

Tomasz KRYKOWSKI

## ZASTOSOWANIE HYBRYDOWEJ MES DO WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH W PRZESTRZENNYCH PRĘTOWYCH ELEMENTACH KOMPOZYTOWYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono hybrydową metodę wyznaczania naprężeń stycznych w warstwowym przestrzennym elemencie warstwowym, bazującym na modelu Eulera - Bernouliego. Przeprowadzona została wyczerpująca analiza numeryczna oraz analiza wyników związana z liczbą elementów skończonych

## THE APPLICATION OF THE HYBRID MES METHOD IN THE SPACE COMPOSITE BEAMS

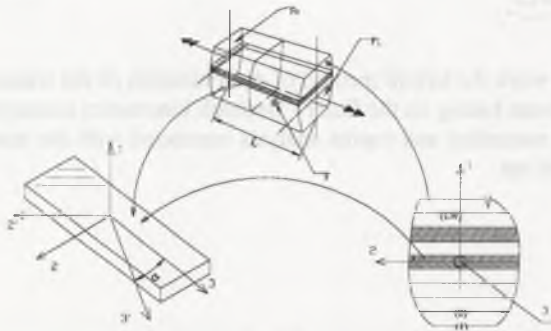
**Summary.** In this work the hybrid method of determination of the transient stresses in the layer space finite element basing on the Euler - Bernouli kinematics assumption has been presented. The detailed numerical and results analysis connected with the number of finite elements has been carried out.

### 1. Wstęp

Analiza naprężeń stycznych w prętowych konstrukcjach kompozytowych, traktowanych jako modele Eulera - Bernouliego, związana jest z występowaniem czystego skręcania oraz sprzężeń generowanych w wyniku zginania w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni zbrojenia. Stany te mogą być traktowane w analizie jako superpozycja czystego skręcania oraz stanu sprzężeń, który występuje w sytuacji kąтового ułożenia warstw. W tej pracy przedstawiono metodę hybrydową, polegającą na analizie skręcania za pomocą funkcji naprężeń oraz zastosowaniu przemieszczeniowego modelu MES do analizy sprzężeń. W pracy podano pełną analizę wyników numerycznych, które porównywane były z istniejącymi rozwiązaniami analitycznymi oraz z rozwiązaniami otrzymanymi w wyniku analizy zagadnienia programem ANSYS.

## 2. Podstawowe równania

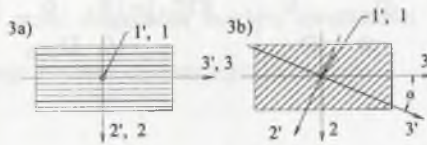
Analizować będziemy element prętowy modelowany ciałem niejednorodnym, o osi prostej, niezakrzywionej. Przyjmujemy, że z konfiguracją początkową ciała związany jest obszar  ${}^0V = {}^0F_0 \times (0, L)$ , gdzie  ${}^0F_0 \subset \mathbb{R}^2$  jest powierzchnią przekroju pręta w chwili początkowej. Przyjmujemy, że  ${}^0F_0$  jest obszarem jednospójnym, lecz złożonym z podobszarów rozłącznych  ${}^0\Omega_i$  takich, że:  ${}^0F_0 = \bigcup_{i=1}^{Lw} {}^0\Omega_i$ ,  $\exists_{i \neq j} {}^0\Omega_i \cap {}^0\Omega_j = \emptyset$ ,  $i, j \in (0, 1, \dots, Lw)$ . Podobszary  ${}^0\Omega_i$  reprezentować będą pola powierzchni przekroju lamin, składające się na obszar  ${}^0F_0$  por. rys. 1. Brzegiem obszaru pręta w konfiguracji początkowej będzie obszar  ${}^0\partial V = ({}^0F_0 \times \{0\}) \cup ({}^0\partial F_0 \times (0, L)) \cup ({}^0F_L \times \{L\})$ . Przyjmujemy, że obszar  ${}^0V$  parametryzowany jest współrzędnymi ortonormalnymi  $\mathbf{E}_i$ . Rozważania ograniczymy do przypadku teorii liniowej geometrycznie i fizycznie.



Rys. 1

Analizując pręt kompozytowy będziemy przyjmować, że w każdym punkcie osi pręta w konfiguracji początkowej  ${}^0V$  zdefiniujemy dwie bazy ortonormalne, por. rys. 2:

- bazę  $\mathbf{E}_i$ ,  $i \in (1, 2, 3)$  o składowych zdefiniowanych przez reper osi pręta,
- bazę  $\mathbf{E}'_i$ ,  $i \in (1, 2, 3)$  zdefiniowaną w płaszczyźnie  $Ox'_2 x'_3$  i wyznaczaną przez kierunek zbrojenia kompozytu.



Rys. 2

Będziemy przyjmować, że dla pojedynczej laminy słuszne jest założenie  $\varepsilon_{11} = 0$  (warstwy są sztywne w kierunku osi  $X_1$ ). Po uwzględnieniu tego założenia równanie konstytutywne Hooke'a dla ośrodka niejednorodnego i ortotropowego możemy przedstawić dla konfiguracji osiowej w bazie  $\mathbf{E}_i$  w postaci zależności:

$$\sigma_{i\alpha} = C_{i\alpha j\beta} \varepsilon_{j\beta}; \quad \alpha, \beta = 2, 3 \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

gdzie  $C_{i\alpha j\beta}$  jest tensorem sprężystości materiału po transformacji z bazy  $\mathbf{E}'_i$  do  $\mathbf{E}_i$ , który możemy zapisać w postaci:

$$C_{i\alpha j\beta} = A_{ii} A_{\alpha\alpha'} A_{jj'} A_{\beta\beta'} C_{i'\alpha' j'\beta'}, \quad (2.2)$$

gdzie  $\sigma_{i\alpha}$  jest tensorem naprężenia w dowolnym punkcie obszaru laminy  $[kN/m^2]$  w bazie  $\mathbf{E}_i$ ,  $C_{i\alpha j\beta}$  ( $C_{i'\alpha' j'\beta'}$ ) jest tensorem sprężystości materiału  $[kN/m^2]$  w bazie  $\mathbf{E}_i$  ( $\mathbf{E}'_i$ ) a  $\varepsilon_{j\beta}$  jest tensorem odkształcenia  $[1]$  w bazie  $\mathbf{E}_i$ . Po uwzględnieniu, że tensor naprężenia posiada dla przypadku pręta jedynie trzy niezerowe składowe, możemy związki konstytutywne zapisać po skondensowaniu macierzy sprężystości w postaci:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i3} = \mathbf{D}_{i3j3} \boldsymbol{\varepsilon}_{j3}. \quad (2.3)$$

Tensor sprężystości przedstawimy w dogodnej dla późniejszych rozważań postaci sumy macierzy składowych w postaci:

$$[\mathbf{D}_{i3j3}] = [\mathbf{D}_{i3j3}^A] + [\mathbf{D}_{i3j3}^B]; \quad (2.3)$$

$$[D_{13j3}^A] = \begin{bmatrix} D_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & D_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & D_{3333} \end{bmatrix}; \quad [D_{13j3}^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{2323} \\ 0 & D_{2323} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

### 3. Podstawowe równania

Wychodząc z zasady prac przygotowanych Lagrange'a, możemy zapisać równanie wariacyjne dla prętowych elementów kompozytowych w postaci:

$$\int_0^L \delta [\bar{\epsilon}]_{(1 \times 6)}^T \cdot [\bar{\sigma}]_{(6 \times 1)} \cdot dx = \delta L_w, \quad (3.1)$$

$$[\bar{\sigma}]_{(6 \times 1)}^T = [T_1 \quad T_2 \quad N_3 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3], \quad (3.2)$$

gdzie:

$\delta L_w$  - praca przygotowana sił zewnętrznych,

$[\bar{\sigma}]$  - wektor uogólnionych sił wewnętrznych w elemencie prętowym.

Moment skręcający  $M_3$  dla konstrukcji prętowej po uwzględnieniu związków konstytutywnych (2.3) i (2.4) możemy zapisać w postaci:

$$\{M_3\} = \sum_{i=1}^{Lw} \int_{\Omega_i} [G_s] \cdot \{\sigma\} \cdot d\Omega_i = \sum_{i=1}^{Lw} \int_{\Omega_i} [G_s] \cdot [D_A] \cdot [\epsilon] \cdot d\Omega_i + \sum_{i=1}^{Lw} \int_{\Omega_i} [G_s] \cdot [D_B] \cdot [L] \cdot d\Omega_i \cdot [\bar{\epsilon}] \quad (3.3)$$

$$G_s = \{x_2 \quad -x_1 \quad 0\}. \quad (3.4)$$

### 4. Analiza stanu czystego skręcania de Saint Venanta

Wprowadzając zgodnie z teorią de Saint Venanta zamiast funkcji naprężeń stycznych  $F_0 \ni (x^\alpha) \rightarrow \sigma_{3\alpha}(x^\beta)$  funkcję naprężeń zdefiniowaną w sposób następujący:

$$\sigma_{3\alpha} = (-1)^\beta \cdot G \cdot \theta \cdot F_\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (4.1)$$

oraz uwzględniając równania równowagi lokalnej, warunki ciągłości przemieszczeń i związki konstytutywne określone przez diagonalną macierz sprężystości  $[D_{13j3}^A]$  możemy zapisać część momentu skręcającego pomijającą sprzężenia w postaci:

$$\{M_{SA}\} = 2G \varphi_{3,3} \sum_{i=1}^{Lw} \int_F F(x_\alpha) \cdot dx_1 dx_2 = 2GI_S, \quad (4.2)$$

gdzie

$$I_S = 2G \int_F F(x_\alpha) \cdot dx_1 dx_2. \quad (4.3)$$

Wartości funkcji naprężeń możemy wyliczyć rozwiązując równanie różniczkowe teorii skręcania prętów (por. [1], [2], [3]) postaci:

$$\begin{aligned} [g_1(x^\alpha) \cdot F_{,1}]_{,1} + [g_2(x^\alpha) \cdot F_{,2}]_{,2} &= -2, \quad \forall(x^\alpha) \in F, \quad \forall(x^3) \in (0, L); \\ F(x^\alpha) &= 0, \quad \forall(x^\alpha) \in \partial F, \quad \forall(x^3) \in (0, L); \end{aligned} \quad (4.4)$$

Z równania tego po przekształceniach otrzymujemy końcowe równanie wariacyjne skręcania prętów ortotropowych o strukturze niejednorodnej:

$$\sum_{i=1}^{Lw} \int_F [g_1(x^\alpha) \cdot (\delta F)_{,1} \cdot F_{,1} + g_2(x^\alpha) \cdot \delta F_{,2} \cdot F_{,2}] \cdot dx_1 \cdot dx_2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{Lw} \int_F \delta F \cdot dx^1 \cdot dx^2 \quad (5.2)$$

$$g_\alpha = G/G_\alpha(x^\beta); \quad G = 1.$$

Równanie to rozwiązano używając elementów skończonych trójkątnych 10 - węzłowych o bikubicznych wielomianach interpolacyjnych, por. [5].

## 5. Sformułowanie sprężeń konstrukcji prętowej przy skręcaniu

Wpływ sprężeń uwzględniamy za pomocą drugiego członu równania (3.3). Po wykonaniu całkowania możemy zapisać wyrażenie określające część momentu skręcającego spowodowaną sprężeniami w konstrukcji prętowej w postaci:

$$\{M_{3B}\} = \sum_{i=1}^{Lw} \int_{\frac{b_{z_{k-1}}}{2}}^{\frac{b_{z_k}}{2}} \iint [G_S] \cdot [D_B] \cdot [L] \cdot dx_1 dx_2 \cdot \{\bar{\epsilon}\} = \sum_{i=1}^{Lw} \left( -D_{2'3'3'3'}^B \cdot b \cdot \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \right) \quad (5.1)$$

## 6. Obliczanie naprężeń stycznych w kompozycie

Rozkład naprężeń w przekroju uzyskujemy jako sumę naprężeń generowanych w wyniku skręcania de Saint Venanta i naprężeń generowanych przez sprężenia generowane przez kątowne ustawienie warstw:

$$\sigma_{\alpha 3}^{tot} = \sigma_{\alpha 3}^B + \sigma_{\alpha 3}^S \quad (6.1)$$

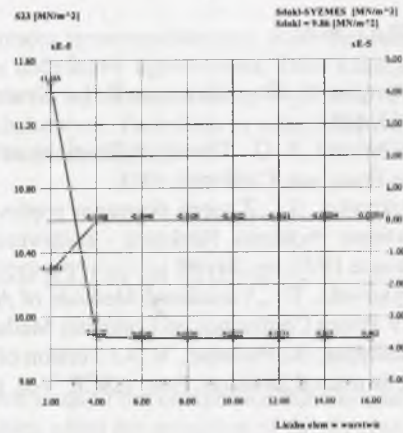
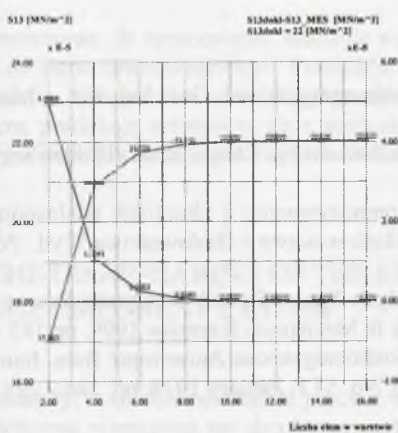
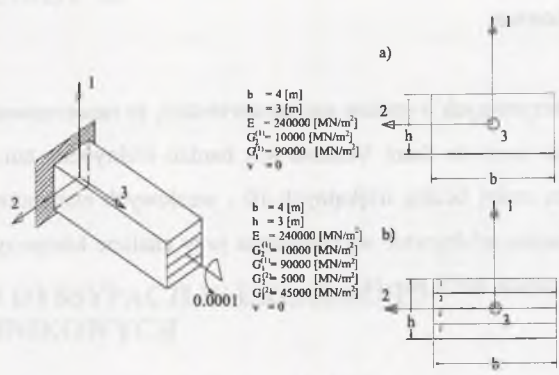
Naprężenia spowodowane skręcaniem de Saint Venanta  $\sigma_{\alpha 3}^B$  obliczamy za pomocą wzoru (4.1), natomiast naprężenia, które powstają w wyniku sprężeń, obliczamy za pomocą zależności:

$$\sigma_{\alpha 3}^S = D_{\alpha 3 \beta 3}^B \epsilon_{\beta 3} \quad (6.2)$$

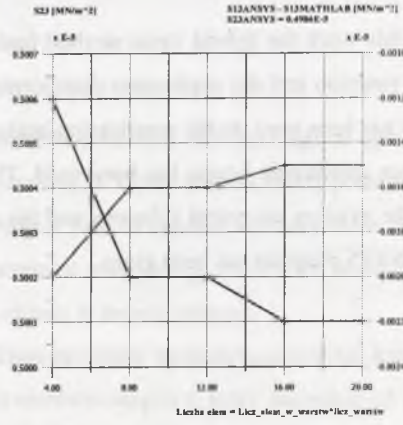
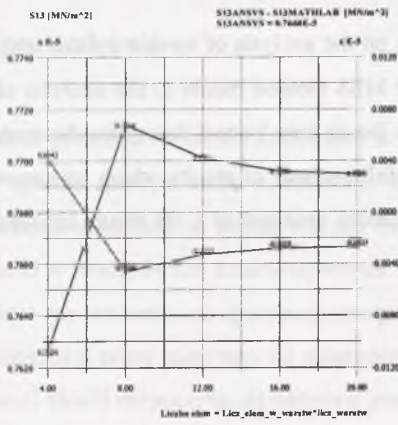
gdzie funkcje przemieszczeń są aproksymowane za pomocą tych samych funkcji kształtu, jakie są wykorzystywane do aproksymacji pól przemieszczeń w elemencie prętowym.

## 7. Analiza przykładów

Analizie poddano dwa przypadki skręcania pręta warstwowego o strukturze warstw ukazanej na rys. 1: a) pręt ortotropowy jednorodny; b) pręt czterowarstwowy o dwóch parach różnych warstw.



Rys. 2. Wykresy funkcji maksymalnych naprężeń S13 i S23 dla pręta ortotropowego  
 Fig. 2. The Grids of function of maximal stresses S13 and S23 for the orthotropic beam



Rys. 3. Wykresy funkcji maksymalnych naprężeń S13 i S23 dla pręta o strukturze warstwowej  
 Fig. 3. The Grids of function of maximal stresses S13 and S23 for the layer beam

## 8. Wnioski końcowe

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że zaprezentowana metoda analizy przy wykorzystaniu teorii de Saint Venanta jest bardzo efektywna, tzn. daje zadowalające wyniki przy bardzo małej liczbie trójkątnych 10 - węzłowych elementów skończonych. Ta cecha może być bardzo efektywnie wykorzystana przy analizie kompozytowych prętów zakrzywionych przy użyciu MES por. [4].

## LITERATURA

1. Artjunjan N. Ch.; Abramjan B. L.: Kruczenije uprugich tieł. Gos. Izd. Fiz. - Mat. Iter. 1963, 686c
2. Lekhnitskii, S. G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden Day Inc., San Francisco, California 1963
3. Borkowski, S.: „Z teorii skręcania prętów kompozytowych o obszarach wielospójnych”, Wybrane Problemy Naukowo - Badawcze Mostownictwa i Budownictwa, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1997, pp. 59 - 65
4. Krykowski, T.: „Variational Methods of Analysis Space Curved Composite Beams, Proc. XIV Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Rzeszów 1999, pp.183
5. Valliappan, S.; Pulmano, V. A.: Torsion of Nonhomogeneous Anisotropic Bars. Journal of the Structural Division. Proc. ASCE. Vol. 100, No. ST1, January 1974, pp. 286 - 295

## Abstract

In this work the hybrid stress method basing on the analysis of torsion by the use of the stress function and the application displacement MES method model to the analysis of couplings has been used. In the pure torsion analysis the de Sain Venant theory for the nonhomogeneous anisotropic beams has been used. The full analysis of results which was compared with the existing analytical solutions and the solutions obtained as a 3D model analysis with the ANSYS program has been given.