

Krzysztof GRYGIEREK

OPIS WARIACYJNY KOMPOZYTOWYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PROFILU ZAMKNIĘTYM

Streszczenie. W artykule tym przedstawiono opis wariacyjny kompozytowych prętów cienkościennych. Zostały podane podstawowe określenia geometryczne, kinematyka oraz równanie wariacyjne tych ustrojów. Poprawność przedstawionej teorii sprawdzono na przykładzie.

VARIATIONAL DESCRIPTION OF THE THIN-WALLED COMPOSITES BEAMS WITH CLOSED CROSS SECTION

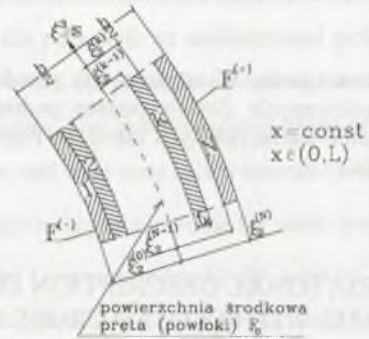
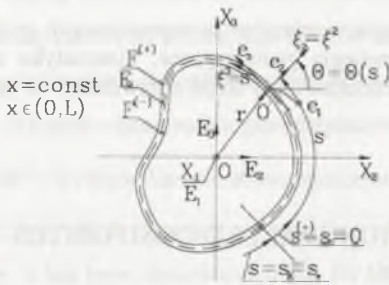
Summary. In this paper the variational description of the thin-walled composites beams with closed cross-section is presented. The fundamental geometry relations, kinematics assumptions and variational equation are given here. The correctness of the theory is checked in the example.

1. Podstawowe określenia geometryczne i hipotezy

Pręt cienkościenny modelować będziemy powłoką walcową, cienkościenną, wielowarstwową, zamkniętą, składającą się z N warstw; grubość każdej z k -tej warstwy, oznaczymy przez t_k , por. rys. 1. Grubość powłoki przyjmujemy za równą h tak, że $h = \sum_{k=1}^N t_k$. Powierzchnia środkowa F_o będzie zbiorem punktów równo oddalonych od powierzchni zewnętrznej $F^{(+)}(\xi_2 = \frac{h}{2})$ i wewnętrznej $F^{(-)}(\xi_2 = -\frac{h}{2})$.

Przy opisie geometrii powłoki będziemy stosować dwa podstawowe układy współrzędnych:

- układ ortogonalny OX_1 , z bazą ortonormalną E_i , zlokalizowany w środku geometrycznym przekroju pręta, o współrzędnej $x_1 = x \in (0, L)$,
- układ lokalny $O\xi_i$, z bazą ortogonalną e_i , umieszczony w dowolnym punkcie O powierzchni środkowej powłoki.



Rys.1. Geometria pręta

Fig.1. Coordinate system of the thin-walled beam

Reguła przejścia z bazy E_i do e_i określona będzie równaniem macierzowym:

$$\{e_i\} = [A]\{E_i\}, \quad (1)$$

gdzie niezerowe składniki macierzy przejścia $[A]$ równają się:

$A_{11} = 1$, $A_{22} = A_{33} = \cos\theta$, $-A_{32} = A_{23} = \sin\theta$. Przez $\theta = \theta(s)$ oznaczono kąt zawarty między osią OX_2 a $O\xi_2$, por. rys. 1.

2. Kinematyka pręta cienkościennego

Położenie dowolnego punktu powierzchni środkowej pręta-powłoki po odkształceniu będziemy określać w dwóch układach współrzędnych: OX_i i $O\xi_i$. Założymy przy tym, że każdy normalny przekrój pręta płaszczyzną $x_1 = \cos nt$, $x_1 \in (0, L)$, czyli profil pręta cienkościennego – przy przejściu z konfiguracji początkowej do aktualnej – jest realizowany przez ruch translacyjny, rotacyjny i deplację. Składowe $u_i(x_j)$ wektora przemieszczenia $u(x_j)$

dowolnego punktu $O(x_2, x_3)$ (powierzchni środkowej), uzyskanego w wyniku przecięcia płaszczyzną normalną do osi pręta w globalnym układzie współrzędnych OX_i , zgodnie z przyjętymi założeniami o składaniu ruchów, będą miały postać następującą:

$$u(x_i) = U(x_i) + \Omega \times r - \omega E_1 \Omega_1, \quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u &= u_i(x_i) E_i, \quad U = U_i(x_i) E_i, \\ \Omega &= \Omega_i(x_i) E_i, \quad r = 0 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3, \quad \Omega_1 \equiv \frac{d\Omega_1}{ds}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Poszczególne składniki po prawej stronie równania (2) przedstawiają wprowadzone: translację ($U(x_i)$), rotację ($\Omega(x_i)$) i deplanację przekroju ($-\omega E_1 \Omega_1$), gdzie przez ω określono pewną funkcję współrzędnej s (funkcję wycinkową, współrzędną wycinkową).

Składowe przemieszczenia $\{\hat{u}_i(\xi_i)\}$ w lokalnym układzie współrzędnych $O\xi_i$ uzyskamy wykorzystując zależność (1), co w postaci szczegółowej da nam:

$$\{\hat{u}_i(\xi_i)\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1(\xi_i) \\ \hat{u}_2(\xi_i) \\ \hat{u}_3(\xi_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 + x_3 \Omega_2 - x_2 \Omega_3 - \omega \Omega_1 \\ U_2 \cos \theta + U_3 \sin \theta + \Omega_1 q \\ -U_2 \sin \theta + U_3 \cos \theta + \Omega_1 p \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$\begin{aligned} q(s) &= -x_3 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\ p(s) &= x_3 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Funkcję ω wprowadzoną w zależnościach (2) i (3) można otrzymać wykorzystując podstawowe zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w pręcie cienkościennym, my zaś przyjmijmy ją za [5], analogicznie do prętów izotropowych w następującej postaci:

$$\omega = \int_0^s \left(p - \frac{I}{\Omega_1} \frac{\tau}{Gh} \right) d\bar{s}, \quad (4)$$

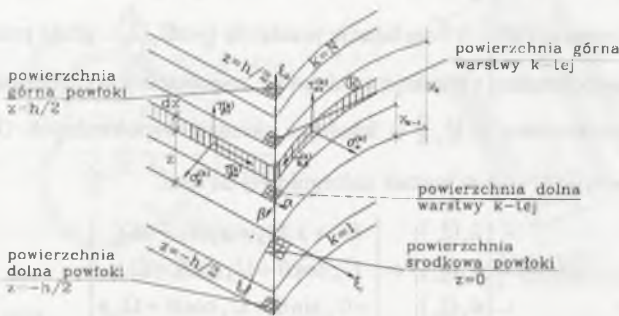
gdzie: $\tau(\xi_i, s)$ - jest naprężeniem stycznym, a G - przedstawia „wypadkowy” moduł sprężystości poprzecznej Kirchhoffa (sprecyzowany w dalszych rozważaniach).

3. Stan naprężenia w kompozytowej powłoce anizotropowej

Zajmować się będziemy powłoką walcową, wielowarstwową, lecz nie kołową, składającą się z N warstw, por. rys. 2. Każda z warstwy k -tej takiej powłoki jest modelowana materiałem

ortotropowym (jednokierunkowo zbrojona). Przyjmujemy przy tym założenie, iż: element pręta $dsdx$ jest nieodkształcalny w kierunku współrzędnej s lub inaczej odkształcenie obwodowe powłoki jest w przybliżeniu równe zero, a wpływ pozostałych składowych $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta}$ na naprężenia σ_β jest pomijalny, czyli: $\varepsilon_\beta \equiv 0$, ($\sigma_\beta \equiv 0$). Po uwzględnieniu tego faktu wzór określający wektor naprężenia pojedynczej k -tej warstwy pręta-powłoki przyjmie postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k \quad (5)$$



Rys.2. Geometria i naprężenia w kompozytowej powłoce
Fig.2. Geometry and stresses of the composites shell

W równaniu (5) składowe macierzy $[\bar{Q}]$ obliczymy z zależności:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= m^4(\bar{m}E_1) + n^4(\bar{m}E_2) + 2m^2n^2(\bar{m}v_{21}E_1) + 4m^2n^2(G_{12}), \\ \bar{Q}_{16} &= m^3n(\bar{m}E_1) - mn^3(\bar{m}E_2) + (mn^3 - m^3n)(\bar{m}v_{21}E_1) + 2(mn^3 - m^3n)(G_{12}), \\ \bar{Q}_{66} &= m^2n^2(\bar{m}E_1) + m^2n^2(\bar{m}E_2) - 2m^2n^2(\bar{m}v_{21}E_1) + (m^2 - n^2)^2(G_{12}), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: E_1, E_2 - moduły Younga, G_{12} - moduł Kirchhoffa, v_{12}, v_{21} - współczynniki Poissona w układ. współrzędnych pokrywającym się z kierunkiem włókien; $\bar{m} = (1 - v_{12}v_{21})^{-1}$; $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia włókien do osi Ox .

Składowe wektora odkształcenia $(\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta})$, po przyjęciu hipotezy elementu normalnego, por. [1], zapiszemy w postaci:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xx}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_{xx}^o \end{Bmatrix}, \quad z \in (z_{k-1}, z_k) \\ k = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

Zdefiniujemy dalej siły wewnętrzne, por. rys. 3, które przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k dz = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} \\ A_{16} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xs}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} \\ B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_{xs}^o \end{Bmatrix}, \\ \{M\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k z dz = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} \\ B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xs}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{16} \\ D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_{xs}^o \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\text{-macierz sztywności tarczowej: } [A] = [A_{ij}] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}), \quad A_{ij} = A_{ji}; \quad (8.1)$$

$$\text{-macierz sztywności sprzężeń: } [B] = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad B_{ij} = B_{ji}; \quad (8.2)$$

$$\text{-macierz sztywności zginania: } [D] = [D_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad D_{ij} = D_{ji}. \quad (8.3)$$



Rys.3. Siły powłokowe
Fig.3. Shell loads

4. Równanie wariacyjne kompozytowych prętów cienkościennych

Celem dalszej analizy będzie wyprowadzenie równań wariacyjnych kompozytowych prętów cienkościennych. W tym celu zapiszemy funkcjonal określający całkowitą energię potencjalną w postaci:

$$I_L[u] = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{U\}^T \{\bar{X}\} dV - \int_{\partial V} \{U\}^T \{\bar{X}\} df, \quad (9)$$

w którym pierwszy człon określa energię wewnętrzną odkształceń sprężystych ośrodka, a dwa pozostałe: energię potencjalną obciążeń zewnętrznych masowych i brzegowych. Rozpatrzmy pierwszy człon funkcjonału (9), który możemy po elementarnych przekształceniach zapisać:

$$W_u = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^s ds \int_{-h/2}^{h/2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\xi_2 \equiv \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^s \{\varepsilon_x^o \quad \gamma_{xs}^o \quad \kappa_x^o \quad \kappa_{xs}^o\} \{N_1 \quad N_{13} \quad M_1 \quad M_{13}\}^T ds, \quad (10)$$

w którym za [1] odkształcenia będą się równać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xs}^o \\ \kappa_x^o \\ \kappa_{xx}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1} \\ 0 & -\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi_1^2} & 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_3} & -\frac{2\partial^2(\cdot)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} & \frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{1i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{3i} & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} A_{1j} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{ij} \right) A_{1j} & 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{3i} & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{3i} \right) A_{1j} & \frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

co po podstawieniu zależności (3) da nam:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xs}^o \\ \kappa_x^o \\ \kappa_{xx}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & 0 & 0 & -\omega \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} & x_3 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & -x_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \\ 0 & -s \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & c \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & \left(s \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - c \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + p \right) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & c & s \\ 0 & -c \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} & -s \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} & -q \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -ks \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & kc \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & k \left(-s \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + c \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + p + \frac{1}{k} \right) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & -kc & -ks \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix} = [L(\cdot)][U]$$

Wykorzystując w równaniu (10) zależności na siły wewnętrzne (8) otrzymamy:

$$W_{ii} = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^l \{ [U]^T \} [L(\cdot)]^T [\Delta][L(\cdot)][U] d\xi_3 = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^l \{ [U]^T \} [W(\cdot,*)][U] d\xi_3, \quad (12)$$

$$\text{gdzie: } [\Delta] \equiv \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [W(\cdot,*)] = [L(\cdot)]^T [\Delta][L(\cdot)].$$

Drugi człon funkcjonału (9), bez wyprowadzeń, zapiszemy:

$$\int_V \{ [U]^T \} \{ X \} dV = \int_0^L \{ \bar{U} \}^T \{ \bar{p} \} dx, \quad (13)$$

$$\text{gdzie: } \{ \bar{U} \} = \{ U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_1 \}^T; \quad \{ \bar{p} \} = \{ \bar{n}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{t}_3 \quad \bar{m}_1 \quad \bar{m}_2 \quad \bar{m}_3 \quad \bar{b} \}^T.$$

W wektorze $\{ \bar{p} \}$ występują kolejno: siły: osiowa i tnące, momenty: skrecający i zginające oraz bimoment.

Analogicznie do (9) trzeci człon funkcjonału przyjmie postać:

$$\int_{\partial V} \{ [U]^T \} \{ \hat{X} \} d\hat{f} = \{ \bar{U} \}^T \{ \hat{p} \}_0^L, \quad (14)$$

a występujące tutaj przemieszczenia i siły są zdefiniowane na brzegach $x=0$ i $x=L$.

Podstawiając do funkcjonału Lagrange'a zależności (12), (13), (14) otrzymamy:

$$I_L[u] = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^l \{ [U]^T \} [W(\cdot,*)][U] d\xi_3 dx - \int_0^L \{ \bar{U} \}^T \{ \bar{p} \} dx - \{ \bar{U} \}^T \{ \hat{p} \}_0^L. \quad (15)$$

Ze względu na to, iż macierz $W(\cdot,*)$ jest symetryczna możemy obliczyć wariację funkcjonału:

$$\delta I_L[u] = \int_0^L \int_0^t \{\delta U\}^T [W(\cdot,*)] \{U\} d\xi_3 dx - \int_0^L \{\delta U\}^T \{\bar{p}\} dx - \{\delta U\}^T \{\bar{p}\}_0^L \quad (16)$$

Jeżeli w przedstawionych powyżej rozważaniach wprowadzimy hipotezę Bernouliego, obowiązującą w klasycznej teorii płyt i powłok cienkich, z której tutaj wynika, iż:

$$\Omega_2 = \frac{-dU_2}{dx} = -U_3', \quad \Omega_3 = \frac{dU_2}{dx} = U_2', \quad (17)$$

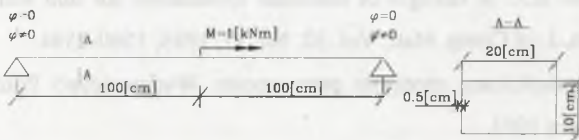
to wariację energii wewnętrznych odkształceń sprężystych ośrodka zapiszemy:

$$\delta W_u = \int_0^L \int_0^t \left\{ \begin{array}{c} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \\ \delta \Omega_1 \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{33} & I_{23} & I_{3\omega} \\ 0 & I_{23} & I_{22} & I_{2\omega} \\ 0 & I_{3\omega} & I_{2\omega} & I_{\omega\omega} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_1^{IV} \\ U_2^{IV} \\ U_3^{IV} \\ \Omega_1^{IV} \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{cccc} 0 & S_3 & S_2 & S_\omega \\ S_3 & 0 & 0 & S_{3\omega} \\ S_2 & 0 & 0 & S_{2\omega} \\ S_\omega & S_{3\omega} & S_{2\omega} & S_{\omega\omega} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_1''' \\ U_2''' \\ U_3''' \\ \Omega_1''' \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cccc} A & 0 & 0 & S_{\omega 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{\omega 1} & 0 & 0 & J \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_1'' \\ U_2'' \\ U_3'' \\ \Omega_1'' \end{array} \right\} dx,$$

gdzie $A, S_{ij}, I_{ij}, (i, j = 2, 3, \omega)$ określają charakterystyki geometryczno-fizyczne, pojawiające się w cienkościennych konstrukcjach prętowych warstwowych. Obliczamy je całkując po obwodzie macierz $[W(\cdot,*)]$.

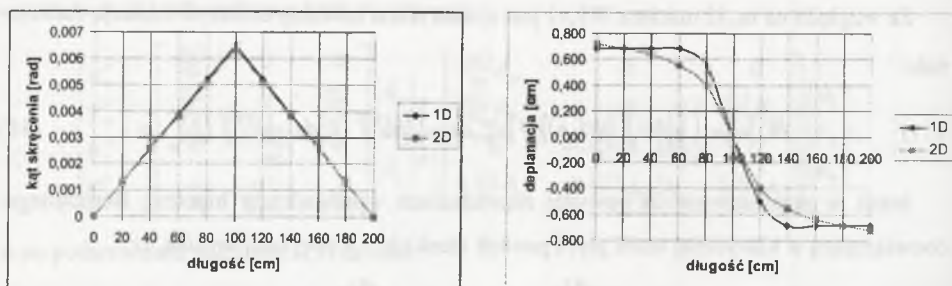
5. Przykład

Belka wolnopodparta, o schemacie i przekroju jak na rys. 4, została obciążona w środku momentem skręcającym. Belka jest laminatem zbudowanym z 5 warstw: szkło E / epoksyd o kodzie $[0 \ 90 \ 0 \ 90 \ 0]$ i następujących charakterystykach materiałowych: $E_1 = 45GPa$, $E_2 = 12GPa$, $G = 5.5GPa$, $\nu_{12} = 0.28$.



Rys.4. Geometria i obciążenie belki

Fig.4. Geometry and loads beam



Rys.5. Porównanie wyników 1D z 2D

Fig 5. Comparison results 1D with 2D

Zadanie to, rozwiązano - MES, przy użyciu liniowego, kompozytowego, cienkościennego elementu skończonego, zbudowanego na podstawie przedstawionego opisu wariacyjnego kompozytowych prętów cienkościennych. Wyniki te, rys.5, porównano z otrzymanym pakietem ANSYS przy wykorzystaniu kompozytowego elementu powłokowego.

Rozwiązanie, otrzymane zgodnie z powyższym opisem, daje bardzo podobne wyniki z tymi otrzymanymi pakietem ANSYS. Zmniejszył się przy tym znacznie rozmiar zadania. W przypadku rozwiązaniu 1D mieliśmy 357 stopni swobody, a w przypadku 2D 34020 stopni swobody.

LITERATURA

1. Bauld N.R., Tzeng Jr., Tzeng L-S.: A Vlasov theory for fibres-reinforced beams with thin-walled open cross section, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, No.3, 1984, 277-297.
2. Ambarcumjan S.A.: *Obszczaja teorija anizotropnych obołoczki*, Moskwa 1971.
3. Gjelsvik A.: *The theory of thin walled bars*, A Willey-Interscience Publication, N.Y., 1981.
4. Massa J.C., Barbero E.J.: A strength of materials formulation for thin walled composite beams with torsion, *J. of Comp. Mat.*, Vol. 32, No. 17, 1998, 1560-1594.
5. Obrębski J.B.: *Cienkościennie sprężyste pręty proste*. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1991.

Abstract

In this paper theory of the thin-walled beams with closed cross section made from composites (fibres-reinforced laminates) was presented. The theory is based on the assumption of the laminate plate. In the theory presented here differentiate from classical plate theory the warping function was introduced. Finally the variational equation of composites thin-walled beams was presented. In the example the results obtained by the use of the (FEM) theory and the ANSYS programme was compared.