ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Andrzej MIĄDOWICZ

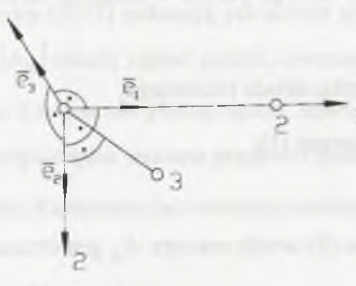
MECHANIKA BRYŁY SZTYWNEJ SPOSOBEM GEOMETRYCZNYM WYŁOŻONA

Streszczenie. W pracy zaproponowano inny niż tradycyjny opis ruchu bryły sztywnej przy wykorzystaniu pojęcia prędkości kątowej, bazujący wyłącznie na geometrii opis ruch. Przy okazji wprowadzono nowe miary bezwładności w ruchu obrotowym, mające więcej symetrii niż tradycyjna macierz bezwładności

GEOMETRICAL MECHANICS OF SOLID BODY

Summary. In the paper a new original method of the description of the solid body motion is proposed. Morever new measures of the rotation inertia are introduced.

Położenie i ruch bryły sztywnej są jednoznacznie określone przez położenie i ruch trzech jej różnych punktów, nie leżących na jednej prostej. Poprzez owe trzy punkty można skonstruować kartezjański układ współrzędnych sztywno związany z bryłą sztywną w sposób następujący:



gdzie:

$$A_{i1}=\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}\ ;\qquad A_{i2}=\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{3}c_i^2}\ ;\qquad A_{i1}=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}A_{j1}A_{k2} \tag{1}$$

ε_{ijk} - symbol permutacyjny Ricciego;

$a_i = r_{i2} - r_{i1}$, $b_i = r_{i3} - r_{i1}$

$r_{i,k}$ - i-ta współrzędna k-tego punktu charakterystycznego;

$c_i = \sum_{j,k}^{3}\varepsilon_{ijk}a_jb_k$

A_{ik} - i-ta współrzędna k-tego wersora ruchomego kartezjańskiego układu współrzędnych sztywno związanego z bryłą sztywną.

Jako bryłę sztywną można uważać ogół punktów, które w zdefiniowanym układzie współrzędnych mają niezmienne w czasie współrzędne. Przy takim opisie ruchu bryły trzeba uwzględniać więzy nałożone na punkty charakterystyczne:

$$\sum_{i=1}^{3}a_i^2 = const,\quad \sum_{i=1}^{3}b_i^2 = const,\quad \sum_{i=1}^{3}a_ib_i = const\,. \tag{2}$$

Ruch bryły sztywnej, a więc również ruch jej punktów charakterystycznych na ogół opisuje się w pewnym inercjalnym układzie kartezjańskim. Relacje między współrzędnymi opisuje zależność:

$$x_j = r_{j1} + \sum_{k=1}^{3}A_{jk}x'_k\,, \tag{3}$$

gdzie:

x_j - j-ta współrzędna w układzie inercjalnym,

x'_k -k-ta współrzędna tego samego punktu w układzie ruchomym sztywno związanym z byłą sztywną,

r_{j1} -j-ta współrzędna początku układu ruchomego,

A_{jk} -macierz określona wzorami (1),

$j,k = 1,2,3$.

Jeśli spełnione są równania (2), wtedy macierz A_{jk} jest ortonormalna, tzn:

$$\sum_{j=1}^{3}A_{ij}A_{kj} = \delta_{jk}\,, \tag{4}$$

gdzie:

$i, k = 1,2,3$,

δ_{ik} - delta Kronekera.

Ruch bryły sztywnej oznacza, że po prawej stronie równości (3) składowe wektora $[r_{j1}]$ i macierzy $[A_{jk}]$ są funkcjami czasu, a równość (4) musi być stale spełniona.

Różniczkując równość (3) otrzymujemy:

$$v_j = \frac{dx_j}{dt} = \frac{dr_{j1}}{dt} + \sum_{k=1}^{3} \frac{dA_{jk}}{dt} x'_k = \frac{dr_{j1}}{dt} - \sum_{i=1}^{3} \omega_{ji} (x_i - r_{i1}), \tag{5}$$

gdzie:

$$\omega_{ji} = \sum_{k=1}^{3} \frac{dA_{jk}}{dt} A_{ik};$$

$i, j = 1,2,3.$

Różniczkując równość (4) stwierdzimy, że macierz $[\omega_{ji}]$ jest antysymetryczna – można więc zdefiniować wektor prędkości kątowej $[\omega_i]$

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ijk} \omega_{jk}, \tag{6}$$

gdzie:

$i = 1,2,3$

i otrzymać znaną zależność [1]

$$v_j = \frac{dr_{j1}}{dt} + \sum_{k,i=1}^{3} \varepsilon_{jki} \omega_k (x_i - r_{i1}). \tag{7}$$

Zauważymy, że do określenia stanu poruszającego się ciała (tzn. położenia i prędkości wszystkich jego punktów) wystarczy znajomość macierzy $[A_{ik}]$ i wektora $[r_{i1}]$. Prędkość kątowa nie jest tu potrzebna. Wzory (5)-(7) pokazują, jak można ją wyznaczyć znając macierz $[A_{jk}]$. Współrzędne macierzy $[A_{jk}]$ muszą czynić zadość równaniom więzów, a współrzędne wektora prędkości kątowej nie. I to jest ich główna zaleta, bowiem wyznaczenia elementów macierzy $[A_{jk}]$, gdy znane są współrzędne wektora prędkości kątowej, nie można w ogólnym przypadku dokonać analitycznie. Konieczne jest bowiem rozwiązanie niestacjonarnego równania różniczkowego

$$\frac{dA_{ij}}{dt} = -\sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{ikl} \omega_l (t) A_{kj}, \tag{8}$$

gdzie:

$i, j = 1,2,3$,

z warunkiem początkowym określonym równością (4). Z powyższego wynika, że prędkość kątowa pozwala jedynie potencjalnie wyznaczyć położenie bryły sztywnej i nie można wprost z nią związać żadnych współrzędnych geometrycznych.

Przy wyznaczaniu energii kinetycznej pominięcie prędkości kątowej znacznie upraszcza obliczenia;

$$E = \frac{1}{2}\int_V \sum_{j=1}^{3} v_j^2 \mu \mathrm{dV}, \tag{9}$$

gdzie:

E - energia kinetyczna,

μ - funkcja opisująca rozkład gęstości masy,

V - objętość bryły sztywnej.

Najprościej wyliczymy energię kinetyczną, jeśli do wzoru (9) wstawimy pierwszą cześć równości (5) oraz założymy, że pierwszy punkt charakterystyczny pokrywa się ze środkiem masy. Otrzymamy wtedy

$$E = \frac{1}{2}\left[m\sum_{i}^{3}\left(\frac{dr_{i1}}{dt}\right)^2 + \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{dA_{ij}}{dt}\frac{dA_{ik}}{dt} I'_{jk} \right], \tag{10}$$

gdzie:

$m = \int_V \mu \mathrm{dV}$ - masa ciała,

$I'_{jk} = \int_V x'_j \, x'_k \, dV$ - pewna niekonwencjonalna miara bezwładności w ruchu obrotowym,

$j, k = 1,2,3$.

Jeśli energię kinetyczną wyznaczymy w sposób konwencjonalny, otrzymamy:

$$E = \frac{1}{2}\left[m\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dr_{i1}}{dt}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega'_i \, \omega'_j \right], \tag{11}$$

gdzie:

I_{ij} - konwencjonalne miary bezwładności w ruchu obrotowym,

$$\omega'_i = \sum_{k=1}^{3} A_{ki}\omega_k \tag{11a}$$

ω'_i - składowe prędkości kątowej w układzie współrzędnych sztywno związanym z bryłą sztywną.

Jeśli uwzględni się, że do wzoru (11a) trzeba wstawić zależności (5) i (6), konwencjonalny sposób wyznaczania energii jest dłuższy i bardziej skomplikowany. Widać nadto, że macierz $\lfloor A_{ij} \rfloor$ jest nieodzowna przy obu sposobach wyznaczania energii kinetycznej. Należy zwrócić też uwagę, że niekonwencjonalne miary bezwładności wyrażają się prostszymi wzorami i mają więcej symetrii. Z faktu, że przy wyznaczaniu energii kinetycznej można zrezygnować z używania prędkości kątowej, można wysnuć wniosek, że całą mechanikę można skonstruować bez tego pojęcia, bowiem równania ruchu obrotowego, gdzie występuje prędkość kątowa, jak np. prawo zmienności krętu czy równania ruchu kulistego Eulera, można w każdym przypadku traktować jako szczególny przykład równań ruchu w postaci równań Lagrange'a II rodzaju dla odpowiednio dobranych współrzędnych uogólnionych.

Usprawiedliwieniem dla konwencjonalnego stosowania prędkości kątowej w mechanice jest wielowiekowa tradycja i fakt, że w najczęściej stosowanym ruchu obrotowym, gdzie oś obrotu ma stały kierunek, równanie (8) daje się analitycznie scałkować, a z prędkością kątową można związać współrzędną geometryczną w postaci kąta obrotu. Pominięcie prędkości kątowej jest racjonalne zwłaszcza wtedy, gdy równania ruchu są generowane i rozwiązywane za pomocą komputera. Daje to wymierne korzyści w czasie obliczeń i w zajmowanej przez program pamięci.

Jubileusz Profesora Szczepana Borkowskiego zmobilizował autora do napisania tej pracy jeszcze w tym tysiącleciu.

LITERATURA

1. Skalmierski B.: Mechanika. PWN, Warszawa 1977.

Abstract

In the paper a new original method of the description of the solid body motion is proposed. Morever new measures of the rotation inertia are introduced. Such description of motion is simpler and more illustrative the traditional one.