

Eugeniusz BARON

DRGANIA SWOBODNE PŁYT REISSNERA-MINDLINA O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ

Streszczenie. Praca przedstawia nowy, uśredniony 2-D model liniowo-sprężystej płyty prostokątnej o jednokierunkowej strukturze periodycznej (tzw. strukturze uniperiodycznej). Model ten dotyczy płyt o średniej grubości (wg założeń Reissnera-Mindlina) i uwzględnia wpływ efektu skali na makrodynamiczne własności płyty. Efekt ten jest pomijany w znanych asymptotycznie zhomogenizowanych modelach płyt periodycznych. Ogólne równania modelu płyty o strukturze uniperiodycznej wyprowadzono w [3], korzystając z metody modelowania ciał ze zmiennymi wewnętrznymi, przedstawionej w [1] i [2]. Równania te nie są przypadkiem szczególnym równań modelu płyty o dwukierunkowej strukturze periodycznej uwzględniającego efekt skali, co ma miejsce w modelach zhomogenizowanych asymptotycznie. Analiza drgań periodycznie uźebrowanego pasma płytowego z uwzględnieniem efektu skali daje w rezultacie dwie podstawowe częstości drgań własnych - niską oraz wysoką zależną od skali mikrostruktury.

FREE VIBRATIONS OF UNIPERIODIC REISSNER - MINDLIN PLATES

Summary. In this paper a new averaging 2-D model of rectangular plate with a unidirectional micro - periodic structure is presented. The characteristic feature of the models is that it describes the length - scale effect, i.e. the influence of the size of microstructure on the overall dynamic plate behaviour. This effect has not been taken into consideration in the already know asymptotic homogenized models of periodic plates. The equations of motion of the elastic plate according to the assumptions by Reissner - Mindlin have been introduced. The analysis of free vibrations of a ribbed plate band in the framework of proposed model results in two basic free frequencies.

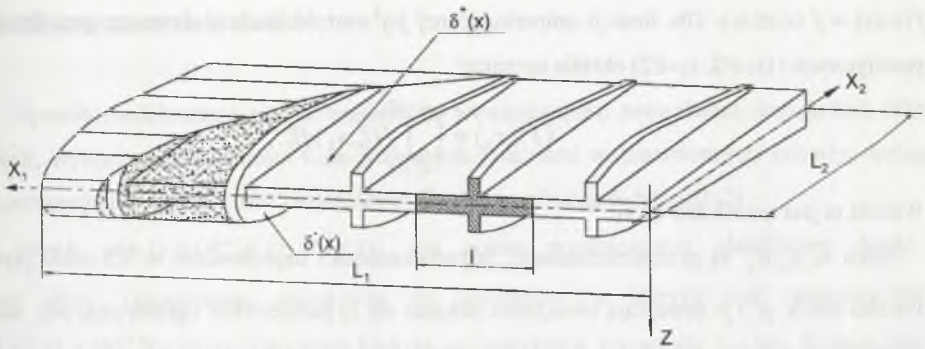
1. Wstęp

Płyta o strukturze periodycznej składa się z szeregu powtarzających się w płasz-czyźnie środkowej płyty komórek periodyczności, mających ten sam kształt (z reguły prostokątny),

wymiary i strukturę materiałową. Rozwiązywanie zagadnień dynamiki, a przede wszystkim analiza drgań i propagacji fal w płytach o takiej strukturze napotyka na znaczne trudności matematyczne, co jest następstwem faktu, że grubość płyty, rozkład masy i funkcje materiałowe są silnie oscylujące i na ogół nieciągłe. Proponuje się więc w mechanice płyt o strukturze periodycznej modele uproszczone, w których właściwości materiału oraz zmienną grubość reprezentują pewne uśrednione i stałe co do wartości moduły efektywne. Modele te, wyprowadzone najczęściej przy zastosowaniu metody homogenizacji asymptotycznej, prowadzą do równań o stałych współczynnikach aproksymujących równania o periodycznych, silnie oscylujących współczynnikach funkcyjnych. Zastosowanie metody homogenizacji asymptotycznej powoduje jednak pominięcie efektu skali, czyli wpływu rozmiarów komórki periodyczności na makrodynamiczne własności płyty. Ponieważ w wielu zagadnieniach inżynierskich wpływu tego nie można pominąć, zaproponowano nowe podejście do modelowania zagadnień dynamiki w ciałach o strukturze periodycznej, uwzględniające efekt skali, tzw. model ze zmiennymi wewnętrznymi (internal variable model), [2]. Przy zastosowaniu tego podejścia, uwzględniającego efekt skali, rozpatrywano dotychczas dwuwymiarowe modele płyt przy założeniu struktury periodycznej w dwóch charakterystycznych kierunkach w jej płaszczyźnie.

Praca niniejsza dotyczy pewnych zagadnień dynamiki nie analizowanych dotychczas metodą modelowania ciał ze zmiennymi wewnętrznymi, płyt o strukturze periodycznej tylko w jednym kierunku, tzw. strukturze uniperiodycznej, rys.1. Ogólne równania modelu płyty o strukturze uniperiodycznej wyprowadzono w [3]. Nie czyniono przy tym żadnych założeń odnośnie do zmienności parametrów płyty w drugim charakterystycznym kierunku. Uzyskane równania, liniowo-sprężystej, średniej grubości płyty Reissnera-Mindlina nie są przypadkiem szczególnym równań płyty o dwukierunkowej periodyce, por. [1], co ma miejsce w modelach zhomogenizowanych asymptotycznie.

W pracy wskaźniki $\alpha, \beta \dots(i, j \dots)$ przyjmują wartości 1,2 (1,2,3), natomiast wskaźniki a, b, \dots oraz A, B, \dots przebiegają ciąg 1,2, ...n i odpowiednio 1,2,...N. Obowiązuje konwencja sumacyjna. Ujęcie pary wskaźników w nawias oznacza ich symetryzację.



Rys. 1. Płyta o strukturze uniperiodycznej
Fig. 1. Plate of uniperiodic structure

2. Założenia wyjściowe

Niech $Ox_1x_2x_3$ będzie prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych w przestrzeni fizycznej. Oznaczając $x = (x_1, x_2)$ i $z = x_3$ obszar Ω zajmowany przez niezdeformowaną płytę o średniej grubości zdefiniujemy jako:

$$\Omega = \{(x, z) : \delta^-(x) < z < \delta^+(x) \quad x \in \Pi\},$$

gdzie $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$ jest prostokątem o wymiarach L_1 i L_2 na płaszczyźnie Ox_1x_2 , natomiast $\delta^-(x) < 0$ i $\delta^+(x) > 0$ są funkcjami określającymi powierzchnie ograniczające płytę. Założono, że płyta ma strukturę periodyczną tylko w kierunku osi x_1 , o okresie l . Tak więc przedział periodyczności $(-l/2+x_1, l/2+x_1)$ ma swój środek w dowolnym punkcie o współrzędnej x_1 . Wymiar l jest parametrem mikrostruktury (microstructure length parameter), tj. zachodzi $l \ll L$, gdzie $L = \min \{L_1, L_2\}$. Założono także, że wymiar l jest dużo większy od maksymalnej grubości płyty, tj. $l \gg \delta$, gdzie $\delta = \max \{\delta^+(x) - \delta^-(x), x \in \Pi\}$. W ogólnym przypadku nie czyniono żadnych założeń odnośnie do zmienności parametrów płyty w kierunku osi x_2 . Odpowiada to sytuacji przedstawionej na rys. 1.

Funkcja $f(x_1, x_2)$ określona na płaszczyźnie środkowej płyty Π będzie dalej nazywana funkcją uniperiodyczną, jeżeli dla każdego $x_2 \in (0, L_2)$ spełnia w całej dziedzinie warunek

$f(x_1, x_2) = f(x_1 \pm l, x_2)$. Dla funkcji uniperiodycznej jej wartość średnią wewnątrz przedziału periodyczności $(x_1 - l/2, x_1 + l/2)$ określa operator:

$$\langle f \rangle(x_2) = \frac{1}{l} \int_{x_1 - l/2}^{x_1 + l/2} f(\xi, x_2) d\xi.$$

Wartość ta jest niezależna od x_1 .

Niech $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ są przemieszczeniami, odkształceniami i naprężeniami w 3D-teorii płyt. Ponadto niech p^+ i p^- oznaczają obciążenia (wzdłuż osi z) powierzchni ograniczających, odpowiednio $x_3 = \delta^+(x)$, $x_3 = \delta^-(x)$, $x \in \Pi$ oraz niech b oznacza siłę masową (wzdłuż osi z), a ρ - gęstość masy materiału płyty. Oznaczmy A_{ijkl} jako tensor sztywności sprężystej materiału płyty. Zakładając, że płaszczyzny $z = \text{const}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej, zdefiniowano

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta 33} A_{33\gamma\delta} (A_{3333})^{-1}, \\ B_{\alpha\beta} &:= A_{\alpha 3\beta 3}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Przyjęto, że pola A_{ijkl} i ρ są parzystymi funkcjami zmiennej z i uniperiodycznymi względem zmiennej x_1 , natomiast względem zmiennej x_2 są dowolnymi regularnymi funkcjami.

Związki geometryczne są opisane równaniami Cauchy'ego

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad (2.2)$$

natomiast zależności między naprężeniami i odkształceniami płyty przyjęto w postaci:

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad \sigma_{\alpha 3} = 2B_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta 3}, \quad (\sigma_{33} = 0). \quad (2.3)$$

Uwzględniono hipotezę kinematyczną Reissnera-Mindlina

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, z, t) &= z \vartheta_\alpha^o(x, t), \\ u_3(x, z, t) &= w^o(x, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie $w^o(x, t)$ są przemieszczeniami punktów płaszczyzny Π , natomiast $\vartheta_\alpha^o(x, t)$ są niezależnymi obrotami; t - jest współrzędną czasową.

Wychodząc z zasady prac przygotowanych i uwzględniając relacje (2.1)-(2.4) uzyskujemy układ równań różniczkowych dla przemieszczeń $\vartheta_\alpha^o(x, t)$, $w^o(x, t)$ w płycie o średniej grubości. Jeżeli płyta będzie miała strukturę uniperiodyczną, będzie to układ równań o silnie oscylujących współczynnikach funkcyjnych. Stosując hipotezę modelowania ciał ze zmiennymi wewnętrznymi uzyskamy układ równań o współczynnikach stałych, z uwzględnieniem efektu skali.

3. Hipoteza modelowania

Sposób modelowania ciał ze zmiennymi wewnętrznymi, pozwalający uwzględnić efekt skali, wykorzystuje własności funkcji zwanych funkcjami wolnozmiennymi (slowly varying functions) oraz funkcji silnie oscylujących (highly oscillating functions) [2].

Niech $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\vartheta_\alpha^\circ(\mathbf{x}, t), w^\circ(\mathbf{x}, t))$ jest polem przemieszczeń płaszczyzny środkowej płyty. Ograniczamy rozważania do problemów, w których pole przemieszczeń $U(\mathbf{x}, t) = (\langle \vartheta_\alpha^\circ \rangle(\mathbf{x}, t), \langle w^\circ \rangle(\mathbf{x}, t))$ jest funkcją wolnozmienną argumentu x_1 , tzn. funkcją spełniającą dla dowolnej całkowalnej funkcji $\varphi(\mathbf{x})$ zależność:

$$\langle \varphi U \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \varphi \rangle(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Pi .$$

Znak \equiv oznacza przybliżenie związane z obliczeniem wartości liczbowych uśrednień.

Dla płyty o strukturze uniperiodycznej różnice między składowymi wektorów przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - U(\mathbf{x}, t)$ są funkcjami silnie oscylującymi argumentu x_1 . Wartości średnie tych różnic $\langle \mathbf{u} - U \rangle(\mathbf{x}, t)$ aproksymujemy poprzez wyrażenie $\langle h^A Q_A \rangle(\mathbf{x}, t)$, gdzie $h^A(x_1)$ są silnie oscylującymi znanymi funkcjami uniperiodycznymi, tzw. modalnymi funkcjami kształtu (mode shape function), natomiast składowe pól $Q_A(\mathbf{x}, t)$ są nowymi funkcjami wolnozmiennymi argumentu x_1 , tzw. korektorami (correctors). Dla funkcji silnie oscylującej $h(x_1)$, funkcji wolnozmiennych $U(\mathbf{x}, t)$ oraz dowolnej, całkowalnej funkcji $\varphi(\mathbf{x})$ zachodzi zależność:

$$\langle \varphi (hU)_1 \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \varphi h_1 \rangle(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Pi .$$

Uwzględniając przedstawiony sposób modelowania przyjęto, że dla płyty o strukturze uniperiodycznej przemieszczenia $u_i(\mathbf{x}, z, t)$ dowolnego punktu niezdeformowanej płyty o średniej grubości są określone poprzez (2.4), w których przyjęto, że

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha^\circ &= \vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t) + h^\alpha(x_1) \Theta_\alpha^\circ(\mathbf{x}, t), \\ w^\circ &= w(\mathbf{x}, t) + g^A(x_1) W^A(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie wolnozmiennie względem x_1 funkcje $\vartheta_\alpha(\cdot)$, $w(\cdot)$ (makroprzemieszczenia - grossdisplacements) oraz $\Theta_\alpha^\circ(\cdot)$, $W^A(\cdot)$ (korektory) są podstawowymi niewiadomymi proponowanego 2D - modelu płyty; funkcje $h^\alpha(x_1)$, $g^A(x_1)$ są odpowiednio dobranymi funkcjami kształtu.

Jak można zauważyć, w metodzie modelowania ciał ze zmiennymi wewnętrznymi istotną rolę odgrywają funkcje kształtu $h^a(x_1)$, $g^A(x_1)$. Funkcje te są rozwiązaniem pewnego problemu własnego przy okresowych warunkach brzegowych [2] i spełniają zależności:

$$\langle h^a \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 \rho dz \rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle g^A \int_{\delta^-}^{\delta^+} \rho dz \rangle = 0 \quad \text{oraz} \quad \langle h_{,1}^a \rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle g_{,1}^A \rangle = 0.$$

Wartości funkcji kształtu są rzędu parametru mikrostruktury $h^a(x_1)$, $g^A(x_1) \in O(l)$, natomiast wartości ich pochodnych są już od tego parametru niezależne.

W trakcie procedury modelowania w równaniu zasady prac wirtualnych uwzględniono relacje (2.1)-(2.4) wraz z (3.1). Uzyskane relacje uśredniono wykorzystując podane własności funkcji wolnozmiennych oraz uniperiodycznych względem argumentu x_1 . Po formalnych przekształceniach otrzymano układ równań różniczkowych o stałych współczynnikach dla niewiadomych funkcji występujących w relacji (3.1).

4. Podstawowe równania

Ogólne równania ruchu liniowo-sprężystej, uniperiodycznej płyty Reissnera-Mindlina z uwzględnieniem efektu skali wyprowadzono w [3].

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} := \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad D_{\alpha\beta} := \int_{\delta^-}^{\delta^+} D_{\alpha\beta} dz, \quad p := p^+ + p^- + b\langle \mu \rangle$$

oraz po uproszczeniu polegającym na przyjęciu tylko po jednej funkcji kształtu

$$h := h^1(x_1) = \bar{h}(x_1), \quad g := g^1(x_1) = \bar{g}(x_1)$$

równania te można przedstawić w postaci równań ruchu:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\Theta}_\alpha &= 0, \\ Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{W} + p &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

dynamicznych równań ewolucji

$$\begin{aligned} I^2 \langle (\bar{h})^2 \rangle \ddot{\Theta}_\alpha + M'_\alpha - I \bar{M}'_{\alpha,2} &= 0, \\ I^2 \langle \mu (\bar{g})^2 \rangle \ddot{W} + Q^1 - I \bar{Q}'_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

z uwzględnieniem równań konstytutywnych

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + \langle h_{,1} G_{\alpha\beta 1\delta} \rangle \Theta_\delta + \langle h G_{\alpha\beta 2\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}, \\ Q_\alpha &= \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta + w_{,\beta}) + I \langle \bar{h} D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta + \langle g_{,1} D_{\alpha 1} \rangle W + I \langle \bar{g} D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

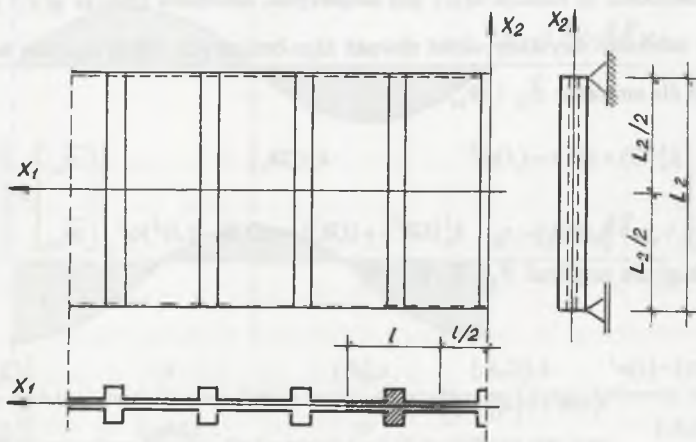
oraz

$$\begin{aligned}
 M_\alpha^1 &= \langle (\bar{h}_{,1})^2 G_{\alpha 11 \delta} \rangle \Theta_\delta + \langle \bar{h}_{,1} G_{\alpha 1 \gamma \delta} \rangle \vartheta_{(\gamma, \delta)} + l \langle \bar{h}_{,1} \bar{h} G_{\alpha 12 \delta} \rangle \Theta_{\delta, 2} + \langle \bar{h} \bar{h}_{,1} G_{\alpha 21 \delta} \rangle \Theta_\delta \\
 &\quad + l^2 \langle (\bar{h})^2 D_{\alpha \beta} \rangle \Theta_\beta + l \langle \bar{h} g_{,1} D_{\alpha 1} \rangle W + l \langle \bar{h} D_{\alpha \beta} \rangle (\vartheta_\beta + w_\beta) + l^2 \langle \bar{h} \bar{g} D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}, \\
 \bar{M}_\alpha^1 &= \langle \bar{h} \bar{h}_{,1} G_{\alpha 21 \delta} \rangle \Theta_\delta + \langle \bar{h} G_{\alpha 2 \gamma \delta} \rangle \vartheta_{(\gamma, \delta)} + l \langle (\bar{h})^2 G_{\alpha 22 \delta} \rangle \Theta_{\delta, 2}, \\
 Q^1 &= \langle (g_{,1})^2 D_{11} \rangle W + \langle g_{,1} D_{1 \beta} \rangle (\vartheta_\beta + w_\beta) + l \langle \bar{h} g_{,1} D_{1 \beta} \rangle \Theta_\beta + \langle \bar{g} g_{,1} D_{12} \rangle W_{,2}, \\
 \bar{Q}^1 &= \langle \bar{g} g_{,1} D_{21} \rangle W + \langle \bar{g} D_{2 \beta} \rangle (\vartheta_\beta + w_\beta) + l \langle \bar{g} \bar{h} D_{2 \beta} \rangle \Theta_\beta + l \langle (\bar{g})^2 D_{22} \rangle W_{,2}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Równania (4.1)-(4.4) są układem równań dla niewiadomych makroprzemieszczeń i korektorów $\vartheta_\alpha, w_\alpha, \Theta_\alpha, W$. Równań tych nie można otrzymać jako przypadku szczególnego równań przedstawionych w [1], a dotyczących płyty o dwukierunkowej strukturze periodycznej. W [1] równania dla korektorów są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Dla płyty o strukturze uniperiodycznej są równaniami różniczkowymi cząstkowymi, przy czym występują w nich pochodne cząstkowe korektorów względem zmiennej x_2 . Jednocześnie generowane są dodatkowe warunki brzegowe dla korektorów na brzegach $x_2 = \pm L_2/2$, por.[3].

Można zauważyć, że w przypadku jednorodnej płyty o stałej grubości równania (4.2) przy jednorodnych warunkach początkowych są spełnione tożsamościowo, natomiast równania (4.1) i (4.3) dają klasyczne równania ruchu płyty Reissnera-Mindlina.

5. Przykład. Drgania swobodne żebrowego pasma płytowego



Rys.2. Periodycznie uźebrowane pasmo płytowe
Fig.2. A periodically stiffened plate band.

Jako przykład rozpatrzono zagadnienie drgań swobodnych płyty o strukturze uniperiodycznej wzdłuż osi x_1 i stałych parametrach w kierunku osi x_2 . Przyjęto ponadto, że płyta jest jednorodna, ortotropowa oraz że wszystkie funkcje zależą tylko od czasu i zmiennej $x \equiv x_2$. Jest to równoznaczne z analizą periodycznie uźebrowanego pasma płytowego o rozpiętości $L \equiv L_2$, rys.2.

Uwzględniając ortotropię płyty oznaczono:

$$\begin{aligned} G_{11} &:= G_{1111}, & G_{22} &:= G_{2222}, & G_{12} &:= G_{1122} = G_{2211}, \\ G &:= G_{1212} = G_{1221} = G_{2112} = G_{2121}, & D_1 &:= D_{11}, & D_2 &:= D_{22} \end{aligned}$$

Przyjęto niewiadome funkcje w postaci

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, t) &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_{1n}(x_1) \sin k_n x, & \vartheta_2(x, t) &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_{2n}(x_1) \cos k_n x, \\ \Theta_1(x, t) &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Theta}_{1n}(x_1) \sin k_n x, & \Theta_2(x, t) &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Theta}_{2n}(x_1) \cos k_n x, \quad (5.1) \\ w(x, t) &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n(x_1) \sin k_n x, & W(x, t) &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n(x_1) \sin k_n x, \end{aligned}$$

oraz $p = 0$, gdzie $k_n = n\pi / L$, $n = 1, 2, \dots$. Taka postać niewiadomych funkcji zapewnia spełnienie warunków swobodnego podparcia na krawędziach $x_2 = \pm L/2$. Przy tych założeniach uzyskano z równań (4.1) - (4.6) układ $6n$ równań algebraicznych dla niewiadomych amplitud $\bar{\vartheta}_{1n}, \bar{\vartheta}_{2n}, \bar{w}_n, \bar{\Theta}_{1n}, \bar{\Theta}_{2n}, \bar{W}_n$. Rozpatrzono przypadek drgań symetrycznych komórki periodyczności, tzn. założono, że funkcja $h(x_1)$ jest nieparzysta, natomiast funkcja $g(x_1)$ jest parzysta. Przy takim założeniu uzyskany układ równań algebraicznych rozspręga się na dwa podukłady. Jeden dla amplitud $\bar{\vartheta}_{1n}$ i $\bar{\Theta}_{2n}$

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \langle G \rangle + \langle D_1 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & k_n \langle Gh_1 \rangle \\ k_n \langle Gh_1 \rangle & k_n^2 \langle Gh^2 \rangle + \langle Gh_1^2 \rangle + \langle D_2 h \rangle - \langle Jh^2 \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_{1n} \\ \bar{\Theta}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

natomiast drugi dla amplitud $\bar{\vartheta}_{2n}, \bar{w}_n, \bar{\Theta}_{1n}, \bar{W}_n$

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \langle G_{22} \rangle + \langle D_2 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & -k_n \langle G_{12} h_1 \rangle & k_n \langle D_2 \rangle & 0 \\ -k_n \langle G_{12} h_1 \rangle & k_n^2 \langle Gh^2 \rangle + \langle G_{11} (h_1)^2 \rangle + \langle D_1 h g_1 \rangle & 0 & \langle D_1 h g_1 \rangle \\ k_n \langle D_2 \rangle & \langle D_1 h^2 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_n^2 \langle D_2 \rangle - \langle \mu \rangle \omega^2 & 0 \\ 0 & \langle D_1 h g_1 \rangle & 0 & k_n^2 \langle D_2 g^2 \rangle + \langle D_1 (g_1)^2 \rangle - \langle \mu g^2 \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_{2n} \\ \bar{\Theta}_{1n} \\ \bar{w}_n \\ \bar{W}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Chcąc uzyskać relacje na częstości drgań własnych założono, że płyta jest izotropowa oraz pominięto wpływ inercji obrotowej. W takim przypadku z równań (5.2) wynika, że $\bar{\vartheta}_{1n} = 0, \bar{\Theta}_{2n} = 0$, natomiast częstości drgań własnych obliczymy przyrównując do zera wyznacznik główny układu równań (5.3).

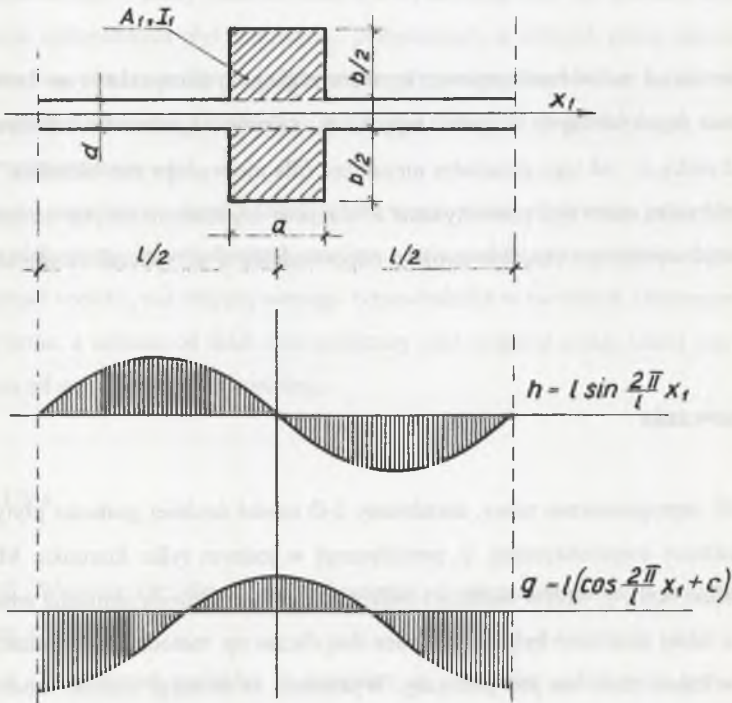
Założono dalej, że funkcje kształtu można aproksymować w postaci:

$$h = l \sin \frac{2\pi}{l} x_1, \quad g = l (\cos \frac{2\pi}{l} x_1 + c);$$

patrz rys.3, gdzie stałą c obliczono z warunku $\langle \mu g \rangle = 0$.

Wtedy

$$c = -\psi_M \kappa_o / (1 + \psi_M), \quad \text{a} \quad \kappa_o = \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a}{l},$$



Rys.3. Wykresy modalnych funkcji kształtu dla powtarzalnej komórki żebrowego pasma płytowego

Fig.3. Diagrams of mode-shape functions for the repeated cell of the stiffened plate band

Przyjęto oznaczenia:

$$I_1 := [(b+d)^3 - d^3]a/12, \quad j_o := d^3/12, \quad A_1 := ab, \quad \psi_I := I_1/j_o l, \quad \psi_M := A_1/dl, \\ D := Ed^3/12(1-\nu^2), \quad G := E/2(1+\nu),$$

gdzie E jest modułem Younga, natomiast ν jest współczynnikiem Poissona.

W trakcie obliczeń przyjęto, że $all \ll 1$ oraz uwzględniono wstępne założenie, że $d \ll L$ i $l \ll L$. Uzyskano relacje na pierwsze przybliżenie podstawowych częstości drgań własnych

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{D}{\rho d} k_n^4 \frac{1+\psi_I}{1+\psi_M} \left[1 - \nu^2 \frac{2\psi_I^2}{(1+\psi_I)(1+2\psi_I)} \right] \quad (5.4)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{G}{\rho} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{1+\psi_M}{1+3\psi_M}$$

W odróżnieniu od metod homogenizacji asymptotycznej uzyskano relacje na dwie podstawowe częstości drgań własnych. Częstość wysoką ω_+ , zależną od parametru mikrostruktury l oraz częstość niską ω_- - od tego parametru niezależną (dla pierwszego przybliżenia). Wyrażenie na częstość niską może być porównywane z relacjami uzyskanymi innymi metodami, natomiast częstość wysoka nie znajduje swojego odpowiednika w dotychczas stosowanych metodach.

6. Podsumowanie

W artykule zaproponowano nowy, uśredniony 2-D model średniej grubości płyty prostokątnej o strukturze uniperiodycznej, tj. periodycznej w jednym tylko kierunku. Model ten uwzględnia efekt skali, tj. wpływ wielkości mikrostruktury na makrodynamiczne właściwości płyty. Płyty o takiej strukturze były analizowane dotychczas np. metodą homogenizacji asymptotycznej, w której efekt ten jest pomijany. Wykazano, że stosując metodę modelowania, uwzględniającą efekt skali, płyty o strukturze uniperiodycznej nie można traktować jako szczególnego przypadku płyty o periodyce dwukierunkowej, jak to ma miejsce w modelu zhomogenizowanym asymptotycznie. Uzyskane w artykule równania modelu są inne jakościowo, bardziej rozbudowane i złożone (poczyniono słabsze założenia). W porównaniu

z równaniami płyty periodycznej dwukierunkowo równania dla funkcji korygujących są dodatkowymi niewiadomymi kinematycznymi. Są też równaniami różniczkowymi cząstkowymi, podczas gdy dla płyty o dwukierunkowej strukturze periodycznej są to równania różniczkowe zwykłe.

W proponowanym sposobie modelowania z uwzględnieniem efektu skali rozwiązanie zależy od doboru tzw. funkcji kształtu. Z założenia funkcje te wyrażają postać drgań swobodnych pojedynczej komórki periodyczności. Nie są one więc dowolne, lecz wynikają z uprzednio rozwiązanego pewnego problemu własnego przy periodycznych warunkach brzegowych, por. [2].

Płyty o strukturze uniperiodycznej mają duże zastosowanie praktyczne, szczególnie w konstrukcjach budowlanych. Już nawet przypadek szczególny (zagadnienie pasma płytowego) proponowanego w pracy modelu może być wykorzystywany do obliczeń dynamicznych periodycznie żebrowanych płyt stalowych i żelbetowych, w których żebra stanowią element nośny usytuowany prostopadle do podpór pasma płytowego. Stanowi to istotne rozszerzenie zakresu analizy dynamicznej średniej grubości płyt o strukturze periodycznej w stosunku do modelu proponowanego w [1].

Analizując zagadnienie drgań własnych żebrowego pasma płytowego, w ramach proponowanego modelu płyty uniperiodycznej, uzyskano dwie podstawowe częstości drgań własnych (5.3), częstość wysoką, nie mającą swojego odpowiednika w modelach zhomogenizowanych asymptotycznie, a zależną od skali mikrostruktury oraz częstość niską, której pierwsze przybliżenie jest od tego parametru niezależne.

LITERATURA

1. Baron E., Woźniak Cz.: On the microdynamics of composite plates, Arch. Appl. Mech., **66**, 1995, 126 - 133
2. Woźniak Cz.: Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure, Arch. Mech., **49**, 1977, 421 - 441
3. Baron E.: Dynamic behaviour of plates with a uniperiodic structure (w przygotowaniu)

Abstract

In the paper there is proposed a new averaged 2D-model of a rectangular plate of medium thickness with uniperiodic structure i.e. periodic in only one direction. This model describes the length scale effect, i.e. the influence of the size of microstructure on the overall dynamic plate behaviour. So far, plates with a periodic structure have been taken into consideration mainly using asymptotic homogenisation method. However, an asymptotic approach neglects the length scale effect which plays an important role in dynamics. It has been demonstrated, that taking into account the afore-mentioned effect, the plate with an unidirectional periodic structure cannot be treated as a specific case of that with a bidirectional periodicity, contrary to periodic plates described by their homogenized models. The basic unknowns of the proposed 2D-plate equations are grossdisplacements ϑ_α, w and what were called internal variables Θ_α^A, W^A . To formulate the above equations we have previously to determine the mode-shape functions which describe periodic free vibrations for a repeated periodically segment of a plate. It has been demonstrated that for homogeneous plates with a constant thickness, under trivial initial conditions, equations for internal variables (4.2) are satisfied identically and remaining equations (4.1) and (4.3) reduce to well known Reissner-Mindlin 2D-plate theory.

The analysis of free vibrations of a ribbed plate band in the framework of proposed model results in two basic free frequencies (5.3): higher frequency which cannot be obtained using the homogenized model and depends on the microstructure length parameter and lower frequency which in the first approximation coincides with that obtained from the homogenized model.