ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Andrzej POWNUK

ZASTOSOWANIE REGULARNYCH PRZEDZIAŁOWYCH MACIERZY JACOBIEGO DO OBLICZANIA EKSTREMALNYCH WARTOŚCI WIELKOŚCI MECHANICZNYCH CZĘŚĆ I - PODSTAWY TEORETYCZNE

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwie nowe metody obliczania ekstremalnych wartości funkcji uwikłanych $z_i(t)$. Jeśli pewne specjalne przedziałowe macierze Jacobiego będą regularne to znak pochodnych cząstkowych $\frac{\partial z_i(t)}{\partial t_j}$ będzie stały dla wszystkich $t \in \mathbf{T}$ i ekstremalne wartości $\underline{z}_i = inf\{z_i(t): t \in \mathbf{T}\}$, $\overline{z}_i = sup\{z_i(t): t \in \mathbf{T}\}$ można obliczyć na podstawie wierzchołków przedziału $\mathbf{T} \in IR^n$.

APPLICATION OF REGULAR INTERVAL JACOBIAN MATRIX TO CALCULATION OF EXTREME VALUES OF MECHNICAL QUANTITIES. PART I - THEORETICAL BACK-GROUNDS

Summary. In this paper, two new methods for calculation of extreme values of implicit functions $z_i(t)$ are presented. If some special interval matrices are regular then sign of partial derivatives $\frac{\partial z_i(t)}{\partial t_j}$ is constant for all $t \in \mathbf{T}$ and extreme values $\underline{z}_i = inf\{z_i(t): t \in \mathbf{T}\}$, $\overline{z}_i = sup\{z_i(t): t \in \mathbf{T}\}$. We can calculate using vertices of interval $\mathbf{T} \in IR^n$.

1. Wprowadzenie

Problem modelowania tolerancji w układach mechanicznych można sprowadzić do zagadnienia znalezienia obrazu obszaru tolerancji $\mathbf{T} \subset R^m$ poprzez uwikłane odwzorowania $z(t)$ określone jako rozwiązanie układu nieliniowych równań algebraicznych $F(z,t) = 0$ (gdzie $F: R^n \times R^m \to R^n$). Zbiór wszystkich rozwiązań określony jest następująco:

$$M = \{(z,t): F(z,t) = 0, t \in \mathbf{T}\} = \{(z(t),t): t \in \mathbf{T}\}. \tag{1}$$

W pracy opisane są teoretyczne podstawy nowej metody obliczania parametrów $\underline{z}_i, \overline{z}_i$:

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \tag{2}$$

2. Przedziałowe metody obliczania ekstremalnych wartości funkcji uwikłanych oparte na sprawdzeniu monotoniczności

Podstawowym wynikiem tej pracy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Niech dana jest ciągła funkcja $F : R^n \times R^m \ni (z,t) \to F(z,t) \in R^n$ oraz m-wymiarowy przedział $\mathbf{T} = \underset{i=1}{\overset{m}{\times}} [\underline{t}_i, \overline{t}_i] \subset R^m$. Na podstawie wierzchołków przedziału $\mathbf{T}$ określamy n-wymiarowy przedział $\mathbf{Z} = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} [\underline{z}_i, \overline{z}_i] \subset R^n$, gdzie

$$\underline{z}_i = min\{z_i(t^w) : t^w \in V\},\ \overline{z}_i = max\{z_i(t^w) : t^w \in V\}. \tag{3}$$

V jest zbiorem wierzchołków przedziału $\mathbf{T}$ (odpowiednie wierzchołki można wybrać na podstawie znaku pochodnych $\frac{\partial z_i(t^*)}{\partial t_j}$ obliczonych dla dowolnego $t^* \in \mathbf{T}$). Jeśli:

1) $w(\mathbf{Z}_i) \neq 0$ dla i=1,...,n,

2) funkcja F jest różniczkowalna w sposób ciągły w każdym punkcie pewnego otwartego zbioru $U \subset R^n \times R^m$,

3) dla każdego $t_0 \in \mathbf{T}$ równanie $F(z,t)=0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $z(t_0)$. (w układach mechanicznych własność ta jest zwykle zagwarantowana),

4) przedziałowe rozszerzenie następujących macierzy Jacobiego

$$\frac{\partial F(\mathbf{Z}_1,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_m)}{\partial(z_1,...,z_n)},\ \frac{\partial F(\mathbf{Z}_1,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_m)}{\partial(z_1,...,z_{i-1},t_j,z_{i+1},...,z_n)} \text{ dla i=1,...,n j=1,...,m} \tag{4}$$

są regularne, to

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \text{ dla i=1,...,n.} \tag{5}$$

Dowód

Z różniczkowalności funkcji F wynika, że jakobian $J(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial(z,t)} \in R^n \times R^n \times R^m$ (n-wierszy, n+m kolumn) jest funkcją ciągłą $J : R^n \times R^m \supset \mathbf{X} \ni x \to J(x) \in R^n \times R^n \times R^m$. Zatem dowol-

ny podwyznacznik $M(x)=det\left(\frac{\partial F(x)}{\partial(x_{a_1},...,x_{a_n})}\right)$ ($M: R^n \times R^m \supset \mathbf{X} \ni x \to M(x) \in R$) macierzy Jacobiego jest również funkcją ciągłą w **X**. Z własności przedziałowego rozszerzenia funkcji oraz regularności macierzy (4) wynika, że:

$$\forall x^* \in \mathbf{X}, det\left(\frac{\partial F(x^*)}{\partial z}\right) \neq 0, det\left(\frac{\partial F(x^*)}{\partial(x_{a_1},...,x_{a_n})}\right) \neq 0 \tag{6}$$

Na podstawie własności Darboux funkcji ciągłych wszystkie wyznaczniki

$$det\left(\frac{\partial F(x)}{\partial(x_{a_1},...,x_{a_n})}\right) \tag{7}$$

mają taki sam znak dla wszystkich $x^* \in \mathbf{X}$. Z założeń (1-3) oraz twierdzenia Gavesa [3] wynika, że pochodne funkcji uwikłanych można obliczyć na podstawie wzoru:

$$\frac{\partial z_i(x)}{\partial t_j} = -\left|\frac{\partial F(x)}{\partial(z_1,...,z_{i-1},t_j,z_{i+1},...,z_n)}\right| \cdot \left|\frac{\partial F(x)}{\partial z}\right|^{-1} \tag{8}$$

Ponieważ oba wyznaczniki mają stałe znaki, zatem pochodne $\frac{\partial z_i(t)}{\partial t_j}$ mają również stałe znaki dla wszystkich $t \in \mathbf{T}$. Zatem wszystkie funkcje

$$z_i(t_j) = z_i(t_1^*,...,t_{j-1}^*,t_j,t_{j+1}^*,...,t_m^*) \tag{9}$$

są monotoniczne w **T** przy dowolnym wyborze wartości $t_i^* \in [\underline{t}_i, \overline{t}_i]$. Jeśli funkcje (9) są monotoniczne, to ich ekstremalne wartości można obliczyć na podstawie wierzchołków przedziału **T**. Poszukiwanie odpowiednich wierzchołków można znacznie skrócić, jeśli znamy wartości pochodnych $\frac{\partial z_i(t^*)}{\partial t_j}$ w dowolnym punkcie $t^* \in \mathbf{T}$. Pochodne te można obliczyć na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial t_i} + \frac{\partial F_k}{\partial t_i} = 0 \quad \text{gdzie k=1,...,n i i=1,...,m} \tag{10}$$

Uwaga. Aby funkcja $z_i(t_j) = z_i(t_1^*,...,t_{j-1}^*,t_j,t_{j+1}^*,...,t_m^*)$ była monotoniczna przy dowolnym wyborze wartości $t_i^* \in [t_i^-, t_i^+]$, wystarczy aby przedziałowe rozszerzenia następujących dwóch macierzy Jacobiego

$$\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z}, \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial(z_1,...,z_{i-1},t_j,z_{i+1},...,z_n)} \tag{11}$$

były regularne. Jest to bezpośredni wniosek ze wzoru (8). Własność tę można wykorzystać w przypadku, gdy nie wszystkie macierze (11) są regularne.

3. Obliczanie ekstremalnych wartości funkcji uwikłanych–przypadek jednowymiarowy

Dalej będziemy rozpatrywali tylko przypadki, w których uwikłana funkcja $z: R \supset \mathbf{T} \to R^n$ jest krzywą w przestrzeni R^n. Zakładamy, że funkcja z jest ciągła w $\mathbf{T}$ oraz różnowartościowa.

Twierdzenie 2

Niech dane jest ciągła funkcja $z: R \supset \mathbf{T} \to R^n$ oraz n-wymiarowy przedział $\mathbf{Z} = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} [\underline{z}_i, \overline{z}_i]$,określony następująco

$$\underline{z}_i = min\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\},\ \overline{z}_i = max\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\}. \tag{12}$$

Przedział $\mathbf{X}$ określony jest jako $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \times \mathbf{T} \subset R^n \times R$. Jeśli

1) $w(\mathbf{Z}_i) \neq 0$ dla i=1,...,n,

2) istnieje taki punkt $t^* \in int(\mathbf{T})$, że $z(t^*) \in int(\mathbf{Z})$,

3) $\partial\mathbf{X} \cap M = \{(z(\underline{t}), \underline{t}), (z(\overline{t}), \overline{t})\}$, gdzie zbiór M określony jest następująco:

$$M = \{(z(t), t) : t \in \mathbf{T}\}, \tag{13}$$

to

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \text{ dla i=1,...,n} \tag{14}$$

Dowód

Z założenia (1) i (3) wynika, że zbiory M i $\partial\mathbf{X}$ posiadają tylko dwa punkty wspólne. Niech istnieje taki $\tilde{t} \in \mathbf{T}$, że punkt $(z(\tilde{t}), \tilde{t}) \notin \mathbf{X}$. Wtedy istnieje takie „i", że $z_i(\tilde{t}) < \underline{z}_i$ (lub $z_i(\tilde{t}) > \overline{z}_i$). Ponieważ funkcja $z_i(t)$ jest ciągła, zatem przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy $z_i(t^*)$ oraz $z_i(\tilde{t})$. Czyli istnieje takie $\tilde{\tilde{t}} \in \mathbf{T}$, że $z_i(\tilde{\tilde{t}}) = \underline{z}_i$. Zatem zbiór $\partial\mathbf{X} \cap M$ składałby się z trzech punktów $\{(z(\underline{t}), \underline{t}), (z(\overline{t}), \overline{t}), (z(\tilde{\tilde{t}}), \tilde{\tilde{t}})\}$. Jest to sprzeczne z założeniem (3). Ze sprzeczności tej wynika następujący wniosek:

$$\forall t \in int(\mathbf{T})\ \ \underline{z}_i < z_i(t) < \overline{z}_i \text{ dla i=1,...,n} \tag{15}$$

Ponieważ $\underline{z}_i = min\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\}$, $\overline{z}_i = max\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\}$, to

$$\forall\, t \in int(\mathbf{T})\ \ \underline{z}_i \le z_i(t) \le \overline{z}_i \ \text{ dla i=1,...,n,} \tag{16}$$

czyli funkcje $z_i(t)$ osiągają swoje kresy w przedziale **T**, co kończy dowód.

Twierdzenie 3

Niech dana jest funkcja $F : R^n \supset U \supset \mathbf{X} \ni x \to F(x) \in R^n$ różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otwartym zbiorze U. Jeśli istnieją dwa punkty $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ ($x_1 \ne x_2$) takie, że

$$F(x_1) = F(x_2) = 0, \tag{17}$$

to macierz $\dfrac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}$ nie jest regularna.

Dowód

Na podstawie założeń twierdzenia możemy napisać:

$$0 = F(x_2) - F(x_1). \tag{18}$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą $\varphi(s) = F(x_1 + s(x_2 - x_1))$. Dalej możemy napisać:

$$0 = F(x_2) - F(x_1) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)ds, \tag{19}$$

$$\int_0^1 \varphi'(s)ds = \int_0^1 F'(x_1 + s(x_2 - x_1))ds \cdot (x_2 - x_1). \tag{20}$$

Z twierdzenia o wartości średniej dla całek otrzymujemy:

$$\int_0^1 \frac{\partial F_i(x_1 + s(x_2 - x_1))}{\partial x_j} ds = \frac{\partial F_i(x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1))}{\partial x_j}, \text{ gdzie } s_{ij}^* \in [0,1]. \tag{21}$$

Ponieważ, gdy $s_{ij}^* \in [0,1]$, to $x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1) = x_{ij}^* \in \mathbf{X}$ oraz

$$\widetilde{A}_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F_i(x_1 + s(x_2 - x_1))}{\partial x_j} ds = \frac{\partial F_i(x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1))}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i(x_{ij}^*)}{\partial x_j} \in \frac{\partial F_i(\mathbf{X})}{\partial x_j}, \tag{22}$$

czyli

$$\widetilde{A} \in \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}. \tag{23}$$

Z (21) i (22) mamy:

$$0 = F(x_2) - F(x_1) = \widetilde{A} \cdot (x_2 - x_1). \tag{24}$$

Ponieważ $x_2 - x_1 \ne 0$, zatem równość (24) może zachodzić tylko wtedy, gdy:

$$det(\widetilde{A}) = 0. \tag{25}$$

Ponieważ $\tilde{A} \in \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}$, zatem macierz $\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}$ nie może być regularna. Co kończy dowód.

Twierdzenie 4

Niech $F : R^n \times R \supset U \ni (z,t) \to F(z,t) \in R^n$ gdzie $t \in \mathbf{T}$ oraz $\mathbf{Z} = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} [\underline{z}_i, \overline{z}_i]$, gdzie

$$\underline{z}_i = min\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\},\ \overline{z}_i = max\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\} \text{ dla i=1,...,n.} \tag{26}$$

Przedział $\mathbf{X}$ określony jest jako $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \times \mathrm{T} \subset R^n \times R$.

Jeżeli:

1) $w(\mathbf{Z}_i) \neq 0$ dla i=1,...,n,

2) F jest różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otwartym zbiorze $U \supset \mathbf{X}$,

3) dla każdego $t \in \mathbf{T}$ równanie $F(z,t) = 0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $z(t)$, (w układach mechanicznych własność ta jest zwykle zagwarantowana),

4) wszystkie macierze

$$\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z},\ \frac{\partial F(\mathbf{Z}_1,...,\underline{z}_i,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T})}{\partial(z_1,...,z_{i-1},t,z_{i+1},...,z_n)},\ \frac{\partial F(\mathbf{Z}_1,...,\overline{z}_i,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T})}{\partial(z_1,...,z_{i-1},t,z_{i+1},...,z_n)} \text{ dla i=1,...,n} \tag{27}$$

są regularne,

5) istnieje takie $t^* \in \mathbf{T}$, że $(z(t^*), t^*) \in int(\mathbf{X})$,

to

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \text{ dla i=1,...,n.} \tag{28}$$

Dowód

Na podstawie różniczkowalności funkcji F oraz regularności macierzy $\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z}$ i twierdzenia Gavesa wynika, że uwikłana funkcja $z(t)$ jest ciągła oraz różniczkowalna. Z założenia zbiór $\partial\mathbf{X}$, $M = \{(z(t),t) : t \in \mathbf{T}\}$ mają co najmniej dwa punkty wspólne:

$$(z(\underline{t}), \underline{t}), (z(\overline{t}), \overline{t}). \tag{29}$$

Z założenia (1) wynika, że każda ściana przedziału $\mathbf{X}$ zawiera tylko jeden z punktów (29). Współrzędne punktów (29) są rozwiązaniami następujących układów równań (patrz rys.1)

$$\begin{cases} F(z,t) = 0 \\ z_i - \underline{z}_i = 0 \end{cases},\ \begin{cases} F(z,t) = 0 \\ z_i - \overline{z}_i = 0 \end{cases} \text{ dla i=1,...,n.} \tag{30}$$

Jeśli równania (30) będą miały więcej niż jedno rozwiązanie, to zbiór $\partial\mathbf{X} \cap M$ będzie składał się z więcej niż dwu punktów (29). Równania (30) można zapisać w postaci:

$$F\left(z_1,\ldots,z_{i-1},\underline{z}_i,z_{i+1},\ldots,z_n,t\right)=0,\ F\left(z_1,\ldots,z_{i-1},\overline{z}_i,z_{i+1},\ldots,z_n,t\right)=0. \tag{31}$$

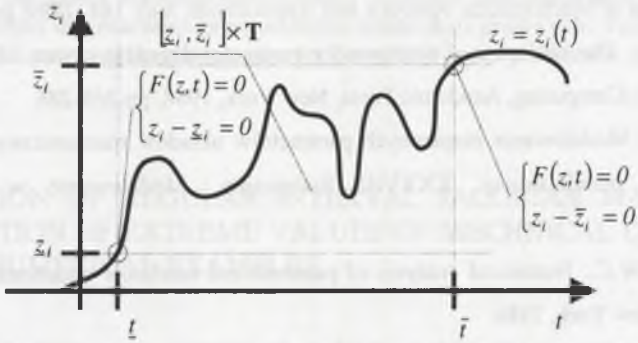
Na podstawie twierdzenia 3, jeśli macierze Jacobiego układów równań (31)

$$\frac{\partial F\left(\mathbf{Z}_1,\ldots,\underline{z}_i,\ldots,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}\right)}{\partial\left(\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_{i-1},t,\underline{z}_{i+1},\ldots,\underline{z}_n\right)},\ \frac{\partial F\left(\mathbf{Z}_1,\ldots,\overline{z}_i,\ldots,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}\right)}{\partial\left(\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_{i-1},t,\overline{z}_{i+1},\ldots,\overline{z}_n\right)}\ \text{dla i=1,...,n} \tag{32}$$

będą regularne, to układy te posiadają jednoznaczne rozwiązanie. Czyli zbiór $\partial\mathbf{X}\cap M$ składa się z dwu punktów $(z(\underline{t}),\underline{t}),(z(\overline{t}),\overline{t})$. Ponieważ na podstawie założenia (5) istnieje punkt $(z(t^*),t^*)\in int(\mathbf{X})$, to uwikłana funkcja $z=z(t)$ spełnione są wszystkie założenia tw. 4 czyli:

$$\underline{z}_i=inf\{z_i(t):t\in\mathbf{T}\},\ \overline{z}_i=sup\{z_i(t):t\in\mathbf{T}\}\ \text{dla i=1,...,n,} \tag{33}$$

co kończy dowód.



Rys.1. Funkcja $z_i(t)$ spełnia warunek $\underline{z}_i<z_i(t)<\overline{z}_i$ dla każdego $t\in(\underline{t},\overline{t})$

Fig.1. Function $z_i(t)$ satisfy condition $\underline{z}_i<z_i(t)<\overline{z}_i$ for all $t\in(\underline{t},\overline{t})$

4. Wnioski

W pracy przedstawiono teoretyczne podstawy dwu nowych metod modelowania tolerancji w układach mechanicznych. Opracowane algorytmy można zastosować do układów mechanicznych, których matematyczny model dany jest za pomocą układu nieliniowych równań algebraicznych postaci $F(z,t)=0$, gdzie $F:R^n\times R^m\ni(z,t)\to F(z,t)\in R^n$ i $t\in\mathbf{T}\subset R^m$. Inne przedziałowe metody rozwiązywania układów równań zależnych od parametrów z pewnego zbioru $\mathbf{T}\subset R^m$ można znaleźć w pracach [1,2,4-7]. Klasyczną metodą poszukiwania zbioru rozwiązań $M=\{(z,t):F(z,t)=0,t\in\mathbf{T}\}$ jest metoda kontynuacji [8]. Do znalezienia rozwiązań układów nieliniowych równań algebraicznych można również wykorzystać wyniki teorii multifunkcji [9]. Zastosowania przedstawionych tutaj algorytmów w mechanice opisane są w drugiej części tej pracy.

LITERATURA

1. Gay D.M.: Computing Preturbation Bounds for Nonlinear Algebraic Equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.20, No.3, 1983, pp.638-651
2. Kearfott R.B., Xing Z.: An Interval Method Step Control for Continuation Methods, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.31, No.3, 1994, s.892-914
3. Maurin K.: Analiza. Część I. Elementy. PWN, Warszawa 1991
4. Neumaier A.: Interval methods for system of equations, Cambridge, University Press, Cambridge, 1990
5. Neumaier A.: Rigorous Sensitivity Analysis for Parameter-Dependent Systems of equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 144, 1989, pp.16-25
6. Neumaier A.: The enclosure of solutions for parameter-depedent system of equations, in Reliability in Computing, Academic Press, New York, 1988, pp.269-286
7. Pownuk A.: Modelowanie niepewnych parametrów układów mechanicznych metodami matematyki przedziałowej. XXXVIII Sympozjon „Modelowanie w mechanice", Wisła 1999
8. Rheinboldt W.C.: Numerical analysis of parametrized nonlinear equations. John Wiley and Sons, New York, 1986
9. Saint-Pierre P.: Newton and Other Continuation Methods for Multivalued Inclusions. Set-Valued Analysis, Vol.3, 1995, pp.143-156

Abstract

In this paper, theoretical back-grounds of modelling interval uncertainties using interval arithmetic are presented. It is shown that if some special interval matrices are regular, then implicit functions $z_i(t)$ are monotone in interval **T**. Using these facts, we can calculate extreme values of the functions $z_i(t)$ where $t \in \mathbf{T}$ and $F(z(t),t)=0$ (i.e. we can calculate numbers $\underline{z}_i = sup\{z_i(t): t \in \mathbf{T}\}$, $\overline{z}_i = sup\{z_i(t): t \in \mathbf{T}\}$ i=1,...,n). We can apply the presented method in sensitivity analysis of structures. Engineering applications of these algorithms are presented in the next part of this paper.