ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Tomasz LISZKA, Jerzy SKRZYPCZYK

KRYTERIUM UTRATY STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI O PARAMETRACH PRZEDZIAŁOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę badania stateczności konstrukcji budowlanych o parametrach niepewnych. W tym celu badane są ekstremalne wielkości wartości własnych równania charakterystycznego układu dynamicznego. Do określenia tych wielkości wykorzystywane są twierdzenia Soha i Rohna. Teoria jest ilustrowana przykładem z zakresu teorii konstrukcji.

LOSS OF STABILITY CRITERION OF SYSTEMS WITH INTERVAL PARAMETERS

Summary. In the paper the advanced metod of analysis of loss of stability for systems with interval parameters is presented. The method uses interval arithmetic and technology. Stability is analysed by calculation of extremal values of system eigenvalues. Theory is based on theorems proved by Soh and Rohn for eigenvalues of symmetric interval matrices. The theory is illustrated with the example from construction theory.

1. Wstęp

Twórcy współczesnych budowli, dysponując materiałami o niespotykanych dotąd właściwościach, pokonują wielkie rozpiętości, wysokości i przestrzenie śmiałymi formami strukturalnymi. Przy ich projektowaniu podstawowego znaczenia nabierają problemy stateczności i wrażliwości na wpływy o charakterze dynamicznym.

Aby realizować te zadania współczesny inżynier ma do pomocy mocno rozbudowany aparat metod komputerowych, pozwalający na bardzo wierne modelowanie konstrukcji. Ciągle jednak projektant do obliczeń musi przyjmować parametry materiałów wyznaczone z pewnym prawdopodobieństwem, a co się z tym wiąże, w otrzymanych wynikach musi uwzględ-

niać współczynniki bezpieczeństwa. Bardzo często prowadzi to do przeprojektowania konstrukcji, a przez to ogranicza możliwości wykorzystania w pełni cech materiałów.

Rozwiązaniem tego problemu może być zastosowanie w obliczeniach metody, która umożliwia na wprowadzenie do danych opisujących konstrukcję niedoskonałości użytych materiałów.

Najnowszą teorią uwzględniającą niepewność parametrów konstrukcji jest powstała w latach 30. naszego stulecia, a od lat 70. dynamicznie rozwijająca się, algebra interwałowa. Umożliwia ona już w parametrach uwzględnienie odchyłek przedstawiając dane modelu konstrukcji w postaci przedziałów [min.wartość,max wartość] [2,12].

Ta „nowa" matematyka umożliwia prowadzenie obliczeń na tak określonych liczbach (w takiej samej postaci otrzymujemy wyniki), pozwala także na uwzględnienie w modelu konstrukcji :

- niedoskonałości modelu (uwzględnienie pełnego usztywnienia podpór i połączeń, niedoskonałości rzeczywistych przegubów),
- imperfekcji materiałowych i geometrycznych,
- błędów montażowych.

Jest to nowa metoda obliczeń i nie jest jeszcze stosowana w obliczeniach inżynierskich. Ciągle jest jeszcze w fazie badań naukowych, ciągle jest rozwijana i udoskonalana, ale sądząc po możliwościach, jakie daje ona projektantom, można przypuszczać, że znajdzie szerokie zastosowanie w budownictwie.

Praca ta jest próbą wprowadzenia do mechaniki budowli twierdzeń i metod przedstawionych i udowodnionych przez współczesnych naukowców, zajmujących się stabilnością sterowania interwałowych układów automatycznych.

Jej celem jest znalezienie i przedstawienie kryteriów stabilności używanych w teorii sterowania i zaadaptowaniu tych metod do analizy stateczności konstrukcji budowlanych o parametrach przedziałowych.

Na podstawie prostych konstrukcji prętowych zostaną przedstawione zalety algorytmów wyznaczania obciążeń krytycznych, a także problemy numeryczne i obliczeniowe związane z wprowadzeniem liczb przedziałowych.

2. Podstawowe oznaczenia i własności

Liczbę interwałową definiujemy jako uporządkowaną parę liczb rzeczywistych [a, b], gdzie $a \leq b$. Oznacza to, że liczba interwałowa x może przyjmować z jednakowym prawdopodobieństwem wszystkie wartości z przedziału [a, b], co możemy zapisać :

$$[a,b] = \{\, x : \quad a \leq x \leq b \,\}. \tag{1}$$

Do przedstawienia liczb interwałowych zostaną wprowadzone następujące oznaczenia:

$$\bar{x} = [a,b], \qquad \bar{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$$

Dla tak zdefiniowanych liczb można określić podstawowe działania : $\subset$, $<$, $\in$, $|\bar{x}|$, $=$.

$x \in [a, b]$ jeżeli $a \leq x \leq b$.

- $[a, b] \subset [c, d]$ wtedy, gdy $c \leq a \leq b \leq d$
- $[a, b] = [c, d]$ wtedy, gdy $c = a$ i $b = d$
- $|[a, b]| = \max(|a|, |b|)$
- możliwe jest tylko częściowe uporządkowanie liczb interwałowych, np. $[a, b] < [c, d]$ wtedy, gdy $b \leq c$.

Podstawowe definicje podstawowych działań algebraicznych są następujące:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$$
$$[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c]$$
$$[a,b] \cdot [c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)],$$

gdy $0 \notin [c,d]$, to

$$[a,b]/[c,d] = [a,b] \cdot [1/d, 1/c].$$

Więcej informacji Czytelnik znajdzie w monografii Moore'a [12].

3. Stateczność ustrojów prętowych o parametrach przedziałowych

3.1. Metody badania stateczności konstrukcji o parametrach przedziałowych

Na bardzo poważne trudności napotykamy przy badaniu stateczności płaskich ustrojów prętowych o parametrach przedziałowych, w których macierze opisujące ustrój są również przedziałowe. Rozwiązanie tego zadania bardzo często polega na wyznaczeniu wartości włas-

nych. W matematyce interwałowej jest to bardzo trudne zadanie, praktycznie polega ono na oszacowaniu skrajnych wartości własnych - najmniejszej i największej. Dla inżyniera są to jednak wystarczające informacje do oceny bezpieczeństwa konstrukcji [1,3,4,7,13].

Wszystkie metody, a także problemy związane z badaniem stateczności konstrukcji współczesnej mechaniki, w której parametry opisujące konstrukcję są liczbami interwałowymi, zostaną przedstawione na podstawie przykładowych ustrojów.

Po tym wprowadzeniu możemy rozpocząć analizę stateczności ustroju prętowego opisanego równaniem:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (K - K_G)q = Q. \tag{2}$$

Równanie macierzowe (2) opisuje ruch układu, który określony jest przez funkcje $q = q(t)$, spełniające równanie różniczkowe oraz odpowiednie warunki początkowe: $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$.

Równanie (2) przedstawia układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach, który pozwala analizować tzw. małe drgania (o niewielkich amplitudach przemieszczeń) wokół położenia równowagi statycznej ustroju [1,3-5,7]. Ograniczenie to wynika z przyjętych założeń upraszczających - małe przemieszczenia, liniowe związki geometryczne i sprężystość materiału.

W większości realnych konstrukcji budowlanych założenia te znajdują empiryczne potwierdzenie.

Zakładając, że parametry ustroju są interwałowe, macierze tłumienia, sztywności i sztywności geometrycznej występujące w równaniu również są interwałowe. Ze względu na trudności obliczeniowe rezygnujemy z przedziałowości macierzy bezwładności. Równanie (2) po pominięciu wektora obciążeń zewnętrznych nie uwzględnianego w analizie stateczności ma teraz postać :

$$M\ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + (\bar{K} - \bar{K}_G)q = 0. \tag{3}$$

Równanie (3) należy przekształcić do postaci:

$$\dot{q} = Aq, \tag{4}$$

w której ruch ustroju wokół położenia równowagi będzie opisywała jedna macierz interwałowa. Algorytm transformacji równania (3) zawarty jest w [1]. Ostatecznie po przekształceniach równanie (3) przyjmuje postać :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\overline{K}-\overline{K}_G) & -\overline{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Przemnażając lewostronnie obie strony równania przez macierz $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1}$ otrzymujemy :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(\overline{K}-\overline{K}_G) & -M^{-1}\overline{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Pierwszym krokiem analizy stateczności jest wyznaczenie wartości własnych dla macierzy średniej A_0. Zagadnienie własne sprowadza się do obliczenia wyznacznika :

$$\det\begin{bmatrix} 0-\lambda & I \\ -M^{-1}(K_0-K_{G0}) & -M^{-1}C_0-\lambda \end{bmatrix} = 0. \tag{7}$$

Pomijając wpływ tłumienia, tj. C=0, który zwiększa wartości własnych λ, po rozwinięciu wyznacznika otrzymujemy równanie charakterystyczne, z którego uzyskujemy rozwiązanie :

$$\lambda = 0 \pm i\omega. \tag{8}$$

3.2. Parametryczne równanie ruchu układu prętowego

Dokonując w równaniu (7), opisującym ruch układu drgającego obciążonego dużymi siłami osiowymi, podstawienia wykorzystywanego przy wyznaczaniu częstości drgań własnych, otrzymujemy równanie :

$$(K - K_G - \omega^2 M)q = 0. \tag{9}$$

Jeżeli założymy, że obciążenia są kombinacją liniową parametru intensywności obciążenia S ,otrzymujemy parametryczne równanie ruchu :

$$(K - SK_G - \omega^2 M)q = 0 \tag{10}$$

lub w uproszczonej postaci $A(S, \omega)q = 0$.

Przekształcenie równań ruchu do postaci parametrycznej przynosi wiele korzyści. Macierz $A(S, \omega)$ dla zadanych parametrów jest macierzą symetryczną, układ opisany jest jedną macierzą, dlatego analiza stateczności sprowadza się do zbadania stabilności tylko jednej macierzy $A(S, \omega)$.

Układ opisany równaniem (6) będzie stateczny, jeżeli macierz :

$$A(S,\omega) = (K - SK_G - \omega^2 M) \tag{11}$$

będzie dodatnio określona. Jednym z warunków dodatniej określoności macierzy $A(S,\omega)$ jest, aby $\lambda_{min}(A(S,\omega))\geq 0$. Tak więc analiza stateczności polega na znalezieniu takiego parametru obciążenia krytycznego S_{kryt} układu drgającego z częstością ω, przy którym $\lambda_{min}(A(S)) = 0$.

Równanie (11) umożliwia wyznaczenie i określenie zależności dynamicznego współczynnika obciążenia granicznego $S(\omega)$ układu od częstości ω, z jaką drga analizowany układ.

Przy założeniu $\omega=0$ możemy wyznaczyć statyczny współczynnik obciążenia krytycznego; przyjmując $S = 0$ możemy wyznaczyć częstość drgań własnych.

3.3. Wyznaczanie obciążenia krytycznego układu prętowego o parametrach przedziałowych

Zanim przystąpimy do wyznaczania obciążenia granicznego musimy dla parametrów interwałowych : $\overline{E}$, $\overline{A}$, $\overline{I}$, $\overline{l}$, $\overline{\mu}$ wyznaczyć macierze bezwładności, sztywności i sztywności geometrycznej, których elementy są przedziałowe. Teraz równanie (10) przyjmuje postać:

$$\overline{A}q = 0, \tag{12}$$

gdzie $\overline{A} = \overline{K} - S\overline{K}_G - \omega^2\overline{M}$.

W tym parametrycznym równaniu ruchu wszystkie interwałowe macierze składowe są symetryczne, a więc macierz przedziałowa $\overline{A}(S,\omega)$ również jest symetryczna. Ten warunek jest wymagany przez algorytmy analizy stateczności macierzy przedziałowych, które będą przedstawione w dalszej części rozdziału. Będą to metody, w których obciążenie krytyczne zostanie wyznaczone metodą przyrostową. Wstępna wartość parametru obciążenia $S(\omega)$, dla założonej częstości drgań ω, będzie zwiększana do momentu, kiedy nie będzie spełniony warunek stateczności, czyli do momentu, kiedy przekroczymy obciążenie krytyczne i nastąpi utrata stateczności. Wyznaczony w poprzednim kroku iteracji parametr obciążenia będzie określał poszukiwaną wartość obciążenia krytycznego.

Pierwszą z metod badania stabilności symetrycznych macierzy przedziałowych jest algorytm wymagający sprawdzenia stabilności tylko 2^n macierzy nieinterwałowych. Przedstawił to i potwierdził dowodami matematycznymi Rohn [14]. Przedstawione kryterium mówi, że koniecznym i wystarczającym warunkiem, aby symetryczna przedziałowa macierz $\overline{A}(S)$ opisująca ruch układu wokół położenia równowagi była stabilna, jest, aby każda z macierzy:

$$(A_z)_{ij} = \begin{cases} \overline{A(S)}_{ij} & \text{kiedy} \quad z_i z_j = 1 \\ \underline{A(S)}_{ij} & \text{kiedy} \quad z_i z_j = -1 \end{cases} \tag{13}$$

była stabilna dla każdego $z \in Z$, gdzie:

$$Z = \{z \in R^n;\ z_j \in \{-1,1\} \text{ dla każdego } j\} \tag{14}$$

dla $i, j = 1,2,...,n$.

Reasumując, konstrukcja prętowa opisana równaniem (12) będzie stateczną, jeżeli wszystkie minimalne wartości własne λ_{z_i} obliczone dla każdej macierzy A_z, są większe lub równe zero:

$$\min(\lambda_{z\min}(A_z(S)) \geq 0. \tag{15}$$

Jak widać, kryterium to nie jest skomplikowane numerycznie, a także, jak pokażą to przedstawione w dalszej części pracy przykłady, daje dokładne wyniki.

Powyższe kryterium umożliwia analizę stabilności symetrycznych macierzy interwałowych, a przez to układów, których ruch wokół położenia równowagi opisuje jedna symetryczna macierz, dlatego tak konieczne było przekształcenie równania (7) do postaci parametrycznej (12). Przedstawione twierdzenia jedynie informują o tym, czy układ dla zadanych parametrów opisujących konstrukcję i przyjętego obciążenia jest stateczny czy niestateczny, lecz nie podają wartości tego obciążenia krytycznego.

Kryterium to umożliwia tylko wyznaczenie obciążenia granicznego wspomnianą metodą przyrostową z pewną dokładnością, o której decyduje wielkość przyrostu parametru S.

3.4. Obliczanie wartości własnych symetrycznych macierzy przedziałowych

Obliczanie wartości własnych macierzy przedziałowych jest zadaniem bardzo trudnym. Stosując algorytmy tradycyjnej algebry otrzymujemy wyniki obarczone dużymi błędami, wynikającymi z własności liczb interwałowych. Nowe metody pozwalają jedynie na oszacowanie tych wartości, bardzo często z niezadowalającą nas dokładnością. Dopiero w 1990r. Soh [15] udowodnił twierdzenie, które w sposób dokładny oblicza najmniejszą i największą wartość własną macierzy przedziałowej. Twierdzenie to wymaga wyznaczenia minimalnych i maksymalnych wartości własnych dla 2^{n^2} macierzy utworzonych z kombinacji wszystkich

skrajnych wartości elementów macierzy interwałowej. Wykonanie tak dużej liczby obliczeń jest już dość poważnym problemem numerycznym.

W 1992 r. Hertz [9] podał twierdzenia, które wymagają do wyznaczenia przedziału $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ wykonania jedynie 2^n operacji. Tak znaczne ograniczenie toku obliczeń umożliwia zastosowanie tej metody do badania stateczności układów składających się z wielu elementów skończonych. Inne podejście - patrz [2,6,8,10].

Skrajne wartości własne macierzy przedziałowej $\overline{A} = [a_{ij}]$, $b_{ij} \le a_{ij} \le c_{ij}$ obliczamy w następujący sposób:

$$\overline{\lambda} = \max_{1 \le i \le 2^{n-1}} \overline{\lambda}^i \tag{16}$$

$$\underline{\lambda} = \min_{1 \le i \le 2^{n-1}} \underline{\lambda}^i, \tag{17}$$

gdzie :

$$\overline{\lambda}^i = \max_{x \in B^n} x^T \overline{A}^i x \tag{18}$$

$$\underline{\lambda}^i = \min_{x \in B^n} x^T \underline{A}^i x \tag{19}$$

$$\underline{\lambda}^i = \min_{x \in B^n} x^T \underline{A}^i x \tag{20}$$

$$\overline{A}^i = [\overline{a}_{kl}] = \begin{Bmatrix} c_{kk} & \text{gdy} & k = l \\ c_{kl} & \text{gdy} & x_k x_l \ge 0 \wedge k \ne l \\ b_{kl} & \text{gdy} & x_k x_l < 0 \wedge k \ne l \end{Bmatrix} \tag{21}$$

$$\underline{A}^i = [\underline{a}^i_{kl}] = \begin{Bmatrix} b_{kk} & \text{gdy} & k = l \\ b_{kl} & \text{gdy} & x_k x_l \ge 0 \wedge k \ne l \\ c_{kl} & \text{gdy} & x_k x_l < 0 \wedge k \ne l \end{Bmatrix} \tag{22}$$

$$B^n = \{ x : x \in R^n, \|x\| = 1 \}. \tag{23}$$

Wyznaczenie przedziału, w którym zawierają się wszystkie wartości własne macierzy przedziałowej, pozwala nam na sformułowanie nowego kryterium oceny stateczności układów prętowych opisanych równaniem (12). Układ będzie stateczny, jeżeli :

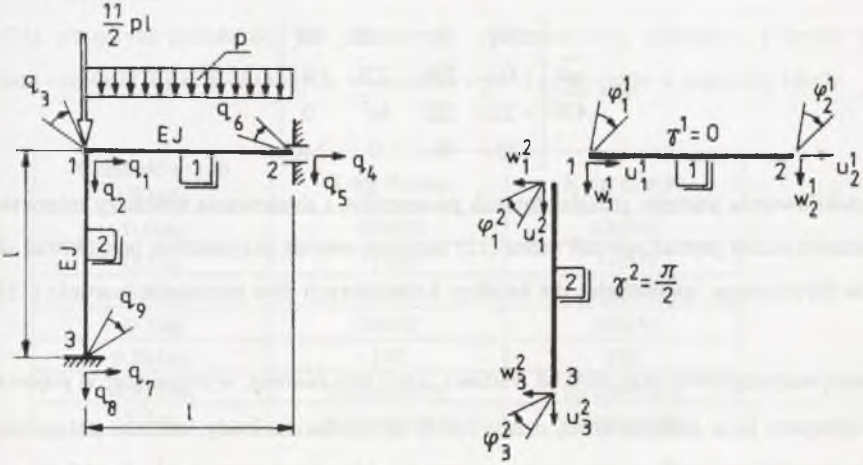
$$\underline{\lambda}(\overline{A}(S)) \ge 0. \tag{24}$$

To kryterium stabilności może nam posłużyć do wyznaczania obciążenia krytycznego S_{kryt} metodą przyrostową. Należy iteracyjnie zwiększać parametr S do momentu utraty stateczności, czyli $\underline{\lambda}(\bar{A}(S)) < 0$; osiągnięta w poprzednim kroku wartość parametru intensywności obciążenia S jest poszukiwaną wartością S_{kryt}. Wielkość kroku iteracji określa nam stopień dokładności wyznaczenia obciążenia krytycznego.

Wszystkie metody wyznaczania obciążenia powodującego utratę stateczności przedstawione w punkcie 2 zostaną udokumentowane przykładami w następnym punkcie pracy. Szczególna uwaga zostanie poświęcona trudnościom w obliczeniach prowadzonych na macierzach, w których elementy są wyznaczone dla parametrów interwałowych..

4. Przykład

Rozważać będziemy układ belkowy, którego schemat statyczny przedstawia rys.1. Przyjęto jednak przedziałowe parametry materiałowe i geometryczne opisujące tę konstrukcję :



Rys.1

$$\overline{E} = [\,2.0500 \cdot 10^{11},\ 2.0500 \cdot 10^{11}\,]\ [\mathrm{Pa}]$$
$$\overline{A} = [\,0.001528,\ 0.001528]\ [\mathrm{m}^2]$$
$$\overline{I} = [\,0.2246 \cdot 10^{-5},\ 0.2434 \cdot 10^{-5}\,]\ [\mathrm{m}^4]$$
$$\overline{\mu} = [\,11.7551,\ 12.2349]\ [\mathrm{kg/mb}]$$
$$\overline{l} = [\,5, 5]\ [\mathrm{m}].$$

Dla takich danych przedziałowe macierze sztywności, sztywności geometrycznej i bezwładności po agregacji i redukcji mają postać :

$$\overline{K} = \frac{\overline{EI}}{\overline{l}^3}\begin{bmatrix} 12 + \frac{\overline{AI}^2}{\overline{I}} & 0 & -6\overline{l} & \frac{\overline{AI}^2}{\overline{I}} \\ 0 & 12 + \frac{\overline{AI}^2}{\overline{I}} & 6\overline{l} & 0 \\ -6\overline{l} & 6\overline{l} & 8\overline{l}^2 & 0 \\ -\frac{\overline{AI}^2}{\overline{I}} & 0 & 0 & \frac{\overline{AI}^2}{\overline{I}} \end{bmatrix}$$

$$\overline{K}_G = S\begin{bmatrix} \frac{6\overline{l}}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2\overline{l}}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M} = \frac{\overline{\mu l}}{420}\begin{bmatrix} 296 & 0 & -22\overline{l} & 70 \\ 0 & 296 & 22\overline{l} & 0 \\ -22\overline{l} & 22\overline{l} & 8\overline{l}^2 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 \end{bmatrix}.$$

Po podstawieniu wartości przedziałowych parametrów i zbudowania macierzy interwałowej parametrycznej postaci równań ruchu (12) możemy metodą przyrostową poszukiwać obciążenia krytycznego, sprawdzając dla każdego kroku iteracji dwa niezależne warunki (15) i (24).

Iterację rozpoczynamy przy ω=0 od wartości $S = 0$ siły osiowej, występującej w pręcie nr 2 i zwiększamy ją w każdym kroku o ΔS=100 N do momentu, kiedy warunki stateczności zostaną niespełnione, czyli nastąpi utrata stateczności. Uzyskana wartość siły $S - \Delta S$ jest poszukiwaną siłą krytyczną. Na podstawie związku pomiędzy siłą osiową w pręcie nr 2 a przyłożonym obciążeniem możemy obliczyć wartość maksymalną współczynnika obciążenia p, po przekroczeniu której następuje utrata stateczności. Otrzymane wyniki zestawione są w tabeli.

Kryterium	Rohna	Hertza
Wartość krytycznej siły osiowej S [N]	109900	109900
Wartość krytycznego obciążenia p [N/m.]	18633	18633
Wartość kryt. siły S dla parametrów Dokładnych [N]	127800	
Wartość kryt. obc. p dla parametrów Dokładnych [N/m]	21667	

Na podstawie otrzymanych wyników możemy zauważyć, jak duży wpływ na wartość obciążenia krytycznego mają tak niewielkie, przedstawione w postaci wielkości przedziałowych, odchylenia tylko niektórych parametrów opisujących konstrukcję.

W tych obliczeniach pominięto wpływ drgań (ω=0). Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że układ drga swobodnie, to wyniki w poniższej tabeli pokażą, że utrata stateczności tej konstrukcji nastąpi już przy częstości $\omega=0.861\omega_0$ (ω_0 – częstość drań własnych konstrukcji o parametrach liczbowych i wynosi 19.1773 rad/s). Kiedy układ drga z tą częstością, wartość siły osiowej w pręcie nr 2 $S \approx 0$, a po jej przekroczeniu macierz $\overline{A}(S=0, \omega=0.861\omega_0)$ traci dodatnią określoność.

Dla przyjętych przedziałowych parametrów wykonano serię obliczeń z różnymi wartościami częstości drgań swobodnych, a uzyskane wyniki zestawiono w poniższej tabeli:

Częstość drgań Układu	S wg Rohna	S wg Hertza
$0.0\omega_0$	109900	109900
$0.3\omega_0$	71600	71600
$0.5\omega_0$	46100	46100
$0.7\omega_0$	20600	20600
$0.861\omega_0$	100	100
$0.862\omega_0$	niestateczny	niestateczny
$1.0\omega_0$	niestateczny	niestateczny

Na podstawie dynamicznego kryterium utraty stateczności omówionego w punkcie 3.1 wiemy, że wyznaczona częstość drgań $\omega(S=0)$ jest częstością drgań własnych konstrukcji, dlatego też częstość $\omega=0.861\omega_0$=16.5116 rad/s możemy uważać za częstość drgań własnych konstrukcji o parametrach przedziałowych.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń w przykładzie wiemy, że przedziałowość parametrów opisujących konstrukcję ma znaczący wpływ na wartość obciążenia krytycznego, lecz nie w jednakowym stopniu, dlatego również w tym przykładzie obliczenia wykonano dla różnych zestawów danych interwałowych układu swobodnie drgającego z udziałem sił osiowych:

$$\overline{E} = [\,2.0500 \cdot 10^{11},\ 2.0500 \cdot 10^{11}\,]\ [\mathrm{Pa}]$$
$$\overline{A} = [\,0.001528,\ 0.001528\,]\ [\mathrm{m}^2]$$
$$\overline{I} = [\,0.234 \cdot 10^{-5},\ 0.234 \cdot 10^{-5}\,]\ [\mathrm{m}^4]$$
$$\overline{\mu} = [\,11.7551,\ 12.2349\,]\ [\mathrm{kg/mb}]$$
$$\overline{l} = [\,5,\ 5.001\,]\ [\mathrm{m}].$$

Wartość krytycznej siły osiowej w pręcie nr 2 i powodujące ją obciążenie :

$$S(\omega = 0) = 16300[\mathrm{N}] \quad p = 2763.7[\mathrm{N/m}]$$

$$S(\omega = 0.1\omega_0) = 3800[\mathrm{N}] \quad p = 644.4[\mathrm{N/m}],$$

a także częstość drgań własnych :

$$\omega(S = 0) = 0.1298\omega_0 = 2.493 \quad [\mathrm{rad/s}].$$

Dla danych :

$$\overline{E} = [\,2.0498 \cdot 10^{11},\ 2.050205 \cdot 10^{11}\,]\ [\mathrm{Pa}]$$
$$\overline{A} = [\,0.001528,\ 0.001528\,]\ [\mathrm{m}^2]$$
$$\overline{I} = [\,0.2316 \cdot 10^{-5},\ 0.2363 \cdot 10^{-5}\,]\ [\mathrm{m}^4]$$
$$\overline{\mu} = [\,11.7551,\ 12.2349\,]\ [\mathrm{kg/mb}]$$
$$\overline{l} = [\,5,\ 5\,]\ [\mathrm{m}]$$

wyznaczono obciążenie krytyczne :

$$S(\omega = 0) = 12000[\mathrm{N}] \quad p = 2034.7[\mathrm{N/m}]$$

$$S(\omega = 0.05\omega_0) = 5800[\mathrm{N}] \quad p = 983.5[\mathrm{N/m}]$$

oraz częstość drgań własnych :

$$\omega(S = 0) = 0.095\omega_0 = 1.823 \quad [\mathrm{rad/s}].$$

Aby możliwe było wykonanie obliczeń w obu przykładach, konieczne było pokonanie barier programowych, ponieważ żaden z dostępnych programów obliczeniowych, w tym także używany do rozwiązywania przykładów program MATLAB, nie są wyposażone w pakiety umożliwiające prowadzenie obliczeń na liczbach przedziałowych.

Specyfika matematyki interwałowej wymaga zdefiniowania nowych działań algebraicznych, dlatego też konieczne było wprowadzenie do programu procedur pozwalających na wykonywanie podstawowych działań na liczbach przedziałowych: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, mnożenia i dzielenia liczby interwałowej przez stałą. Konsekwencją tych trudności są problemy przy budowie przedziałowych macierzy opisujących równanie układu wokół położenia równowagi.

Kłopotów również przysparzał brak metod umożliwiających obliczenie wyznacznika i odwracanie macierzy, co zmusiło nas do zrezygnowania z tradycyjnych metod analizy stateczności.

Konieczne stało się poszukiwanie takich kryteriów, jak podane w punkcie 3, które badanie stateczności układu sprowadza do sprawdzenia stateczności 2^n macierzy nieinterwałowych, dając dokładne wyniki.

5. Podsumowanie

Po przedstawieniu kryteriów analizy stateczności układów o parametrach przedziałowych od strony teoretycznej, a także po pokazaniu na przykładach ich praktycznego zastosowania możemy stwierdzić, że uwzględnienie w parametrach niedoskonałości materiałów oraz błędów montażowych ma bardzo znaczny wpływ na wartość obciążenia powodującego utratę stateczności.

Obliczenia są prowadzone na skrajnych wartościach przedziałów parametrów opisujących konstrukcje. Rozwiązanie wszystkich kombinacji maksymalnych i minimalnych wartości parametrów ogranicza nam zbiór rozwiązań i możemy znaleźć dwie takie kombinacje, które dają wyniki ekstremalne.

Nasuwa się pytanie - jak teoria współgra z rzeczywistością, jakie jest prawdopodobieństwo, że inżynier na budowie spotka się z konstrukcją, w której wszystkie parametry odpowiadają właśnie tej jednej krytycznej kombinacji.

Ta niedoskonałość metody jest konsekwencją stosowania matematyki wolnych interwałów, w której wszystkie skrajne wartości przedziałów są niezależne, a każdy interwał może przyjąć dowolne wartości z przedziału z jednakowym prawdopodobieństwem. Być może lekarstwem na tę niedoskonałość algebry interwałowej jest zastąpienie liczb przedziałowych

liczbami rozmytymi, w których rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia wartości z przedziału nie jest równomierny, lecz preferuje pojawienie się pewnych wartości z większą częstością (np. wartości średniej parametrów).

LITERATURA

1. Praca zbiorowa pod kierunkiem H. Góreckiego: Algorytmy i programy sterowania. WNT, Warszawa 1980, 123-126.
2. Argoun M., B.: On sufficent conditions for the stability of interval matrices, Int. J. Control 44, No.5, 1986, 1245-1250.
3. Borkowski Sz.: Mechanika ogólna – Dynamika Lagrange'a i Hamiltona. Stateczność, Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1642, Gliwice 1993, 245-304.
4. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli. „Arkady", Warszawa 1998.
5. Demidowicz B., P.: Matematyczna teoria stabilności. WNT, Warszawa 1972.
6. Elgindi M., B., El-Gebeily M., A., Moustafa K., A.: Improved margin of stability of interval matrices, J.S.M.E. International Journal Series C. 41, No.1, 1998, 90-93.
7. Gomuliński W., Witkowski M.: Mechanika budowli kurs dla zawansowanych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993, 5-55.
8. Heinen J., A.: Sufficent conditions for stability of interval matrices, Int. J. Control, 39, No.6 ,1984, 1323-1328.
9. Hertz D.: The extreme eigenvalues and stability of real symmetric interval matrices, IEEE Trans. on Automatic Control 37, No.4, 1992, 532-535.
10. Laub A., J., Arnold W., F.: Controllability and observability criteria for multivariable linear second-orders models, IEEEE Trans. on Automatic Control AC-29, No.2, 1984, 163-165.
11. Praca zbiorowa: Mechanika budowli - ujęcie komputerowe. „Arkady:, Warszawa 1992, 40-42, 116-176.
12. Moore R., E.: Interval analysis, Engelwood Cliffs, New Jork 1966.
13. Rakowski G., Kacprzyk G.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993, 244-289, 313-335.

14. Rohn J.: An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices, IEEE Trans. on Automatic Control 41, No.1, 1996, 133-136.

15. Soh C., B.: Necessary and suefficient conditions for stability of symmetric interval matrices, Int. J. Control 51, No. 1, 1990, 243-248.