ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Jadwiga JĘDRZEJCZYK - KUBIK

ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE DLA PRZEPŁYWÓW DYFUZYJNYCH W OŚRODKU KELVINA - VOIGTA

Streszczenie. W pracy przedstawiono związki konstytutywne opisujące przepływy dyfuzyjne w obecności pola termicznego i elektromagnetycznego w ośrodku Kelvina - Voigta.

CONSTITUTIVE RELATIONSHIPS FOR DIFFUSIVE FLOWS IN KELVIN - VOIGT MEDIUM

Summary. Constitutive relationships for the reciprocal interacting of mechanical, thermal, diffusion and electromagnetic fields in a paramagnetic have been presented in this paper.

1. Wstęp

Niniejsza praca jest próbą wyprowadzenia równań konstytutywnych uwzględniających wzajemny wpływ pola mechanicznego, elektromagnetycznego, cieplnego i dyfuzyjnego w ośrodku ciągłym, lepkosprężystym. Jest ona kontynuacją prac [5,10,11] i ich rozszerzeniem na ciała stałe określone modelem Kelvina - Voigta.

Przy analizie zagadnienia oparto się na teorii pól połączonych, rozwiniętej w ramach termo-dynamiki procesów nierównowagowych głównie przez A.C. Eringena i G.A. Maugina [3], W. Nowackiego [6], H. Parkusa [9], K. Huttera [8]. Ponieważ celem pracy jest określenie relacji konstytutywnych w ciele materialnym, rozważania nasze rozpoczniemy od nierówności Clausiusa - Duhema i bilansu energii uwzględniającego wpływy różnych pól na ciało stałe, por. [3,4,6,7,9,10]. W pracy stosujemy oznaczenia przyjęte przez A.C. Eringena i G.A. Maugina [3].

2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem naszych rozważań będzie analiza wzajemnego oddziaływania pola magnetycznego, termicznego i dyfuzji masy w anizotropowym , przewodzącym i jednorodnym paramagnetyku, por.[5,10].

Oznaczmy przez $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)=\{X_K\}$ współrzędne materialne punktów ciała stałego, niedyfundującego w materialnym układzie odniesienia **B**, a przez $x=\chi(\mathbf{X},t)=\{x_k\}$ funkcję ruchu tego ciała.

Prędkość i gradient deformacji ciała określimy następująco:

$$x_k=\chi_k(X_K,t),\ \mathbf{V}=\frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{X},t),\quad \mathbf{F}=\{x_{k,K}\}=\left\{\frac{\partial\chi_k}{\partial X_K},\quad k,K=1,2,3\right\},\quad J=\det(\mathbf{F})>0. \qquad (2.1)$$

Przyjmując oznaczenia z [3] bilans energii i nierówność wzrostu entropii w początkowym układzie odniesienia wynoszą odpowiednio, por. [3,7,9]:

$$\rho_0\dot{\varepsilon}-\frac{1}{2}{}_ET_{KL}\dot{C}_{KL}-Q_{K,K}-\rho_0 h+M_K\dot{B}_K-\rho_0\dot{c}m-j_K m_{,K}-\mathcal{J}_K\mathcal{E}_K=0\ , \qquad (2.2)$$

$$\rho_0\dot{\eta}\geq\frac{1}{\Theta}\rho_0 h-\left(\frac{Q}{\Theta}\right)_{K,K}, \qquad (2.3)$$

gdzie: ε jest energią wewnętrzną właściwą, ρ_0 - gęstością ciała stałego, $C_{KL}=x_{k,K}x_{k,L}$ tensorem deformacji Greena, ${}_ET_{KL}$ symetrycznym tensorem naprężenia, **B** -wektorem indukcji magnetycznej, **M** - wektorem magnetyzacji, E - efektywnym natężeniem pola elektrycznego, J - wektorem gęstości prądu elektrycznego, c - koncentracją dyfundującego składnika, m - potencjałem chemicznym dyfuzji, η - entropią właściwą, h - źródłem ciepła, **Q** - wektorem strumienia ciepła, **j** - wektorem strumienia masy, (por. [12]), Θ - temperaturą absolutną.

Wszystkie wielkości pola są funkcjami zmiennych $(\mathbf{X},t)=(X_K,t)$.

Wprowadzając energię swobodną właściwą

$$\psi=\varepsilon-\Theta\eta \qquad (2.4)$$

i eliminując źródło ciepła w wyrażeniach (2.2) i (2.3) otrzymamy następującą nierówność residualną:

$$-\rho_0\dot{\psi}+\frac{1}{2}{}_ET_{KL}\dot{C}_{KL}-\rho_0\dot{\Theta}\eta+\rho_0\dot{c}m-M_K\dot{B}_K+\frac{1}{\Theta}Q_K\Theta_{,K}+j_K m_{,K}+\mathcal{J}_K\mathcal{E}_K\geq 0\ . \qquad (2.5)$$

Dla celów tej pracy przyjmiemy explicite, że energia swobodna jest funkcją zmiennych niezależnych **E**, Θ, **B**, c, czyli

$$\psi = \psi(\mathbf{E}(\mathbf{X},t),\quad \Theta(\mathbf{X},t),\quad \mathbf{B}(\mathbf{X},t),\quad c(\mathbf{X},t)),\quad E_{KL}(X,t)=\frac{1}{2}(C_{KL}-\delta_{KL}), \tag{2.6}$$

gdzie δ_{KL} jest deltą Kroneckera, a K,L = 1,2,3.

Różniczkując zależność (2.6) ze względu na czas i podstawiając otrzymane wyrażenie do nierówności (2.5) otrzymamy:

$$\begin{aligned}&\left({}_E T_{KL}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{KL}}\right)\dot{E}_{KL}-\left(\rho_0\eta+\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}\right)\dot{\Theta}+\left(\rho_0 m-\frac{\partial\psi}{\partial c}\right)\dot{c}-\left(M_K+\frac{\partial\psi}{\partial B_K}\right)\dot{B}_K+\\&+\frac{1}{\Theta}Q_K\Theta_{,K}+j_K m_{,K}+\mathcal{J}_K\mathcal{E}_K\geq 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Nierówność ta będzie podstawą do otrzymania równań tworzących omawianego procesu. Poszukiwane wielkości pola (${}_E T$, η, m, **M**, Q, j, $\mathcal{J}$) powinny spełniać (2.7) dla każdego wyboru zmiennych niezależnych.

Niech **Y** i **J** będą wektorami 18 - wymiarowymi określonymi następująco:

$$\mathbf{Y}=[Y_j]=\left[\dot{E}_{11},\dot{E}_{22},\dot{E}_{33},\dot{E}_{12},\dot{E}_{13},\dot{E}_{23};\eta;\dot{c};\dot{B}_1,\dot{B}_2,\dot{B}_3;\Theta_{,1},\Theta_{,2},\Theta_{,3};m_{,1},m_{,2},m_{,3};\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3\right]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}=[J_j]=\Bigg\{&{}_E T_{11}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{11}},{}_E T_{22}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{22}},{}_E T_{33}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{33}},{}_E T_{12}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{12}},{}_E T_{13}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{13}},{}_E T_{23}-\frac{\partial\psi}{\partial E_{23}};\\&-\rho_0\eta-\frac{\partial\psi}{\partial\Theta};\rho_0 m-\frac{\partial\psi}{\partial c};-M_1-\frac{\partial\psi}{\partial B_1},-M_2-\frac{\partial\psi}{\partial B_2},-M_3-\frac{\partial\psi}{\partial B_3};\\&\frac{1}{\Theta}Q_1,\frac{1}{\Theta}Q_2,\frac{1}{\Theta}Q_3;j_1,j_2,j_3;\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.8}$$

a **w** - wektorem 11 - wymiarowym postaci:

$$\mathrm{w}=[\mathrm{w}_j]=[E_{11},E_{22},E_{33},E_{12},E_{13},E_{23};\Theta;c;B_1,B_2,B_3]. \tag{2.9}$$

Nierówność residualną (2.7) można wówczas zapisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{Y};\mathrm{w})\geq 0. \tag{2.10}$$

3. Równania konstytutywne

Przedyskutujmy konstrukcję równań konstytutywnych dla magnetodyfuzji w ośrodku Kelvina - Voigta.

Podstawą do rozwiązania nierówności (2.10) jest twierdzenie o rozkładzie (dekompozycji), por.[1,2]. Zgodnie z tym twierdzeniem wektor **J** można jednoznacznie określić relacją:

$$\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{Y}}\Phi(\mathbf{Y};\mathbf{w}) + \mathbf{U}(\mathbf{Y};\mathbf{w}), \tag{3.1}$$

gdzie $\Phi(\mathbf{Y},\mathbf{w})$ jest potencjałem dysypacji, a $\mathrm{U}(\mathbf{Y},\mathbf{w})$ funkcją wektorową spełniającą warunki:

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{Y};\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{U}(\mathbf{0};\mathbf{w}) = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Funkcja $\Phi(\mathbf{Y},\mathbf{w})$ określona jest równaniem:

$$\Phi(\mathbf{Y};\mathbf{w}) = h(\mathbf{w}) + \int_0^1 p(\lambda\mathbf{Y};\mathbf{w})\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{3.3}$$

gdzie $p(\mathbf{Y},\mathbf{w})$ jest funkcją skalarną klasy C^2 taką, że

$$p(\mathbf{Y},\mathbf{w}) \geq 0,\ p(\mathbf{0},\mathbf{w}) = 0 \tag{3.4}$$

Biorąc pod uwagę określenia (2.8), (2.9), (2.6) oraz wyniki prac [1] można stwierdzić, że $\mathbf{J}(\mathbf{Y},\mathbf{w})$ spełnia zredukowaną nierówność dysypacyjną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned}
&{}_{E}T_{KL} = \frac{\partial\psi}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{E}_{KL}} + U^{(T)}_{KL},\ \rho_0\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\Theta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\Theta}} - U^{(\eta)},\\
&\rho_0 m = \frac{\partial\psi}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{c}} + U^{(m)},\ M_K = \frac{\partial\psi}{\partial B_K} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{B}} + U^{(M)}_K,\\
&\frac{1}{\Theta}Q_K = -\frac{\partial\Phi}{\partial(\Theta_{,K})} - U^{(Q)}_K;\ j_K = -\frac{\partial\Phi}{\partial(m_{,K})} - U^{(j)}_K,\ \mathcal{J}_K = -\frac{\partial\Phi}{\partial E_K} - U^{(\mathcal{J})}_K,\\
&\mathbf{U} = \left[\mathbf{U}^{(T)}, U^{(\eta)}, U^{(m)}, \mathbf{U}^{(M)}, \mathbf{U}^{(Q)}, \mathbf{U}^{(j)}, \mathbf{U}^{(\mathcal{J})}\right]\\
&\dot{E}_{KL}U^{(T)}_{KL} + \dot{\Theta}U^{(\eta)} + \dot{c}U^{(m)} + M_K U^{(M)}_K + \Theta_{,K}U^{(Q)}_K + m_{,K}U^{(j)}_K + \mathcal{E}_K U^{(\mathcal{J})}_K = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

W naszych rozważaniach ograniczymy się do liniowych równań konstytutywnych. Żądanie to określa postać funkcji ψ i Φ.

Przyjmujemy

$$\begin{aligned}
&\psi = \frac{1}{2}C_{ij}w_i w_j, \qquad i,j = 1,2,\ldots,11, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{0},\\
&p = D_{ij}Y_i Y_j, \qquad \Phi = \int_0^1 D_{ij}\lambda Y_i Y_j d\lambda, \qquad i,j = 1,2,\ldots,20.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Uwzględniając w powyższym (2.8) i (2.9) otrzymamy następujące relacje

$$\begin{aligned}
\psi = {}&\frac{1}{2}C^{(E)}_{KLMN}E_{KL}E_{MN} + \frac{1}{2}C^{(\Theta)}\Theta^2 + \frac{1}{2}C^{(c)}c^2 + \frac{1}{2}C^{(B)}_{KL}B_K B_L +\\
&+ C^{(E\Theta)}_{KL}E_{KL}\Theta + C^{(Ec)}_{KL}E_{KL}c + C^{(EB)}_{KLM}E_{KL}B_M + C^{(\Theta c)}c\Theta + C^{(\Theta B)}_K\Theta B_K + C^{(cB)}_K cB_K
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & \frac{1}{2} D^{(E)}_{KLMN} \dot{E}_{KL} \dot{E}_{MN} + \frac{1}{2} D^{(\Theta)} \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} D^{(c)} \dot{c}^2 + \frac{1}{2} C^{(B)}_{KL} \dot{B}_K \dot{B}_L + \\
& + D^{(E\Theta)}_{KL} \dot{E}_{KL} \dot{\Theta} + D^{(Ec)}_{KL} \dot{E}_{KL} \dot{c} + D^{(EB)}_{KLM} \dot{E}_{KL} \dot{B}_M + D^{(\Theta c)} \dot{c} \dot{\Theta} + D^{(\Theta B)}_{K} \dot{\Theta} \dot{B}_K + \\
& + D^{(cB)}_{K} \dot{c} \dot{B}_K + \frac{1}{2} D^{(Q)}_{KL} \Theta_{,K} \Theta_{,L} + \frac{1}{2} D^{(j)}_{KL} m_{,K} m_{,L} + \frac{1}{2} D^{(\mathcal{J})}_{KL} \mathcal{E}_K \mathcal{E}_L,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

gdzie K,L,M,N = 1,2,3.

Tensory określające własności fizyczne materiałów, $\mathbf{C}^{(\cdot)}$, występujące w równaniach (3.7), spełniają następujące warunki:

$$
\begin{aligned}
& C^{(E)}_{KLMN} = C^{(E)}_{MNKL} = C^{(E)}_{NMKL} = C^{(E)}_{LKMN}, \\
& C^{(E\Theta)}_{KL} = C^{(E\Theta)}_{LK}, \quad C^{(EB)}_{KLM} = C^{(EB)}_{LKM}, \quad C^{(Ec)}_{KL} = C^{(Ec)}_{LK}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Podobne warunki symetrii spełniają tensory materiałowe $\mathbf{D}^{(\cdot)}$ występujące we wzorach (3.10).

Związki konstytutywne określające proces otrzymamy podstawiając do wzorów (3.5) odpowiednio pochodne wyrażeń (3.7) i (3.8).

Mamy więc

$$
\begin{aligned}
{}_E T_{KL} = {} & \left(C^{(E)}_{KLMN} + D^{(E)}_{KLMN} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{MN} + \left(C^{(E\Theta)}_{KL} + D^{(E\Theta)}_{KL} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + \\
& + \left(C^{(Ec)}_{KL} + D^{(Ec)}_{KL} \frac{\partial}{\partial t} \right) c + \left(C^{(EB)}_{KLM} + D^{(EB)}_{KLM} \frac{\partial}{\partial t} \right) B_M, \\
-\rho_0 \eta = {} & \left(C^{(E\Theta)}_{KL} + D^{(E\Theta)}_{KL} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{KL} + \left(C^{(\Theta)} + D^{(\Theta)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + \\
& + \left(C^{(\Theta c)} + D^{(\Theta c)} \frac{\partial}{\partial t} \right) c + \left(C^{(\Theta B)}_{K} + D^{(\Theta B)}_{K} \frac{\partial}{\partial t} \right) B_K, \\
\rho_0 m = {} & \left(C^{(Ec)}_{KL} + D^{(Ec)}_{KL} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{KL} + \left(C^{(\Theta c)} + D^{(\Theta c)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + \\
& + \left(C^{(c)} + D^{(c)} \frac{\partial}{\partial t} \right) c + \left(C^{(cB)}_{K} + D^{(cB)}_{K} \frac{\partial}{\partial t} \right) B_K, \\
M_N = {} & \left(C^{(EB)}_{KLN} + D^{(EB)}_{KLN} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{KL} + \left(C^{(\Theta B)}_{N} + D^{(\Theta B)}_{N} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + \\
& + \left(C^{(cB)}_{N} + D^{(cB)}_{N} \frac{\partial}{\partial t} \right) c + \left(C^{(B)}_{N} + D^{(B)}_{N} \frac{\partial}{\partial t} \right) B_N, \\
Q_K = {} & D^{(Q)}_{KL} \Theta_{,L}, j_K = D^{(j)}_{KL} m_{,L}, \mathcal{J}_K = D^{(\mathcal{J})}_{KL} \mathcal{E}_L.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Przytoczony tu układ równań konstytutywnych magnetotermodyfuzji w ośrodku lepkosprężystym może być pomocą przy określaniu problemu brzegowego analizowanych zagadnień.

LITERATURA

1. Edelen D. G.: On the Existence of Symmetry Relations and Dissipation Potential. Arch. Rat. Mech. Anal., **51**, 1973, 218-227.
2. Edelen D. G.: Primitive Thermodynamics: A new Look at the Clausius-Duhem Inequality. Int. J. Eng. Sci., **12**, 1974, 121-141.
3. Eringen A. C., Maugin G. A.: Elektrodynamics of Continua I, II, Springer, New York, 1990.
4. Kubik J.: Thermodiffusion in Viscoelastic Solids. Studia Geotechnica et Mechanica, **8**, 1986, 29-47.
5. Maruszewski B.: Termodynamiczne podstawy magnetotermodyfuzji i elektrotermodyfuzji w ośrodku ciągłym. Rozprawy, Politechnika Poznańska, Poznań 1986.
6. Nowacki W.: Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. PWN, Warszawa 1983.
7. Nowacki W., Olesiak Z.: Termodyfuzja w ciałach stałych. PWN, Warszawa 1991.
8. Pao Y., Hutter K.: Elektrodynamics for Moving Elastic Solids and Viscous Fluids. Proceedings of the IEEE, **63**, 1975, 1011-1021.
9. Parkus H: Magneto - thermoelasticity. Udine 1972, Springer - Verlag, Wien - New York.
10. Praca zbiorowa pod red. J. Stefaniaka: Wpływ pola elektromagnetycznego na termodyfuzję w ośrodku izotropowym. PWN, Warszawa-Poznań 1982.
11. Sypniewska - Kamińska G.: Dynamika materiałów porowatych w polu elektro-magnetycznym. Rozprawa doktorska, Poznań 1997.
12. Wilmański K.: Lagrangean Model of Two-Phase Porous Material. J. Non-Equilib. Thermodyn., **20**, 1995, 51-77.

Abstract

In the paper have been presented physical equations describing the reciprocal interactions of mechanical, thermal, diffusion and elektromagnetic fields in Kelvin - Voigt medium. The paper is based on the Edelen theorem [1]. Also, the linear approximation of the equations has been presented.