ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria : BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Jan KUBIK, Barbara WIECZOREK

ROZWIĄZANIA FUNDAMENTALNE ZAGADNIENIA QUASI-STATYCZNEGO STACJONARNEJ TERMODYFUZJI LEPKOSPRĘŻYSTEJ

Streszczenie: W opracowaniu analizowane jest zadanie początkowo-brzegowe dotyczące wyznaczenia stanu przemieszczenia w ośrodku lepkosprężystym z uwzględnieniem przepływów masy i ciepła, opisanych równaniami dyfuzji i przewodnictwa cieplnego.

Rozpatruje się quasi-statyczne zagadnienia szczególne termodyfuzji lepkosprężystej, w których pomija się wpływy niestacjonarności na rozwiązania zadań brzegowych.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THE QUASI-STATIC PROBLEM OF STATIONARY VISCOELASTIC THERMODIFFUSION

Summary: There is analysed an initial-boundary problem of the displacement evaluation in the viscoelastic body with the flow of mass and heat consideration, described with diffusion and conductivity equations.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie quasi-statyczne stacjonarnej termodyfuzji lepkosprężystej opisane jest układem pięciu równań różniczkowo-całkowych typu splotowego, określających charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola naprężeń. Postać tych równań(por.[2]) dla czterech równoważnych termodynamicznie sformułowań problemu jest następująca :

$$\begin{cases} -\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu) * du_{j,ji} + \gamma_S * dS_{,i} + \gamma_C * dc_{,i} = \rho F_i \\ -\left[\gamma_S * du_{j,j} + \mathrm{m}^{(1)} * dS + \mathrm{l}^{(1)} * dc\right]_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_l}{k_l} \\ -\left[\gamma_C * du_{j,j} + \mathrm{l}^{(1)} * dS + \mathrm{n}^{(1)} * dc\right]_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_2}{k_2} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu) * du_{j,ji} + \gamma_T * d\theta_{,i} + \gamma_C * dc_{,i} = \rho F_i \\ -\dfrac{k_l}{T_o}\theta_{,ii} = \dfrac{\rho r_l}{T_o} \\ -\left[\gamma_C * du_{j,j} + \mathrm{l}^{(2)} * d\theta + \mathrm{n}^{(2)} * dc\right]_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_2}{k_2} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu) * du_{j,ji} + \gamma_T * d\theta_{,i} + \gamma_M * dM_{,i} = \rho F_i \\ -\dfrac{k_l}{T_o}\theta_{,ii} = \dfrac{\rho r_l}{T_o} \\ -k_2 M_{,ii} = \rho r_2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu) * du_{j,ji} + \gamma_S * dS_{,i} + \gamma_M * dM_{,i} = \rho F_i \\ -\left[\gamma_S * du_{j,j} + \mathrm{m}^{(4)} * dS + \mathrm{l}^{(4)} * dM\right]_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_l}{k_l} \\ -k_2 M_{,ii} = \rho r_2 \end{cases} \tag{4}$$

gdzie λ i μ oraz $\gamma_S = \alpha_S(3\lambda+2\mu)$, $\gamma_C = \alpha_C(3\lambda+2\mu)$, $\gamma_T = \alpha_T(3\lambda+2\mu)$, $\gamma_M = \alpha_M(3\lambda+2\mu)$, $\mathrm{m}^{(k)}$, $\mathrm{n}^{(k)}$, $\mathrm{l}^{(k)}$ *dla* $k = 1,2,3,4$ oznaczają odpowiednio funkcje materiałowe i funkcje relaksacji, natomiast u_i, S, M, θ i c poszukiwane wielkości, tj. pole przemieszczeń, entropię, potencjał chemiczny, temperaturę i koncentrację.

W układach (1)-(4) symbole ρF_i, ρr_l, ρr_2, k_l, k_2 oznaczają odpowiednio składowe wektora sił masowych, źródło ciepła i masy, współczynnik przewodności cieplnej i dyfuzyjnej, natomiast

$$f * dg := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,dg(\tau)\,d\tau$$

oznacza splot funkcji.

W rozważaniach korzysta się z założenia, że funkcje materiałowe μ i λ oraz funkcje relaksacji $\mathrm{m}^{(k)}$, $\mathrm{n}^{(k)}$, $\mathrm{l}^{(k)}$ są postaci :

$$\mu(t) = \mu_o \Pi(t) \ , \ \lambda(t) = \lambda_o \Pi(t)$$

$$\mathrm{m}^{(k)}(t) = \mathrm{m}_o^{(k)} \Pi(t) \ , \ \mathrm{n}^{(k)}(t) = \mathrm{n}_o^{(k)} \Pi(t) \ , \ \mathrm{l}^{(k)}(t) = \mathrm{l}_o^{(k)} \Pi(t) \tag{5}$$

gdzie $\Pi(t)$ jest funkcją określoną następująco:

$$\Pi(t) = \left(\alpha + \beta \, \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) H(t), \tag{6}$$

natomiast μ_o, λ_o, m_o, n_o i l_o oraz α, β i γ są stałymi, a $H(t)$ - funkcją Heaviside'a.

Przy wyznaczaniu rozwiązania układów (1)-(4) stosowana będzie transformacja Fouriera, która dla dowolnej funkcji $f(x_i,t)$ określonej w przestrzeni $\Re^4$ zdefiniowana jest wzorem:

$$\mathrm{F}\left[f(x_i,t)\right] = \hat{f}(s_i,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Re^4} f(x_i,t) \, \mathrm{e}^{-i(x_i s_i + t\omega)} dx_i dt, \tag{7}$$

gdzie $s = (s_1, s_2, s_3)$, a powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie od 1 do 3.

Transformatę odwrotną określa wyrażenie:

$$f(x_i,t) \cong \mathrm{F}^{-1}\left[f(s_i,\omega)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Re^4} f(s_i,\omega) \, \mathrm{e}^{i(x_i s_i + t\omega)} ds_i \, d\omega \tag{8}$$

Zdefiniowane przekształcenie ma następujące własności:

$$\mathrm{F}\left[\partial_k f(x_i,t)\right] = i s_k \hat{f}(s_i,\omega) \quad , \quad \mathrm{F}\left[\partial_t f(x_i,t)\right] = i\omega_k \hat{f}(s_i,\omega) \tag{9}$$

oraz

$$\mathrm{F}\left[f(x_i,t) * g(x_i,t)\right] = (2\pi)^2 \hat{f}(s_i,\omega) \hat{g}(s_i,\omega), \tag{10}$$

przy czym

$$f(x_i,t) * g(x_i,t) = \int_{\Re^4} f(x_i - x_i', t - t') g(x_i', t') dx_i' dt'$$

oznacza splot funkcji f i g.

Ponadto dla funkcji $g(x_i,t)$ takiej, że $g(x_i,0) = 0$, prawdziwa jest zależność:

$$\mathrm{F}\left[f(x_i,t) * dg(x_i,t)\right] = (2\pi)^2 \, i\omega \, \hat{f}(s_i,\omega) \, \hat{g}(s_i,\omega). \tag{11}$$

Wykorzystane zostaną również następujące relacje

$$\mathrm{F}\left[\frac{\delta(t)}{|x|}\right]=\frac{1}{\pi\, s^2},$$

$$\mathrm{F}\left[\, x\delta(t)\right] = -\frac{2}{\pi s^4},$$

$$\mathrm{F}\left[\Gamma_{\mathrm{d}}\left(x_i,t\right)\right]=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{s^2+i\mathrm{d}\omega}, \tag{12}$$

$$\mathrm{F}\left[\Gamma_{\mathrm{d}}\left(x_i,t\right)\right]=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{s^2+i\mathrm{d}\omega},$$

$$\mathrm{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega\,\hat{\Pi}(\omega)}\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha+\beta}\left\{(\gamma-\lambda)\right\}\Gamma\left(t\right),$$

gdzie : $|x|=\sqrt{\left(x_i\, x_i\right)}$

$$\Gamma_{\mathrm{d}}\left(x_i,t\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi\, t}{\mathrm{d}}\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{d}\,(x_i x_i)}{4t}} & ,\ dla\quad t>0 \\ 0 & ,\ dla\quad t<0 \end{cases}$$

$$\Gamma\left(t\right) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda t} & ,\ dla\quad t>0 \\ 0 & ,\ dla\quad t<0 \end{cases}, \qquad \lambda = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Różniczkując pierwsze z równań w układach (1)-(4) i wprowadzając dylatację przemieszczania

$$e \equiv u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{13}$$

otrzymuje się układy trzech równań różniczkowych:

$$\begin{cases} -(\lambda+2\mu)*de_{i,i} + \gamma_S*dS_{,ii} + \gamma_C*dc_{,ii} = \rho F_{i,i} \\ -\ \gamma_S*de_{,ii} - \mathrm{m}^{(1)}*dS_{,ii} - \mathrm{l}^{(1)}*dc_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_1}{k_1} \\ -\ \gamma_C*de_{,ii} - \mathrm{l}^{(1)}*dS_{,ii} - \mathrm{n}^{(1)}*dc_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_2}{k_2} \end{cases}, \tag{14}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+2\mu)*de_{,ii} + \gamma_T * d\theta_{,ii} + \gamma_C * dc_{,ii} = \rho F_{i,i} \\ -\mathrm{k}^{(2)}\theta_{,ii} = \dfrac{\rho r_1}{T_o} \\ -\gamma_C * de_{,ii} - \mathrm{l}^{(2)} * d\theta_{,ii} - \mathrm{n}^{(2)} * dc_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_2}{k_2} \end{cases}, \tag{15}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+2\mu)*de_{,ii} + \gamma_T * d\theta_{,ii} + \gamma_M * dM_{,ii} = \rho F_{i,i} \\ -\mathrm{k}^{(3)}\theta_{,ii} = \dfrac{\rho r_1}{T_o} \\ -\mathrm{h}^{(3)}M_{,ii} = \rho r_2 \end{cases}, \tag{16}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+2\mu)*de_{,ii} + \gamma_S * dS_{,ii} + \gamma_M * dM_{,ii} = \rho F_{i,i} \\ -\gamma_S * de_{,ii} - \mathrm{m}^{(4)} * dS_{,ii} - \mathrm{l}^{(4)} * dM_{,ii} = \dfrac{\rho^2 r_1}{k_1} \\ -\mathrm{h}^{(4)}M_{,ii} = \rho r_2 \end{cases}, \tag{17}$$

w których przyjęto oznaczenia

$$\mathrm{k}^{(2)} = \frac{k_1}{T_o}, \quad \mathrm{k}^{(3)} = \frac{k_1}{T_o}, \quad \mathrm{h}^{(3)} = k_2, \quad \mathrm{h}^{(4)} = k_2.$$

2. Rozwiązanie fundamentalne

Rozważane układy (14)-(17) można zapisać w postaci macierzowej:

$$A^{(k)}(\partial_i,\partial_t)\, y^{(k)} = f^{(k)}, \tag{18}$$

gdzie:

$$\left(y^{(1)}\right)^T = [\,e, S, c\,], \quad \left(f^{(1)}\right)^T = \left[\rho F_{i,i}, \frac{\rho^2 r_1}{k_1}, \frac{\rho^2 r_2}{k_2}\right]$$

$$\left(y^{(2)}\right)^T = [\,e, \theta, c\,], \quad \left(f^{(2)}\right)^T = \left[\rho F_{i,i}, \frac{\rho r_1}{T_o}, \frac{\rho^2 r_2}{k_2}\right] \tag{19}$$

$$\left(y^{(3)}\right)^{T} = \left[e, \theta, M \right] \quad , \quad \left(f^{(3)}\right)^{T} = \left[\rho F_{i,i} \, , \, \frac{\rho r_{1}}{T_{o}} \, , \, \rho r_{2} \right]$$

$$\left(y^{(4)}\right)^{T} = \left[e, S, M \right] \quad , \quad \left(f^{(4)}\right)^{T} = \left[\rho F_{i,i} \, , \, \frac{\rho^{2} r_{1}}{k_{1}} \, , \, \rho r_{2} \right],$$

przy czym macierz układu jest określona następująco:

$$A^{(1)}(\partial_{i},\partial_{t}) = \begin{bmatrix} -(\lambda+2\mu)*d\partial_{ii} & \gamma_{S}*d\partial_{ii} & \gamma_{S}*d\partial_{ii} \\ -\gamma_{S}*d\partial_{ii} & -\mathrm{m}^{(1)}*d\partial_{ii} & -\mathrm{l}^{(1)}*d\partial_{ii} \\ -\gamma_{C}*d\partial_{ii} & -\mathrm{l}^{(1)}*d\partial_{ii} & -\mathrm{n}^{(1)}*d\partial_{ii} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}(\partial_{i},\partial_{t}) = \begin{bmatrix} -(\lambda+2\mu)*d\partial_{ii} & \gamma_{T}*d\partial_{ii} & \gamma_{S}*d\partial_{ii} \\ 0 & -\mathrm{k}^{(2)}*d\partial_{ii} & 0 \\ -\gamma_{C}*d\partial_{ii} & -\mathrm{l}^{(2)}*d\partial_{ii} & -\mathrm{n}^{(2)}*d\partial_{ii} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$A^{(3)}(\partial_{i},\partial_{t}) = \begin{bmatrix} -(\lambda+2\mu)*d\partial_{ii} & \gamma_{T}*d\partial_{ii} & \gamma_{M}*d\partial_{ii} \\ 0 & -\mathrm{k}^{(3)}*d\partial_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{h}^{(3)}*d\partial_{ii} \end{bmatrix},$$

$$A^{(4)}(\partial_{i},\partial_{t}) = \begin{bmatrix} -(\lambda+2\mu)*d\partial_{ii} & \gamma_{S}*d\partial_{ii} & \gamma_{M}*d\partial_{ii} \\ -\gamma_{S}*d\partial_{ii} & -\mathrm{m}^{(4)}*d\partial_{ii} & -\mathrm{l}^{(4)}*d\partial_{ii} \\ 0 & 0 & -\mathrm{h}^{(4)}*d\partial_{ii} \end{bmatrix}.$$

Dla zagadnień opisanych układami równań różniczkowych (18) wyznacza się rozwiązanie podstawowe operatora termodyfuzji (por.[1]) poszukując dystrybucji $E^{(k)}$ dla $\mathrm{k} = 1,2,3,4$, spełniającej równanie

$$A^{(k)}(\partial_{i},\partial_{t}) \; E^{(k)} = \delta, \tag{21}$$

gdzie:

$$\delta = I \; \delta(x)\delta(t). \tag{22}$$

Rozwiązanie układów (21) sprowadza się do wyznaczenia macierzy niezależnych dystrybucji temperowanych $E^{(k)}$.

Po wykonaniu transformacji Fouriera równań układów (21) zgodnie ze wzorem (7) otrzymuje się układy równań:

$$\hat{A}^{(k)}(s_{i},\omega) \; \hat{E}^{(k)}(s_{i},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{2}} I, \tag{23}$$

które są układami równań algebraicznych, a macierz $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową. Macierze układów (23) są określone następująco:

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(1)} = \begin{bmatrix} (\hat{\lambda}+2\hat{\mu})i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_S\, i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_C\, i\omega s^2 \\ \hat{\gamma}_S\, i\omega s^2 & \hat{\mathrm{m}}^{(1)} i\omega s^2 & \hat{\mathrm{l}}^{(1)} i\omega s^2 \\ \hat{\gamma}_C\, i\omega s^2 & \hat{\mathrm{l}}^{(1)} i\omega s^2 & \hat{\mathrm{n}}^{(1)} i\omega s^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\hat{\lambda}+2\hat{\mu})i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_T\, i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_C\, i\omega s^2 \\ 0 & \mathrm{k}^{(2)} s^2 & 0 \\ \hat{\gamma}_C\, i\omega s^2 & \hat{\mathrm{l}}^{(2)} i\omega s^2 & \hat{\mathrm{n}}^{(2)} i\omega s^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(3)} = \begin{bmatrix} (\hat{\lambda}+2\hat{\mu})i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_T\, i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_M\, i\omega s^2 \\ 0 & \mathrm{k}^{(3)} s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{h}^{(3)} s^2 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} (\hat{\lambda}+2\hat{\mu})i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_T\, i\omega s^2 & -\hat{\gamma}_M\, i\omega s^2 \\ \hat{\gamma}_S\, i\omega s^2 & \hat{\mathrm{m}}^{(4)} i\omega s^2 & \hat{\mathrm{l}}^{(4)} i\omega s^2 \\ 0 & 0 & \mathrm{h}^{(4)} s^2 \end{bmatrix},$$

przy czym $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$.

Rozwiązaniem układów (23) jest macierz:

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{(\mathrm{k})} = \begin{bmatrix} \hat{E}_{11}^{(\mathrm{k})} & \hat{E}_{12}^{(\mathrm{k})} & \hat{E}_{13}^{(\mathrm{k})} \\ \hat{E}_{21}^{(\mathrm{k})} & \hat{E}_{22}^{(\mathrm{k})} & \hat{E}_{23}^{(\mathrm{k})} \\ \hat{E}_{31}^{(\mathrm{k})} & \hat{E}_{32}^{(\mathrm{k})} & \hat{E}_{33}^{(\mathrm{k})} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

której elementy $\hat{E}_{ij}^{(\mathrm{k})}$ po uwzględnieniu założenia (5) przyjmują postać:

$$\hat{E}_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\tilde{w}_{ij}^{(1)}}{w_o^{(1)}}\frac{1}{\hat{\Pi}(\omega)}\cdot\frac{1}{i\omega s^2},$$

$$\hat{E}_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\tilde{w}_{ij}^{(2)}}{w_o^{(2)}}\cdot\begin{cases} \dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)}\cdot\dfrac{1}{i\omega s^2} & dla \quad i,j \neq 2 \\ \dfrac{1}{s^2} & dla \quad pozostalych \end{cases} \tag{26}$$

$$\hat{E}_{ij}^{(3)} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\tilde{w}_{ii}^{(3)}}{w_o^{(3)}}\cdot\begin{cases} \dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)}\cdot\dfrac{1}{i\omega s^2} & dla \quad i=j=1 \\ \dfrac{1}{s^2} & dla \quad pozostalych \end{cases}$$

$$\hat{E}_{ij}^{(4)} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\tilde{w}_{ij}^{(4)}}{w_o^{(4)}}\begin{cases}\dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)}\cdot\dfrac{1}{i\omega s^2} & dla \quad j\neq 3\\ \dfrac{1}{s^2} & dla \quad pozostalych\end{cases}$$

gdzie $\hat{\Pi}(\omega)$ jest transformacją Fouriera funkcji $\Pi(t)$, natomiast stałe $\tilde{w}_{ij}^{(k)}$ i $w_0^{(k)}$ określone są wzorami :

$$\tilde{w}_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} m_o^{(1)}n_o^{(1)}-\left(l_o^{(1)}\right)^2 & n_o^{(1)}\gamma_S^o-l_o^{(1)}\gamma_C^o & m_o^{(1)}\gamma_C^o-m_o^{(1)}\gamma_S^o \\ l_o^{(1)}\gamma_C^o-n_o^{(1)}\gamma_S^o & \left(\gamma_C^o\right)^2+n_o^{(1)}(\lambda_o+2\mu_o) & -\gamma_C^o\gamma_S^o-l_o^{(1)}(\lambda_o+2\mu_o) \\ l_o^{(1)}\gamma_S^o-m_o^{(1)}\gamma_C^o & -\gamma_C^o\gamma_S^o-l_o^{(1)}(\lambda_o+2\mu_o) & \left(\gamma_S^o\right)^2+m_o^{(1)}(\lambda_o+2\mu_o) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)}n_o^{(2)} & n_o^{(2)}\gamma_T^o-l_o^{(2)}\gamma_C^o & k^{(2)}\gamma_C^o \\ 0 & \left(\gamma_C^o\right)^2+(\lambda_o+2\mu_o)n_o^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)}\gamma_C^o & -\gamma_C^o\gamma_T^o-(\lambda_o+2\mu_o)l_o^{(2)} & (\lambda_o+2\mu_o)k^{(2)} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\tilde{w}_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} k^{(3)}h^{(3)} & h^{(3)}\gamma_T^o & k^{(3)}\gamma_M^o \\ 0 & (\lambda_o+2\mu_o)h^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_o+2\mu_o)k^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_{ij}^{(4)} = \begin{bmatrix} h^{(4)}m_o^{(4)} & h^{(4)}\gamma_S^o & m_o^{(4)}\gamma_M^o-l_o^{(4)}\gamma_S^o \\ -h^{(4)}\gamma_S^o & h^{(4)}(\lambda_o+2\mu_o) & -\gamma_M^o\gamma_S^o-l_o^{(4)}(\lambda_o+2\mu_o) \\ 0 & 0 & \left(\gamma_S^o\right)^2+m_o^{(4)}(\lambda_o+2\mu_o) \end{bmatrix}$$

oraz

$$w_o^{(1)} = n_o^{(1)}\left(\gamma_S^o\right)^2+m_o^{(1)}\left(\gamma_C^o\right)^2-2l_o^{(1)}\gamma_C^o\gamma_S^o+(\lambda_o+2\mu_o)\left(m_o^{(1)}n_o^{(1)}-\left(l_o^{(1)}\right)^2\right)$$

$$w_o^{(2)} = k^{(2)}\left(\left(\gamma_S^o\right)^2-n_o^{(2)}(\lambda_o+2\mu_o)\right) \tag{28}$$

$$w_o^{(3)} = h^{(3)}k^{(3)}(\lambda_o+2\mu_o)$$

$$w_o^{(4)} = h^{(4)}\left(\left(\gamma_T^o\right)^2-m_o^{(4)}(\lambda_o+2\mu_o)\right)$$

Wykonując transformację odwrotną wg wzoru (8) elementów macierzy $\hat{E}^{(k)}$ otrzymuje się macierz rozwiązań podstawowych układów (21) określoną następująco :

$$E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{12}^{(k)} & E_{13}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)} & E_{22}^{(k)} & E_{23}^{(k)} \\ E_{31}^{(k)} & E_{32}^{(k)} & E_{33}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

gdzie :

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\tilde{w}_{ij}^{(k)}}{w_o^{(k)}}\begin{cases} \dfrac{\delta(t)}{|x|} * F^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{i\omega\,\hat{\Pi}(\omega)}\right] & dla \quad K1 \\ \dfrac{\delta(t)}{|x|} & dla \quad K2 \end{cases} \qquad dla \ \mathrm{k} = 1,2,3,4, \tag{30}$$

przy czym :

$$K1 = \begin{cases} wszystkich & dla \ \ \mathrm{k}=1 \\ i,j \neq 2 & dla \ \ \mathrm{k}=2 \\ i=j=1 & dla \ \ \mathrm{k}=3 \\ pozostałych & dla \ \ \mathrm{k}=4 \end{cases}, \quad K2 = \begin{cases} brak & dla \ \ \mathrm{k}=1 \\ pozostałych & dla \ \ \mathrm{k}=2 \\ pozostałych & dla \ \ \mathrm{k}=3 \\ j=3 & dla \ \ \mathrm{k}=4 \end{cases}. \tag{31}$$

3. Rozwiązanie ogólne

Określona wzorami (29) i (30) macierz rozwiązań podstawowych zawiera 9 niezależnych dystrybucji i może posłużyć do wyznaczenia rozwiązania źródłowych zagadnień stacjonarnej termodyfuzji zgodnie z relacją

$$y^{(k)} = \boldsymbol{E}^{(k)} * \boldsymbol{f}^{o}, \tag{32}$$

gdzie wektor f^{o} określony jest zależnością:

$$\left(f^{o}\right)^{T} = \left[1_{,i}, 1, 1\right]\delta(x)\delta(t). \tag{33}$$

Wówczas

$$y_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\tilde{w}_{ij}^{(k)}}{w_o^{(k)}}\begin{cases} \dfrac{\delta(t)}{|x|} * F^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{i\omega\,\hat{\Pi}(\omega)}\right] * f_j^{o} & dla \quad K1 \\ \dfrac{\delta(t)}{|x|} * f_j^{o} & dla \quad K2 \end{cases}. \tag{34}$$

Pole przemieszczeń u_i uzyskuje się analizując transformatę Fouriera równania:

$$-\mu * du_{i,jj}^{(k)} - (\lambda+\mu) * d\left\{y_1^{(k)}\right\}_{,i} + \gamma_1 * d\left\{y_2^{(k)}\right\}_{,i} + \gamma_2 * d\left\{y_3^{(k)}\right\}_{,i} = 1_i\,\delta(x)\delta(t), \tag{35}$$

gdzie:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \gamma_S & , \ k=1 \\ \gamma_T & , \ k=2 \\ \gamma_T & , \ k=3 \\ \gamma_S & , \ k=4 \end{cases} , \quad \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_C & , \ k=1 \\ \gamma_C & , \ k=2 \\ \gamma_M & , \ k=3 \\ \gamma_M & , \ k=4 \end{cases} ,$$

która ma postać:

$$\sqrt{2\pi}\left(\hat{\mu}\, i\omega\, s^2\, \hat{u}_i^{(k)} - \left(\hat{\lambda}+\hat{\mu}\right) i\omega\, is_i\left\{\hat{y}_1^{(k)}\right\} + \hat{\gamma}_1\, i\omega\, is_i\left\{\hat{y}_2^{(k)}\right\} + \hat{\gamma}_2\, i\omega\, is_i\left\{\hat{y}_3^{(k)}\right\}\right) = \hat{1}_i, \quad (36)$$

przy czym $\hat{1}_i$ jest transformatą wymuszenia jednostkowego $1_i\,\delta(x)\delta(t)$.

Po wykonaniu transformat rozwiązań (32), podstawieniu do (36) i uporządkowaniu otrzymuje się następująca zależność:

$$\hat{u}_i^{(k)} = \begin{cases} is_i\left[\mathrm{H}_{lj}^{(k)} \dfrac{2}{i\omega\, s^4} \dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)} f_j^o\right] + \mathrm{H}_2 \dfrac{1}{i\omega\, s^2} \dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)} \hat{1}_i & dla \quad K1 \\ is_i\left[\mathrm{H}_{lj}^{(k)} \dfrac{2}{s^4} f_j^o\right] + \mathrm{H}_2 \dfrac{1}{i\omega\, s^2} \dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)} \hat{1}_i & dla \quad K2 \end{cases} , \quad (37)$$

określającą transformatę pola przemieszczeń.

Stałe występujące w równości (37) określone są wzorami:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{lj}^{(k)} &= \frac{1}{2\mu_o w_o}\left[(\lambda_o+\mu_o)\tilde{w}_{lj}^{(k)} - \gamma_l^o\, \tilde{w}_{2j}^{(k)} - \gamma_2^o\, \tilde{w}_{3j}^{(k)}\right] \\ \mathrm{H}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\mu_o} \end{aligned} \quad (38)$$

Wykonując transformatę odwrotną wyrażenia (37) otrzymuje się odpowiednio dla układu równań zależność, określającą pole przemieszczeń:

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathrm{H}_{ji}^{(k)} * f_j^o + \mathrm{H}_2 \frac{\delta(t)}{|x|} * \mathrm{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega\, \hat{\Pi}(\omega)}\right] * 1_i\,\delta(x)\delta(t)\right\} \quad (39)$$

lub w równoważnej postaci:

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathrm{H}_j^{(k)} * f_{j,i}^o + \mathrm{H}_2 \frac{\delta(t)}{|x|} * \mathrm{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega\, \hat{\Pi}(\omega)}\right] * 1_i\,\delta(x)\delta(t)\right\}, \quad (40)$$

gdzie:

$$\mathrm{H}_j^{(k)} = \mathrm{H}_{lj}^{(k)} \begin{cases} |x|\delta(t) * \mathrm{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{i\omega\, \hat{\Pi}(\omega)}\right] & dla \quad K1 \\ |x|\delta(t) & dla \quad K2 \end{cases} . \quad (41)$$

Znając rozwiązania fundamentalne całego zadania stacjonarnej termodyfuzji lepkosprężystej można poszukiwać rozwiązań źródłowych dla sił masowych oraz źródeł masy i ciepła różnej postaci. Ponadto z twierdzeń o wzajemności można uzyskiwać rozwiązania innych problemów brzegowych, dotyczących sprzężonych przepływów masy i ciepła oraz pól naprężeń w ciele stałym.

Rozwiązania źródłowe termodyfuzji uzyskuje się na podstawie równości (32) po uwzględnieniu wpływu rzeczywistych rozkładów źródeł $f^{(k)}$. Przyjmuje ona wówczas postać :

$$\boldsymbol{Y}^{(k)} = \boldsymbol{E}^{(k)} * \boldsymbol{f}^{(k)}, \tag{42}$$

gdzie wektory $\boldsymbol{f}^{(k)}$ dla określone są zależnościami (19).

Wówczas

$$Y_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\tilde{w}_{ij}^{(k)}}{w_a^{(k)}}\begin{cases} \dfrac{\delta(t)}{x} * \mathrm{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{i\omega\,\hat{\Pi}(\omega)}\right] * f_j^{(k)} & dla \quad K1 \\ \dfrac{\delta(t)}{|x|} * f_j^{(k)} & dla \quad K2 \end{cases}. \tag{43}$$

Pole przemieszczeń u_i uzyskuje się analizując transformatę Fouriera równania :

$$-\mu * du_{i,jj}^{(k)} - (\lambda+\mu) * d\left\{Y_l^{(k)}\right\}_{,i} + \gamma_l * d\left\{Y_2^{(k)}\right\}_{,i} + \gamma_2 * d\left\{Y_3^{(k)}\right\}_{,i} = \rho F_i\,, \tag{44}$$

która ma postać :

$$\sqrt{2\pi}\left(\hat{\mu}\, i\omega\, s^2\, \hat{u}_i^{(k)} - \left(\hat{\lambda}+\hat{\mu}\right) i\omega\, is_i\left\{\hat{Y}_l^{(k)}\right\} + \hat{\gamma}_l\, i\omega\, is_i\left\{\hat{Y}_2^{(k)}\right\} + \hat{\gamma}_2\, i\omega\, is_i\left\{\hat{Y}_3^{(k)}\right\}\right) = \rho\hat{F}_i\,, \tag{45}$$

przy czym $\rho\hat{F}_i$ jest transformatą czynnika ρF_i, natomiast stałe γ_l i γ_2 zdefiniowane są zależnością (36).

Po wykonaniu transformat rozwiązań (42), podstawieniu do (45) i uporządkowaniu otrzymuje się następująca zależność:

$$\hat{u}_i^{(k)} = \begin{cases} is_i\left[\mathrm{H}_{lj}^{(k)}\dfrac{2}{i\omega\, s^4}\dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)} f_j^{(k)}\right] + \mathrm{H}_2\dfrac{1}{i\omega\, s^2}\dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)}\rho\hat{F}_i & dla \quad K1 \\ is_i\left[\mathrm{H}_{lj}^{(k)}\dfrac{2}{s^4} f_j^{(k)}\right] + \mathrm{H}_2\dfrac{1}{i\omega\, s^2}\dfrac{1}{\hat{\Pi}(\omega)}\rho\hat{F}_i & dla \quad K2 \end{cases}, \tag{46}$$

określającą transformatę pola przemieszczeń.

Stałe występujące w równości (46) określone są wzorami (38).

Wykonując transformatę odwrotną wyrażenia (46) uzyskuje się odpowiednio dla każdego z układów równań zależność określającą pole przemieszczeń :

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\left\{ \mathrm{H}_{j,i}^{(k)} * f_j^{(k)} + \mathrm{H}_2 \frac{\delta(t)}{x} * \mathrm{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega\, \hat{\Pi}(\omega)} \right] * \rho F_i \right\} \tag{47}$$

lub w równoważnej postaci :

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\left\{ \mathrm{H}_j^{(k)} * f_{j,i}^{(k)} + \mathrm{H}_2 \frac{\delta(t)}{|x|} * \mathrm{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega\, \hat{\Pi}(\omega)} \right] * \rho F_i \right\}, \tag{48}$$

gdzie $\mathrm{H}_j^{(k)}$ określa zależność (41).

Uwzględniając teraz w zależnościach (39) i (40) oraz (47) i (48) postać transformaty odwrotnej funkcji $\Pi(t)$określonej wzorem (12) uzyskuje się następującą ich postać:

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{8\pi^2}\left\{ \partial_i\left(\widetilde{\mathrm{H}}_j^{(k)} * f_j^o \right) + \mathrm{H}\frac{\Gamma(t)}{|x|} * 1_i\, \delta(x)\delta(t) \right\}, \tag{49}$$

oraz odpowiednio

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{8\pi^2}\left\{ \partial_i\left(\widetilde{\mathrm{H}}_j^{(k)} * f_j^{(k)} \right) + \mathrm{H}\frac{\Gamma(t)}{|x|} * \rho F_i \right\} \tag{50}$$

przy czym

$$\widetilde{\mathrm{H}}_j^{(k)} = \mathrm{H}_{j,j}^{(k)} \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,\dfrac{\gamma-\lambda}{\alpha+\beta}|x|\,\Gamma(t) & dla \quad K1 \\ |x\delta(t)| & dla \quad K2 \end{cases}, \tag{51}$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\mu_o}\frac{\gamma-\lambda}{\alpha+\beta}.$$

4. Podsumowanie

W przedstawionym ujęciu termodyfuzji lepkosprężystej przeanalizowano układy równań, określające charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola przemieszczeń. Wynikają one z różnych ujęć termodynamicznych problemu i ze sposobu oddziaływania pól rozpatrywanego zagadnienia. W układach tych jako niewiadome występują odpowiednio temperatura, koncentracja, entropia i potencjał chemiczny oraz pole przemieszczeń. W wyniku analogicznych przekształceń uzyskuje się rozwiązania układów równań (1), (2), (3) i (4), które mają identyczną postać. Różnice występują jedynie w postaci stałych, które zależą bezpośrednio od współczynników występujących w odpowiednich układach.

LITERATURA

1. Domański Z., Piskorek A.: Matrices of fundamental solutions for the system of quasi-static equations of thermoelasticity and the system of dynamic equations of thermal stresses., AMS 23,2,1971
2. Kubik J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids., SGT 8,2,1986

Abstract

The problem of quasi-statical convoluted viscoelastic thermodiffusion in described with the system of fine partial-integral differential equations, describing character of mutual reaction of the heat, diffusion and stress fields. There was four different forms of these equations systems, resulted of the way of fields reactions.

There was presented the method of the solution for one of the equations' system. With the Fourier transformation, its propertied and theory of distribution was build a fundamental solution of that system. On their basis was obtained the solution of the basic system.

Per analogy the solution was obtained for two rest equation systems which describe the thermodiffusion problem.