ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Jadwiga JĘDRZEJCZYK-KUBIK

JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ ZADAŃ BRZEGOWYCH W LINIOWEJ TEORII TERMOPIEZOELEKTRYCZNOŚCI

Streszczenie. W pracy dowodzi się twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania problemu początkowo – brzegowego w liniowej teorii termopiezopolimerów. Dowód przeprowadza się na podstawie transformaty Laplace'a.

UNIQUENESS OF THE SOLUTION FOR THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF LINEAR THEORY OF THERMOPIEZOELECTRICITY

Summary. In this paper the theorem about uniqueness of the solution of the boundary – initial value problems in linear theory of thermopiezopolymer is proved. The proof is based ou the use of the Laplace transform.

1. Wstęp

W pracy analizuje się problem początkowo – brzegowy opisujący procesy piezoelektryczne w ciele lepkosprężystym. Istotnym zagadnieniem formalnym jest ustalenie warunków jednoznaczności rozwiązań zadań brzegowych, którym poświęcamy pracę. Obszerny przegląd literatury dotyczący aspektu fizycznego zjawiska i matematycznego opisu zagadnień piezoelektrycznych w ciele stałym można znaleźć w pracach [4, 7, 1, 5].

Naszym zadaniem jest przeprowadzenie analizy matematycznej problemu, a mianowicie sformułowanie warunków i wykazanie jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowo-całkowych opisujących zagadnienie.

Podobne problemy zostały postawione i analizowane w pracach [3, 6, 7] i dotyczą zadań brzegowych w piezoelektryczności, termopiezoelektryczności i piezoelektryczności w mikropolarnej termosprężystości.

2. Równania problemu

Rozpatrzmy ciało, które w chwili t zajmuje obszar V, ograniczony powierzchnią regularną A. Niech x oznacza dowolny punkt tego ciała, a (x_1, x_2, x_3) jego współrzędne w ustalonym, kartezjańskim układzie współrzędnych.

Jeżeli $v = v(x, t)$ oznacza dowolną funkcję rzeczywistą, to przez $v_{,j}$, oraz $\dot{v}$ oznaczamy pochodne cząstkowe obliczone odpowiednio ze względu na zmienne przestrzenne i czas, czyli

$$v_{,j} = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad v_{,ij} = \frac{\partial v}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

Weźmy pod uwagę następujący fundamentalny układ równań liniowej teorii piezoelektryczności w ciele lepkosprężystym [4, 1, 7]:

- prawo zachowania energii dla materiałów piezoelektrycznych

$$\rho\left(\dot{U} - R\right) = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - q_{k,k} + \dot{D}_k E_k \tag{2.2}$$

- równanie ruchu

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \tag{2.3}$$

- relację odkształcenie – przemieszczenie

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.4}$$

- równania Maxwella dla piezoelektrycznego ciała

$$D_{i,i} = 0, \quad E_i = -\varphi_{,i} \tag{2.5}$$

- związki konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = &\int_0^t G_{ijkl}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau)\,d\tau - \int_0^t \Phi_{ij}(t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)\,d\tau - \\ &-\int_0^t p_{ijk}(t-\tau)\dot{E}_k(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} D_i(t) = &\int_0^t p_{ijk}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{jk}(\tau)\,d\tau + \\ &+\int_0^t r_i(t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)\,d\tau + \int_0^t w_{ij}(t-\tau)\dot{E}_j(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \rho S(t) &= \int_0^t \Phi_{ij}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^t m(t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t r_i(t-\tau)\dot{E}_i(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$q_i = k_{ij}\Theta_{,j}, \tag{2.9}$$

- równanie przewodnictwa ciepła

$$\rho R - T_0 \rho \dot{S} + q_{i,i} = 0$$

lub (po wyeliminowaniu S i q_i)

$$\begin{aligned} \rho R + \left(k_{ij}\Theta_{,j}\right)_{,i} - T_0 \frac{\partial}{\partial t}\Bigg[&\int_0^t \Phi_{ij}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^t m(t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t r_i(t-\tau)\dot{E}_i(\tau)d\tau \Bigg] = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdzie: u_i – oznacza wektor przemieszczenia, σ_{ij} – tensor naprężenia, ε_{ij} – tensor odkształcenia, E_i – wektor natężenia pola elektrycznego, D_i – wektor indukcji elektrycznej, φ - potencjał elektryczny, S – entropię właściwą, U – energię wewnętrzną właściwą, Θ - przyrost temperatury, T_0 – temperaturę początkową, q_i – strumień ciepła, X_i – wektor sił masowych, R – intensywność źródeł ciepła. Wszystkie wymienione wielkości są funkcjami zmiennej x i t. Ponadto występujące w równaniach (2.2) ÷ (2.10) wielkości ρ, k_{ij} oznaczają gęstość masy i tensor przewodnictwa cieplnego, a indeksy i, j, k, l przyjmują wartości 1, 2, 3.

Funkcje $G_{ijkl} = G_{ijkl}(t)$, $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(t)$, $r_{ijk} = r_{ijk}(t)$, $w_{ij} = w_{ij}(t)$, $r_i = r_i(t)$, $m = m(t)$ są funkcjami relaksacji opisującymi fizyczne własności materiału. Są one klasy $C^1[0, \infty])$, rzędu $0(e^{s_0 t})$ i spełniają warunki:

$$\begin{gathered} G_{ijkl} = G_{klij} = G_{jikl}, \quad r_{ijk} = r_{ikj}, \quad \Phi_{ij} = \Phi_{ji}, \quad w_{ij} = w_{ji} \quad \text{dla} \quad t \in (-\infty, \infty) \\ G_{ijkl}(t) = 0, \quad r_{ijk}(t) = 0, \quad \Phi_{ij}(t) = 0, \quad w_{ij}(t) = 0, \quad r_i(t) = 0, \quad m(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in (-\infty, 0). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Z układem równań (2.3) - (2.7) i (2.10) wiążemy następujące warunki początkowe i brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} u_i &= \tilde{u}_i(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in A_1 \\ \sigma_{ij}n_j &= \tilde{T}_i(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in A_2 \end{aligned}\right\} t>0 \\
&\left.\begin{aligned} \Theta &= \tilde{\Theta}(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in A_3 \\ k_{ij}\Theta_{,i}n_j &= \tilde{q}(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in A_4 \end{aligned}\right\} t>0 \\
&\left.\begin{aligned} \varphi &= \tilde{\varphi}(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in A_5 \\ D_k u_k &= \tilde{D}(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in A_6 \end{aligned}\right\} t>0 \\
&u_i(\mathbf{x},0) = \dot{u}_i(\mathbf{x},0) = \Theta(\mathbf{x},0) = q_i(\mathbf{x},0) = \varphi(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \mathbf{x}\in V,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

gdzie $\tilde{u}_i$, $\tilde{T}_i$, $\tilde{\Theta}$, $\tilde{q}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{D}$ są funkcjami danymi, n_i – normalną zewnętrzną do powierzchni A, natomiast A_i, i = 1,2,...6 są częściami powierzchni A takimi, że

$$
\begin{aligned}
A_i \cup A_2 = A_3 \cup A_4 = A_5 \cup A_6 = A, \\
A_i \cap A_2 = A_3 \cap A_4 = A_5 \cap A_6 = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Określmy klasę funkcji, w której analizować będziemy problem (2.3) - (2.7), (2.10), (2.12). Niech $v(x,t)$ będzie funkcją zdefiniowaną w $\overline{V}\, x\, [0,\infty)$. Rozpatrzmy następujące warunki:

a) $v \in C^1\{\overline{V}\ \mathrm{x}\ [0,\infty]\} \cap C^2\{V\ \mathrm{x}\ [0,\infty)\}$

b) istnieją stałe $s > 0$ $c > 0$ takie, że jeżeli D^m oznacza pochodną cząstkową funkcji $v(x,t)$ rzędu m, to

$$\left|D^m v(\mathbf{x},t)\right| \le c\, e^{st} \quad x\in V, \quad 0 \le t < \infty, \quad m = 0,1,2\,.$$

Oznaczmy przez F klasę funkcji utworzoną przez funkcje wektorowe $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{E}$ i skalarne Θ taką, że każda z tych funkcji spełnia warunek a i b.

3. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań

W punkcie tym określimy warunki zapewniające jednoznaczność rozwiązań w liniowej termopiezoelektryczności lepkosprężystej. Załóżmy, że

1) spełnione są warunki (2.11) dotyczące funkcji materiałowych,

2) k_{ij} oraz $w_{ij}(0)$ są macierzami dodatnio określonymi,

3) dla każdego tensora symetrycznego $\gamma_{ij} \neq 0$ $G_{ijkl}(0)\gamma_{ij}\gamma_{kl} > 0$,

4) $|r_i(0)|^2 \leq m(0)\lambda$ gdzie λ jest najmniejszą dodatnią wartością własną macierzy $w_{ij}(0)$.

Wówczas problem (2.3) - (2.7), (2.10), (2.12) ma co najwyżej jedno rozwiązanie w klasie funkcji F.

Przypuśćmy, że funkcje „dane" w problemie brzegowym są identycznie równe zero, tzn.:

$$\begin{aligned} &X(x,t)=0, && R(x,t)=0,\\ &\tilde{u}(x,t)=0, && \tilde{T}(x,t)=0,\\ &\tilde{\Theta}(x,t)=0, && q(x,t)=0,\\ &\tilde{\varphi}(x,t)=0, && \tilde{D}(x,t)=0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Niech ($\boldsymbol{u}$, Θ, $\boldsymbol{E}$) będzie rozwiązaniem problemu (2.3) - (2.7), (2.10) z warunkami początkowymi (2.12) i brzegowymi (3.1). Wykażemy, że $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $\Theta=0$, $\mathbf{E}=\mathbf{0}$.

Oznaczmy przez $\bar{f}(x,p)$ transformatę Laplace'a funkcji $f(x,t)$

$$\bar{f}(x,p)=\int_0^{\infty} f(x,t)e^{-pt}dt.$$

Z równań (2.3) - (2.7), (2.10) i (3.1) mamy:

$$\frac{k_{ij}}{T_0}\overline{\Theta}_{,ij} - p^2\overline{\Phi}_{ij}\overline{\varepsilon}_{ij} - p^2\overline{m}\overline{\Theta} - p^2\overline{r}_i\overline{E}_i = 0, \tag{3.2}$$

$$\overline{D}_k = p\,\overline{p}_{ijk}\overline{\varepsilon}_{ij} + p\,\overline{r}_k\overline{\Theta} + p\,\overline{w}_{kj}\overline{E}_j, \tag{3.3}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = p\,\overline{G}_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{kl} - p\,\overline{\Phi}_{ij}\overline{\Theta} - p\,\overline{p}_{ijk}\overline{E}_k, \tag{3.4}$$

$$\overline{\sigma}_{ij,j} = \rho\, p^2\overline{u}_i, \tag{3.5}$$

$$\overline{D}_{i,i} = 0 \quad \overline{E}_i = -\overline{\varphi}_{,i}, \tag{3.6}$$

$$\int_A \overline{\sigma}_{ij}n_j\overline{u}_i dA = 0, \tag{3.7}$$

$$\int_A k_{ij}\overline{\Theta}\ \overline{\Theta}_{,j}n_i dA = 0, \tag{3.8}$$

$$\int_A \overline{\varphi}\ \overline{D}_{,j}n_j dA = 0. \tag{3.9}$$

Całkując przez części równanie (3.7) i uwzględniając (3.5) i (3.4) otrzymamy:

$$\int_V \left[\rho\, p^2\overline{u}_i\overline{u}_i + p\overline{G}_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{ij}\overline{\varepsilon}_{kl} - p\overline{\Phi}_{ij}\overline{\Theta}\overline{\varepsilon}_{ij} - p\,\overline{p}_{ijk}\overline{E}_k\overline{\varepsilon}_{ij}\right]dV = 0. \tag{3.10}$$

Jeżeli równanie (3.2) scałkujemy po obszarze V i wykorzystamy zależność (3.8), dostaniemy:

$$\int_V \left[\frac{k_{ij}}{T_0} \overline{\Theta}_{,i} \overline{\Theta}_{,j} + p^2 \overline{\Phi}_{ij} \overline{\varepsilon}_{ij} \overline{\Theta} + p^2 \overline{m} (\overline{\Theta})^2 + p^2 \overline{r}_i \overline{E}_i \overline{\Theta} \right] dV = 0. \tag{3.11}$$

Mnożąc (3.3) przez $\overline{E}_k$, całkując po V i wykorzystując (3.9) i (3.6) mamy:

$$-p \int_V \overline{p}_{ijk} \overline{\varepsilon}_{ij} \overline{E}_k \, dV = \int_V \left[p\, \overline{r}_i \overline{\Theta}\, \overline{E}_i + p\, \overline{w}_{ij} \overline{E}_i \overline{E}_j \right] dV. \tag{3.12}$$

Dodając stronami równania (3.10), (3.11) i (3.12) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_V \Big\{ & \rho\, p^2 \overline{u}_i \overline{u}_i + \frac{k_{ij}}{T_0 p} \overline{\Theta}_{,i} \overline{\Theta}_{,j} + p\, \overline{G}_{ijkl} \overline{\varepsilon}_{kl} \overline{\varepsilon}_{ij} + \\ & + p \left[\overline{m} (\overline{\Theta})^2 + 2 \overline{r}_i \overline{\Theta}\, \overline{E}_k + \overline{w}_{ij} \overline{E}_i \overline{E}_k \right] \Big\} dV = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Rozpatrzmy rzeczywiste wartości p takie, że $p > p_0 = \max(s, s_0)$.

Wykorzystując podstawowe własności transformat Laplace'a (por.[8]) otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\lim_{p \to \infty} p\, \overline{G}_{ijkl} = G_{ijkl}(0), && \lim_{p \to \infty} p\, \overline{m} = (0), \\ &\lim_{p \to \infty} p\, \overline{r}_i = r_i(0), && \lim_{p \to \infty} p\, \overline{w}_{ij} = w_{ij}(0). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Zgodnie z wynikami z [1] nierówność

$$B(\alpha, \beta_i) = m(0)\alpha^2 + 2 r_i(0) \alpha \beta_i + w_{ij}(0) \beta_i \beta_j > 0 \tag{3.15}$$

jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych $\alpha \neq 0$, $\beta_i \neq 0$, jeżeli współczynniki *m (0)*, $r_i(0)$, $w_{ij}(0)$, i,j = 1,2,3 spełniają założenia 2 i 4.

Biorąc pod uwagę (3.15) i (3.14) oraz założenia 2 i 4 dowodzonego twierdzenia z (3.13) wynika, że

$$\overline{\mathbf{u}} = 0, \quad \overline{\Theta} = 0, \quad \overline{\mathbf{E}} = 0$$

dla dostatecznie dużych, rzeczywistych $p > p_0$.

Stąd i z własności przekształcenia Laplace'a [8] mamy:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \Theta(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

co należało wykazać.

LITERATURA

1. Chandrasekharaiah D.S.: A Generalized Linear Thermoelasticity Theory for Piezoelectric Media, Acta Mechanica, **7**, 1988, 39 – 49.
2. Christensen R.M.: Theory of Viscoelasticity, Academic Press, New York, London 1971.
3. Crăciun I.: Boundary – Initial – Value Problems and Reciprocity Relations in Linear Theory of Piezoelectric Micropolar Thermoelasticity, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér. Sci. Techn, **42**, 1994, 369 – 379.
4. Eringen A.C., Maugin G.A.: Electrodynamics of Continua I, II, Springer, New York 1990.
5. Hilczer B., Małecki J.: Elektrety i piezopolimery, PWN, Warszawa 1992.
6. Ieşan D.: Reciprocity, Uniqueness and Minimum Principles in the Linear Theory of Piezoelectricity, Int.J.Engng.Sci., **28**, 1990, 1139 – 1149.
7. Nowacki W.: Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. PWN, Warszawa 1983.
8. Widder D.V.: The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton 1946.

Abstract

In this paper a system of differential integral equations describing the problem of piezoelectricity in a deforming viscoelastic body has been analysed. Based upon the method of the Laplace transform a proof of the uniqueness theorem has been given.