

Stanisław KEMPNY

## ŁAWA W KONTAKCIE Z PÓŁPRZESTRZENIĄ SPRĘŻYSTO- PLASTYCZNĄ Z JEDNOSTRONNYMI WIĘZAMI NA MODELU PŁASKIM

**Streszczenie.** Posługując się modelem półpłaszczyzny sprężystej, poddanej działaniu określonych sił kontaktowych oraz np. wpływów górniczych, łatwo wyznaczyć w niej podobszary, w których przyjęty warunek plastyczności nie jest spełniony. Można wówczas w półpłaszczyźnie wyróżnić trzy typy podobszarów: typ sprężysty, sprężysto-plastyczny i typ podobszarów degradacji (rozluźnienia i spękań). W pracy opisano te trzy typy podobszarów.

## THE LONG STRIP FOUNDATION IN THE CONTACT WITH A ELASTIC PLASTIC HALF PLANE WITH UNILATERAL CONSTRAINS IN THE PLANE MODEL

**Summary.** Using the model of the elastic half-plane, subjected to the defined contact forces and for example mining influences, it is possible to find in it some subdomains, in which accepted condition of plasticity is not satisfied. Then it is possible to distinguish three types of subdomains: the elastic, plastic and the degradation (loosing, fracture) ones. These types of subdomains were described in the paper.

### 1. Wstęp

Poszukuje się rozkładu sił kontaktowych pomiędzy ławą a półprzestrzenią w kierunku poprzecznym ławy fundamentowej obciążonej siłami przejmowanymi z nadbudowy. Sztywność ławy fundamentowej w jej kierunku poprzecznym jest na ogół tak znaczna, że można ławę uznać za nieodkształcalną w tym kierunku. Model podłoża stanowi półprzestrzeń sprężysto-plastyczna z jednostronnymi więzami. Dla prostoty przyjęto stały rozkład sił kontaktowych w kierunku podłużnym ławy. Pozwoliło to na sformułowanie „jako płaskiego” zagadnienia wci-

skania ławy w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną. W niniejszej pracy podjęto próbę modelowania zagadnień brzegowych, z którymi możemy mieć do czynienia w rozpatrywanym zadaniu kontaktowym.

## 2. Obszary uplastycznienia półpłaszczyzny

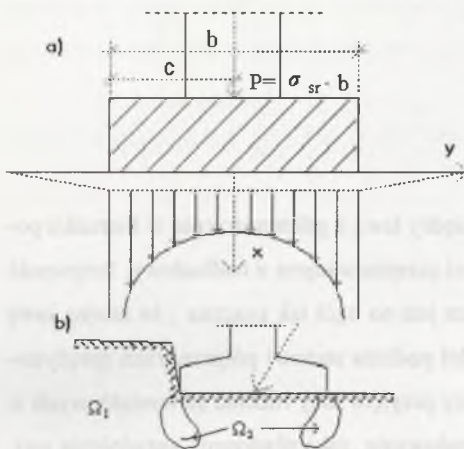
Przyjęto, że w przekrojach dostatecznie odległych od końców ławy przy małym początkowym obciążeniu teoretyczny rozkład sił kontaktowych jest bliski rozkładowi znanemu z zagadnienia stempla wciskanego w półprzestrzeń rys.1a [4]. Siły kontaktowe na krawędziach ławy dążą do nieskończoności zgodnie z równaniem:

$$q(y) = \frac{P}{\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2}} \quad (1)$$

W przypadku mimośrodowego (w granicach rdzenia) wciskania stempla można posłużyć się wzorem [3]:

$$q(y) = \frac{P \cdot (A \cdot y + B)}{\pi \cdot \sqrt{(b+y) \cdot (c-y)}},$$

gdzie 
$$A = \frac{4 \cdot (b-c)}{5 \cdot b^2 + 2 \cdot b \cdot c + 5 \cdot c^2}, \quad B = \frac{3 \cdot (b+c)^2}{5 \cdot b^2 + 2 \cdot b \cdot c + 5 \cdot c^2}.$$



Rys.1.

W pewnym obszarze przy krawędziach ławy półpłaszczyzna ulega uplastycznieniu. Zasięg tych obszarów uplastycznienia dla obciążenia brzegowymi siłami kontaktowymi (1) można wyznaczyć wstawiając do określonego warunku plastyczności naprężenia wyrażone następującymi wzorami całkowymi:

$$\underline{\sigma} = \int_{\partial\Omega^-} \underline{\zeta}(x, y, \underline{P}(s)) \cdot \underline{q}(s) \cdot ds, \quad (2)$$

gdzie:  $\underline{\sigma}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau\}$  - tensor naprężenia w zapisie wektorowym,

$$\underline{\zeta}(x, y) = \frac{2}{\pi \cdot r_o^4} \cdot \begin{bmatrix} x^3 & x^2 \cdot y \\ x \cdot y^2 & y^3 \\ x^2 \cdot y & x \cdot y^2 \end{bmatrix},$$

$$r_o^2 = x^2 + y^2$$

$\underline{q}(s)^T = \{q_x(s), q_y(s)\}$  jest obciążeniem krawędzi półpłaszczyzny.

Macierz  $\underline{\zeta}(x, y, \underline{P}(s))$  można otrzymać z  $\underline{\zeta}(x, y)$ , wstawiając zamiast  $x \leftarrow x - \xi$ ,  $y \leftarrow y - \eta$ , gdzie  $\xi$  i  $\eta$  są współrzędnymi punktu na krawędzi półpłaszczyzny, określonego współrzędną  $s$ .

W pracy autora [2] wyznaczono podobszary półpłaszczyzny obciążonej między innymi siłami kontaktowymi (1), w których warunek plastyczności Coulomba-Mohra nie jest spełniony. Rozległość i kształty tych podobszarów są zależne między innymi od wielkości obciążenia. Przy niewielkim obciążeniu i założeniu zerowych wartości składowych stycznych sił kontaktowych podobszary uplastycznienia są małe w porównaniu z wymiarami przekroju poprzecznego ławy, np. z jej szerokością i można wówczas całą półpłaszczyznę traktować jako płaszczyznę sprężystą. Przy znacznym obciążeniu składowe styczne sił kontaktowych nie mogą już być równe zero. W związku z tym przyjęto w całej półpłaszczyźnie naprężenia wyrażone siłami kontaktowymi pomiędzy ławą a półprzestrzenią, tj. pionowymi siłami w pionowych więzach jednostronnych i poziomymi siłami w poziomych więzach dwustronnych o ograniczonej nośności wg relacji (2). Naprężenia w postaci (2) są szczególną całką różniczkowych równań równowagi ( $\sigma_{x,x} + \tau_{y,x} = 0$ ,  $\sigma_{y,y} + \tau_{x,y} = 0$ ), stąd rozwiązanie zagadnienia: dla określonego wektora sił kontaktowych  $\{q_{x_0}(y), q_{y_0}(y)\}$  wyznaczyć nowy wektor  $\{q_x, q_y\}$ , spełniający następujące warunki:

$$\begin{aligned} 1) f_p(\underline{\sigma}) &\leq 0, & 3) q_{y_0} \cdot b &= \int_0^b q_x \cdot dy, \\ 2) \underline{\sigma} &= \int_0^b \underline{\zeta} \cdot \underline{q} \cdot d\eta, & 4) H &= \int_0^b q_y \cdot dy, \end{aligned} \quad (3)$$

jest przybliżonym rozwiązaniem zagadnienia wciskania ławy w półprzestrzeń sprężysto - plastyczną. Warunek (3<sub>1</sub>) jest przyjętym do obliczeń warunkiem idealnej plastyczności Coulomba-Mohra. Są to zadania programowania nieliniowego.

Statycznie dopuszczalne pole naprężeń  $\underline{\sigma}$  (2) spełnia: równania równowagi wewnętrznej w całej półpłaszczyźnie, warunki brzegowe na granicy obszarów sprężystej i plastycznej pracy półpłaszczyzny, a także na jej brzegach ( $x=0$ ,  $x \rightarrow \infty$ ), nie przekracza warunku plastyczności,  $f_p(\underline{\sigma}) \leq 0$ . Tak postawione zagadnienie stanowi o bezpiecznej ocenie wyznaczonego wektora sił kontaktowych przy poszukiwaniu  $\max q_{sr}$  dla ustalonej wartości  $H$  lub  $\max H$  przy ustalonej wartości  $q_{sr}$ .

Wykorzystując MES lub MRS dla określonego podziału ławy na części można naprężenia  $\underline{\sigma}$ , w każdym punkcie półpłaszczyzny sprężysto - plastycznej przedstawić równaniem macierzowym:

$$\underline{\sigma} = A \left\{ \begin{matrix} q_x \\ q_y \end{matrix} \right\}^T,$$

gdzie  $A$  jest macierzą liczbową,  $q_x$  i  $q_y$  - wektorami wartości sił kontaktowych w punktach podziału. Pozwala to na linearyzację nierówności (3<sub>1</sub>) wg relacji

$$f_p(\underline{\sigma}) + \frac{df_p}{d\underline{\sigma}} \cdot \delta \underline{\sigma} \leq 0.$$

Niezależnie powinny być spełnione nierówności:

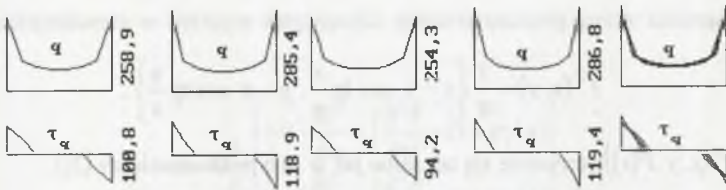
$$\begin{aligned} q_x + \delta q_x &\geq 0, \\ |q_y + \delta q_y| &\leq (q_x + \delta q_x) \cdot \operatorname{tg} \varphi + c, \end{aligned}$$

(pionowe siły kontaktowe nie mogą być rozciągające, a siły styczne, powinny spełniać warunek poślizgu) w każdym punkcie podziału ławy.

### Przykład

Rozpatrzono ławę fundamentową o szerokości 1,5 m, obciążoną pionowymi siłami kontaktowymi o  $q_{sr} = 0,11 \text{ MPa}$  przy  $q_y=0$ ,  $\varphi=20^\circ$ ,  $c=19 \text{ kPa}$ . Na rys.2 pokazano otrzymane rozkłady sił kontaktowych dla podziału ławy na 7 - 14 części z dokładnością do 5% w stosunku do wypadkowej sił kontaktowych  $q_{sr} \cdot b = \text{const}$ . Na ostatnim rysunku nałożono otrzymane rozkłady w tej samej skali [2].





Rys. 2

Do utworzenia macierzy (2<sub>2</sub>) zamiast wzorów Flamanta i Cerrutiego można wykorzystać odpowiednio przekształcone wzory Boussinesq'a i Cerrutiego dla półprzestrzeni [2, 4]. Pierwsza i druga kolumna analogicznej do (2<sub>2</sub>) macierzy przyjmują wówczas postać:

$$\frac{q(y) \cdot a}{\pi} \cdot \left\{ \frac{x^3 \cdot (3 \cdot r^2 - a^2)}{r^3 \cdot r_0^4} \quad \frac{x \cdot y^2 \cdot (3 \cdot r^2 - a^2)}{r^3 \cdot r_0^4} - (1 - 2 \cdot \nu) \frac{r - x}{r \cdot (a^2 + y^2)} \quad \frac{x^2 \cdot y \cdot (3 \cdot r^2 - a^2)}{r^3 \cdot r_0^4} \right\}^T,$$

$$\frac{q(y) \cdot a \cdot y}{\pi \cdot r} \cdot \left\{ \frac{x^2 \cdot (3 \cdot r^2 - a^2)}{r^2 \cdot r_0^4} \quad \frac{y^2 \cdot (3 \cdot r^2 - a^2)}{r^2 \cdot r_0^4} - (1 - 2 \cdot \nu) \frac{(r - x)^2}{(a^2 + y^2)^2} \quad \frac{x \cdot y \cdot (3 \cdot r^2 - a^2)}{r^2 \cdot r_0^4} \right\}^T,$$

gdzie:  $a = \frac{l}{2}$  - połowa długości ławy

$$r^2 = x^2 + y^2 + a^2, \quad r_0^2 = x^2 + y^2.$$

Utworzona z tych kolumn macierz 3/2 w granicy, przy  $a$  dążącym do nieskończoności, prowadzi do macierzy (2<sub>2</sub>) utworzonej z wzorów Flamanta i Cerrutiego.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \text{Bous. } \zeta \right) \rightarrow \text{Flamanta } \zeta$$

### 3. Półpłaszczyzna w sprężysto-plastycznym zakresie pracy

Można zauważyć, że dla naprężeń w postaci (2) w obszarze sprężystym  $\Omega_1$  (rys.1b) półpłaszczyzny istnieje funkcja naprężeń Airy'ego

$$F(x, y) = \int_{\partial \Omega_1} f^T(x, y, P(s)) \cdot q(s) \cdot ds,$$

gdzie wektor

$$f^T(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ x - y \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}, y - x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right\},$$

a wektor  $f^T(x, y, P(s))$  otrzymuje się tak samo jak w przypadku macierzy (2<sub>2</sub>).

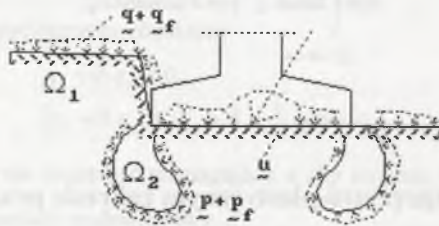
Funkcja ta spełnia równanie biharmoniczne

$$\nabla^4 F = 0$$

i można nią wyrazić naprężenia znanymi wzorami [1],

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \end{bmatrix},$$

a po obliczeniu pochodnych funkcji naprężeń i odpowiedniej modyfikacji koniecznej ze względu na przedstawienie w (2) tensora naprężenia w postaci wektora, a nie macierzy jw.-wzorami (2). Posługując się więc tym przedstawieniem naprężeń, np. przy poszukiwaniu rozkładu sił kontaktowych w kierunku poprzecznym ławy fundamentowej na półprzestrzeni sprężysto-plastycznej, modelujemy w istocie półprzestrzeń półnieskończoną tarczą. Pełni ona w rozpatrywanym tu zagadnieniu rolę nazwaną tak za Andermannem [1] „tarczy macierzystej”, za pomocą której można opisać stan naprężenia w podobzarze sprężystym  $\Omega_1$  półpłaszczyzny w sprężysto-plastycznym zakresie pracy (rys.1b).



Rys.3

Stan naprężenia w podobzarze sprężystym jest wówczas określony fikcyjnym obciążeniem, które łącznie z obciążeniem danym pochodzącym od płaskiego nieodkształcalnego stempla oraz siłami brzegowymi na granicy obszarów sprężystego i sprężysto-plastycznych czyni zadość naprężeniowym warunkom brzegowym (rys.3).

Stan odkształcenia w obszarze sprężystości półnieskończonej tarczy można opisać wzorami:

$$\underline{u} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} -v \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot dx + \varphi_1(y) \\ -v \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot dy + \varphi_2(x) \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

W podobozarach sprężysto-plastycznych powinny być spełnione: bądź równość w warunku plastyczności i równania równowagi, bądź, gdy zachodzi równość w warunku plastyczności, można ten podobzdar potraktować jak ciało z jednostronnymi więzami wewnętrznymi i wówczas komplementarna praca naprężeń, które mogą w tych więzach jednostronnych wystąpić, na możliwych w nich odkształceniach, w każdym punkcie tego podobzaru jest równa zeru :

$$\left( \{ \partial_{,i} \partial_{,j} \} \cdot \underline{\sigma}^T \right)^T = \left( \nabla \cdot \underline{\sigma}^T \right)^T = \begin{Bmatrix} \gamma - \gamma_w \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ k \\ \gamma_w \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ k \end{Bmatrix},$$

$$f_p(\underline{\sigma}) \leq 0, \quad (5)$$

$$\forall P \in \Omega_2 : tr(\delta \underline{\sigma}^T(P) \cdot \underline{\varepsilon}(P)) = 0.$$

Oznaczenia:

$\gamma$  - ciężar objętościowy gruntu,

$\gamma_w$  - ciężar wody,

$k$  - współczynnik filtracji.

Odształcenia w tych podobozarach sprężysto-plastycznej pracy  $\Omega_2$  narastają [5]

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_{-e} + \underline{\varepsilon}_{-p} + d\underline{\varepsilon},$$

gdzie

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}_{-e} + d\underline{\varepsilon}_{-p} = d\underline{\varepsilon}_{-e} + d\lambda \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}}, \quad (6)$$

$$d\underline{\varepsilon}_{-e} = \frac{1-2 \cdot v}{3 \cdot E} \cdot (tr d\underline{\sigma}) \cdot \underline{I} + \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot d\underline{\sigma}',$$

$$d\underline{\sigma}' = d\underline{\sigma} - \frac{1}{3} \cdot (tr d\underline{\sigma}) \cdot \underline{I},$$

$$d\lambda \geq 0.$$

$I$  jest macierzą jednostkową, dopóty, dopóki zachodzi równość w relacji

$$f_p(\underline{\sigma} + d\underline{\sigma}) = \text{tr} \left( \frac{\partial f_p^T}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} \right) \leq 0. \quad (7)$$

Przyjęto przy tym, że w procesie odkształcenia zmiany objętości mogą być wyłącznie sprężyste

$$\text{tr } d\underline{\varepsilon} = \frac{1-2 \cdot \nu}{E} \cdot \text{tr } d\underline{\sigma}. \quad (8)$$

Wynika stąd, że

$$\text{tr } d\underline{\varepsilon}_{-p} = d\lambda \cdot \text{tr} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} = 0.$$

W przypadku warunku plastyczności Coulomba-Mohra postaci

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sin \varphi + 2 \cdot c \cdot \cos \varphi \quad (9)$$

i płaskiego stanu naprężenia

$$\text{tr} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} = -2 \cdot \sin \varphi \neq 0.$$

Dla zachowania warunku odwracalności odkształceń objętościowych należałoby w tym przypadku przyjąć, że wg prawa (6<sub>1</sub>) zachodzi zmiana jedynie plastycznych składowych odkształceń postaciowych tensora przyrostu odkształcenia. Byłoby to równoznaczne z przyjęciem tzw. niestowarzyszonego prawa płynięcia ([6] str.36). Teoretycznie możliwe są: modyfikacja kryterium Coulomba-Mohra, zapewniająca odwracalność odkształceń objętościowych bądź dopuszczenie nieodwracalności odkształceń objętościowych z oceną wpływu zaniechania utrzymania tego wymagania na pracę półprzestrzeni w zakresie sprężysto-plastycznym.

Moc dysypowana wynosi:

$$W = \int_{\Sigma \Omega_t} \text{tr} \left( \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\varepsilon}_{-p} \right) \cdot dV > 0.$$

#### 4. Podobszary degradacji

Grunt w podobszarach rozluźnienia i wypierania go spod fundamentu wpływać może na stan naprężenia i odkształcenia w podobszarach sprężystej oraz sprężysto - plastycznej pracy



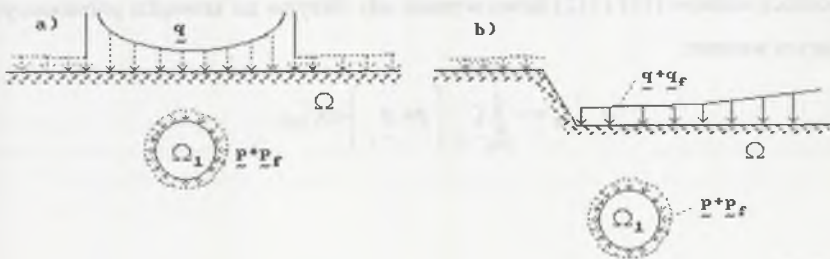
jedynie swoim ciężarem. W przypadku ośrodka sypkiego, nie przenoszącego naprężeń rozciągających, można go w każdym podobzarsze traktować jak ciało z jednostronnymi więzami. Podobzary degradacji i wypierania w rozpatrywanym zagadnieniu płaskim są określone układem nierówności:

$$\begin{aligned} -\sigma_r &\geq 0, \\ -\det \sigma &\geq 0. \end{aligned}$$

Powinny być w nich spełnione równania równowagi (5<sub>1</sub>).

## 5. Fikcyjne obciążenie brzegowe

Fikcyjne obciążenia brzegowe podobzaru sprężystości występują na krawędzi półnieskończonej tarczy, a także na granicach podobzaru sprężystości i podobzaru plastyczności. Można je wyznaczyć z układów równań całkowych. Prześledzimy to na przykładzie półnie



Rys.4

skończonej tarczy z otworem (rys.4). Dane obciążenie krawędzi i otworu oznaczono  $q$  i  $p$ , a obciążenie fikcyjne  $q_f$  i  $p_f$ . Naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej wywołane otworem oraz ewentualnym dodatkowym obciążeniem naziomu przyjmują postać:

$$\sigma = \int_{\partial\Omega} \zeta \cdot \begin{pmatrix} q+q_f \\ - \\ -f \end{pmatrix} \cdot ds + \int_{\partial\Omega_1} \zeta \cdot \begin{pmatrix} p+p_f \\ - \\ -f \end{pmatrix} \cdot ds, \quad (10)$$

gdzie  $p = \gamma \cdot x \cdot \text{diag}\{1, k\} \cdot n$ ,  $\zeta$  jest macierzą postaci (4.3), a  $p$  i  $q$  - fikcyjnymi siłami brzegowymi.

Równania wiążące tensor naprężenia i składowe sił brzegowych za pośrednictwem wektora normalnej zewnętrznej do brzegu mają postać:

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{bmatrix} \Big|_{\partial\Omega(\cdot)} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Tensor naprężenia ma tu postać macierzy w odróżnieniu od jego wektorowej postaci w (10). Wykorzystując odpowiednie wiersze macierzy (2<sub>2</sub>) można go zapisać utrzymując tę macierzową jego postać

$$\underline{\sigma} = \left[ \sum_{\partial\Omega(\cdot)} \int_{-13} \zeta \cdot (\cdot) \cdot ds_{(\cdot)} \quad \sum_{\partial\Omega(\cdot)} \int_{-32} \zeta \cdot (\cdot) \cdot ds_{(\cdot)} \right]. \quad (12)$$

Wskaźniki (13 i 32) wskazują na wybrane z macierzy (2<sub>2</sub>) wiersze, tworzące kwadratowe macierze  $\zeta_{-13}$  i  $\zeta_{-32}$ . Sumowanie przeprowadzono po krawędzi półpłaszczyzny i brzegu otworu (krawędziach półpłaszczyzny i brzegach otworów). W nawiasach jest miejsce na siły odpowiadające brzegom i oznaczenia krawędzi lub brzegu.

Za pomocą wzorów (11) i (12) łatwo wyrazić siły fikcyjne na krawędzi półpłaszczyzny następującym wzorem:

$$\underline{q}_{-f} \Big|_{\partial\Omega} = - \int_{\partial\Omega} \zeta_{-13} \begin{pmatrix} p + p \\ - \quad - \end{pmatrix} \cdot ds_1 \Big|_{\partial\Omega}.$$

## LITERATURA

1. Andermann F.: Tarcze prostokątne. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1966
2. Kempny S.: Rozkład naprężeń w kierunku poprzecznym ławy fundamentowej na półprze-strzeni sprężysto-plastycznej, XLII Konferencja Naukowa KILIW PAN I KN PZITB, Kraków-Krynica 1996
3. Kisiel I, Lysik B. : Zarys reologii gruntów. „Arkady”, Warszawa 1966
4. Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970
5. Praca zbiorowa: Duality and complementarity in mechanics of solids. Wyd. PAN, Wrocław Warszawa Kraków Gdańsk 1979
6. Sawczuk A.: Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych. PWN, Warszawa 1982.

**Abstract**

On a model of the half plain disk of arbitrary edge configuration, the contact problem of long strip pushed into elastic-plastic half plain with unilateral constrains was analysed.

Elastic subdomain of the half plain disk was described using concept of the primary disk. In the plastic domains the incremental description was applied.

In the degradation range – dislodging of soil from under the long strip, requirement of positively definite matrix, represented the stress tensor was accepted.