vartheta_3 \omega^2\right), \tag{14}$$

gdzie:

$$\vartheta_1 = \mathrm{n}\gamma_S^2 - 2\mathrm{l}\gamma_S\gamma_C + \mathrm{m}\gamma_C^2 + (\lambda + 2\mu)\left(\mathrm{mn} - \mathrm{l}^2\right)$$

$$\vartheta_2 = \mathrm{h}\gamma_S^2 + \mathrm{k}\gamma_C^2 + (\lambda + 2\mu)\,(\mathrm{hm} + \mathrm{kn})$$

$$\vartheta_3 = \mathrm{hk}(\lambda + 2\mu)$$

Wyrażenie (14) można zapisać w postaci:

$$\det(\hat{A}) = \vartheta_1 s^2 \left(s^2 + \mathrm{a}\, i\omega\right)\left(s^2 + \mathrm{b}\, i\omega\right) \tag{15}$$

przy czym stałe a i b są określone zależnościami:

$$\mathrm{a} = \frac{-\vartheta_2 - \sqrt{\vartheta_2^2 - 4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1} \qquad \mathrm{b} = \frac{-\vartheta_2 - \sqrt{\vartheta_2^2 - 4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1} \tag{16}$$

Z układu (12) wyznacza się macierz rozwiązań $\hat{E}$, której postać jest następująca:

$$\hat{E}(s_i, \omega) = \begin{bmatrix} \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} & \hat{E}_{13} \\ \hat{E}_{21} & \hat{E}_{22} & \hat{E}_{23} \\ \hat{E}_{31} & \hat{E}_{32} & \hat{E}_{33} \end{bmatrix} \tag{17}$$

gdzie:

$$\hat{E}_{11} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{-\mathrm{hk}\omega^2 + (\mathrm{hm} + \mathrm{kn})i\omega s^2 + \left(\mathrm{mn} - \mathrm{l}^2\right)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{12} = -\hat{E}_{21} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathrm{h}\gamma_S i\omega s^2 + \left(\mathrm{n}\gamma_S - \mathrm{l}\gamma_C\right)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{13} = -\hat{E}_{31} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathrm{k}\gamma_C i\omega s^2 + \left(\mathrm{m}\gamma_C - \mathrm{l}\gamma_S\right)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{22} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathrm{h}(\lambda + 2\mu)i\omega s^2 + \left(\gamma_C^2 + (\lambda + 2\mu)\mathrm{n}\right)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{23} = \hat{E}_{32} = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{\left(\gamma_S\gamma_C + (\lambda+2\mu)\mathrm{l}\right)s^4}{\det\left(\hat{A}\right)}$$

$$\hat{E}_{33} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{k}(\lambda+2\mu)i\omega s^2 + \left(\gamma_S^2 + (\lambda+2\mu)\mathrm{m}\right)s^4}{\det\left(\hat{A}\right)}$$

Ogólnie elementy macierzy $\hat{\boldsymbol{E}}$ wyrażają się wzorami:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\xi_{ij}\; s^4 + \eta_{ij}\; i\omega\; s^2 - \varsigma_{ij}\;\omega^2}{\vartheta_l\;\mathrm{s}^2\;\left(s^2+\mathrm{a}\,i\omega\right)\;\left(s^2+\mathrm{b}\,i\omega\right)} \qquad dla \quad i,j=1,2,3 \tag{18}$$

gdzie ξ_{ij}, η_{ij} oraz ς_{ij} są elementami macierzy:

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathrm{mn}-\mathrm{l}^2 & \mathrm{n}\gamma_S - \mathrm{l}\gamma_C & \mathrm{m}\gamma_C - \mathrm{l}\gamma_S \\ \mathrm{l}\gamma_C - \mathrm{n}\gamma_S & \mathrm{n}(\lambda+2\mu)+\gamma_C^2 & -\mathrm{l}(\lambda+2\mu)-\gamma_S\gamma_C \\ \mathrm{l}\gamma_S - \mathrm{m}\gamma_C & -\mathrm{l}(\lambda+2\mu)-\gamma_S\gamma_C & \mathrm{m}(\lambda+2\mu)+\gamma_S^2 \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \mathrm{hm}+\mathrm{kn} & \mathrm{h}\gamma_S & \mathrm{k}\gamma_C \\ -\mathrm{h}\gamma_S & \mathrm{h}(\lambda+2\mu) & 0 \\ -\mathrm{k}\gamma_C & 0 & \mathrm{k}(\lambda+2\mu) \end{bmatrix} \qquad \varsigma = \begin{bmatrix} \mathrm{hk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyrażenie (18) można rozłożyć na ułamki proste w postaci:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\vartheta_l}\left[\frac{\tilde{P}_{ij}}{s^2+\mathrm{a}\,i\omega} + \frac{\tilde{Q}_{ij}}{s^2+\mathrm{b}\,i\omega} + \frac{\tilde{R}_{ij}}{s^2}\right] \tag{19}$$

gdzie stałe $\tilde{P}_{ij}$, $\tilde{Q}_{ij}$ i $\tilde{R}_{ij}$ określają zależności:

$$\tilde{P}_{ij} = \frac{\xi_{ij}\mathrm{a}^2 - \eta_{ij}\mathrm{a} + \varsigma_{ij}}{\mathrm{a}\;(\mathrm{a}-\mathrm{b})}\;, \quad \tilde{Q}_{ij} = \frac{-\xi_{ij}\mathrm{b}^2 + \eta_{ij}\mathrm{b} - \varsigma_{ij}}{\mathrm{b}\;(\mathrm{a}-\mathrm{b})}\;, \quad \tilde{R}_{ij} = \frac{\varsigma_{ij}}{\mathrm{a\,b}} \tag{20}$$

Wykorzystując wzór na retransformatę (3) i własności (6), uzyskuje się macierz rozwiązań podstawowych:

$$\boldsymbol{E}(x_i,t) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \tag{21}$$

o elementach:

$$E_{ij} = P_{ij}\;\Gamma_{\mathrm{a}}\;(x_i,t) + Q_{ij}\;\Gamma_{\mathrm{b}}\;(x_i,t) + R_{ij}\frac{\delta(t)}{|x|} \tag{22}$$

gdzie współczynniki P_{ij}, Q_{ij} oraz R_{ij} są określone następująco:

$$P_{ij} = \frac{\tilde{P}_{ij}}{\mathrm{a}\,\vartheta_l}, \quad Q_{ij} = \frac{\tilde{Q}_{ij}}{\mathrm{b}\,\vartheta_l}, \quad R_{ij} = \frac{\tilde{R}_{ij}}{\vartheta_l}$$

Natomiast funkcje $\Gamma_a(x_i,t)$ i $\Gamma_b(x_i,t)$ zdefiniowane są następująco:

$$\Gamma_a(x_i,t) = \begin{cases} \left(\frac{4\pi t}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a\,(x_i x_i)}{4t}} & , \ dla \quad t>0 \\ 0 & , \ dla \quad t<0 \end{cases}$$

$$\Gamma_b(x_i,t) = \begin{cases} \left(\frac{4\pi t}{b}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{b\,(x_i x_i)}{4t}} & , \ dla \quad t>0 \\ 0 & , \ dla \quad t<0 \end{cases}$$

3. ROZWIĄZANIE OGÓLNE

Określona wzorami (21) i (22) macierz rozwiązań podstawowych zawiera 9 niezależnych dystrybucji i może posłużyć do wyznaczenia rozwiązania źródłowych zagadnień sprężonej termodyfuzji zgodnie z relacją

$$y = E * f \tag{23}$$

Wówczas

$$y_i = \left\{ P_{ij}\Gamma_a(x_i,t) + Q_{ij}\Gamma_b(x_i,t) + R_{ij}\frac{\delta(t)}{|x|} \right\} * f_j \tag{24}$$

Pole przemieszczeń u_i uzyskuje się analizując transformatę Fouriera równania:

$$-\mu\ u_{i,jj} - (\lambda+\mu)\{y_l\}_{,i} + \gamma_S\{y_2\}_{,i} + \gamma_C\{y_3\}_{,i} = \rho F_i\ , \tag{25}$$

która ma postać:

$$\mu s^2\hat{u}_i - (\lambda+\mu) i s_i\{\hat{y}_l\} + \gamma_S\, i s_i\{\hat{y}_2\} + \gamma_C\, i s_i\{\hat{y}_3\} = \rho\hat{F}_i \tag{26}$$

przy czym $\rho\hat{F}_i$ jest transformatą czynnika ρF_i.

Po wykonaniu transformat rozwiązań (24), podstawieniu do (26) i uporządkowaniu otrzymuje się następującą zależność:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{4\pi^2}\frac{is_i}{s^2}\left[G_{1j}\frac{a}{s^2 + a\, i\omega} + G_{2j}\frac{b}{s^2 + b\, i\omega} + G_{3j}\frac{2}{s^2} \right] f_j + G_4\frac{\hat{F}}{s^2} \tag{27}$$

określającą transformatę pola przemieszczeń.

Stałe występujące w równości (27) określone są wzorami:

$$\mathrm{G}_{1j}=\frac{1}{\mu}\left[(\lambda+\mu)P_{1j}-\gamma_S P_{2j}-\gamma_C P_{3j}\right] \qquad \mathrm{G}_{2j}=\frac{1}{\mu}\left[(\lambda+\mu)Q_{1j}-\gamma_S Q_{2j}-\gamma_C Q_{3j}\right]$$
$$\mathrm{G}_{3j}=\frac{1}{2\mu}\left[(\lambda+\mu)R_{1j}-\gamma_S R_{2j}-\gamma_C R_{3j}\right] \qquad \mathrm{G}_{4}=\frac{\rho}{\mu} \tag{28}$$

Wykonując transformatę odwrotną wyrażenia (27) otrzymuje się odpowiednio dla układu równań zależność określającą pole przemieszczeń:

$$u_i=\frac{1}{4\pi}\left\{\Phi_{j,i}(x_i,t)*f_j+G_4\,F_i*\frac{\delta(t)}{|x|}\right\} \tag{29}$$

lub w równoważnej postaci:

$$u_i=\frac{1}{4\pi}\left\{\Phi_j(x_i,t)*f_{j,i}+G_4\,F_i*\frac{\delta(t)}{|x|}\right\} \tag{30}$$

gdzie

$$\Phi_j(x_i,t)=\left(\mathrm{G}_{1j}\Gamma_a(x_i,t)+\mathrm{G}_{2j}\Gamma_b(x_i,t)\right)*\frac{\delta(t)}{|x|}+\mathrm{G}_{3j}|x|\delta(t)$$

4. PODSUMOWANIE

Oprócz przedstawionego ujęcia termodyfuzji sprężystej przeanalizowano dodatkowo układy równań:

$$\begin{aligned}
&\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \rho F_i - \gamma_T\theta_{,i} - \gamma_C c_{,i} = \rho\ddot{u}_i\\
&\rho T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T u_{j,j}+\mathrm{m}\theta+\mathrm{l}c\right] - k_l\theta_{,ii} = \rho r_l\\
&\rho\dot{c} + k_2\left[\gamma_C u_{j,j}+\mathrm{l}\theta+\mathrm{n}c\right]_{,ii} = r_2
\end{aligned} \tag{31}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \rho F_i - \gamma_T\theta_{,i} - \gamma_M M_{,i} = \rho\ddot{u}_i\\
&-\rho T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T u_{j,j}+\mathrm{m}\theta+\mathrm{l}M\right] - k_l\theta_{,ii} = \rho r_l\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_M u_{j,j}+\mathrm{l}\theta+\mathrm{n}M\right] - k_2 M_{,ii} = r_2
\end{aligned} \tag{32}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \rho F_i - \gamma_T\theta_{,i} - \gamma_M M_{,i} = \rho\ddot{u}_i\\
&-\rho T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T u_{j,j}+\mathrm{m}\theta+\mathrm{l}M\right] - k_l\theta_{,ii} = \rho r_l\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_M u_{j,j}+\mathrm{l}\theta+\mathrm{n}M\right] - k_2 M_{,ii} = r_2
\end{aligned} \tag{33}$$

określające również charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola przemieszczeń. Wynikają one z różnych ujęć termodynamicznych problemu i ze sposobu oddziaływania pól rozpatrywanego zagadnienia. W układach tych jako niewiadome występują odpowiednio temperatura, koncentracja, entropia i potencjał chemiczny oraz pole przemieszczeń. W wyniku analogicznych przekształceń uzyskuje się rozwiązania układów równań (31), (32) i (33), które mają identyczną postać jak w przypadku układu (1), przy czym współczynniki G_{1j}, G_{2j}, G_{3j} i G_{4} oraz a i b zależą bezpośrednio od współczynników występujących w odpowiednich układach i w odmienny sposób niż w omówionym zadaniu.

LITERATURA

[1] DOMAŃSKI Z., PISKOREK A.: Matrices of fundamental solutions for the system of quasi-static equations of thermoelasticity and the system of dynamic equations of thermal stresses., AMS 23,2,1971.

[2] KUBIK J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids., SGT 8,2,1986.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał
Prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

The problem of statical convoluted elastic thermodiffusion in described with the system of fine partial differential equations of the second order, describing character of mutual reaction of the heat, diffusion and stress fields. There was four different forms of these equations systems, resulted of the way of fields reactions.

There was presented the method of the solution for one of the equations' system. With the Fourier transformation, its propertied and theory of distribution was build a fundamental solution of that system. On their basis was obtained the solution of the basic system.

Per analogy the solution was obtained for two rest equation systems which describe the thermodiffusion problem.