ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Józef Joachim TELEGA

# PŁYTY CIENKIE O MINIMALNEJ PODATNOŚCI

Panu Profesorowi Szczepanowi Borkowskiemu z okazji 70-tej rocznicy urodzin, z podziękowaniem za wprowadzenie do nowoczesnej mechaniki ciała stałego i życzliwość.

**Streszczenie**. Przedstawiono podstawowe pojęcia związane z projektowaniem płyt dwuskładnikowych o minimalnej podatności. Płytę optymalną otrzymuje się poprzez relaksację odpowiedniego funkcjonału w powiązaniu z homogenizacją. Rozpatrzono również zagadnienie optymalizacji kształtu płyt o minimalnej podatności. Szczególnym przypadkiem tego ostatniego zagadnienia są płyty o małej objętości. Wykazano, że płyty takie są płytami idealnie usztywniającymi się.

# THIN PLATES OF MINIMAL COMPLIANCE

**Summary**. Basic motions related to the optimal design of two-phase plates of minimal compliance have been discussed. The optimal design is linked with the relaxation and homogenization of the corresponding functional. The shape optimization of plates of minimal compliance has also been considered. It has been shown that plates of small volume are perfectly locking plates.

## 1. Wprowadzenie

Jedno z istotnych i ciekawych zagadnień dotyczących płyt cienkich można sformułować następująco: niech będą dane dwa materiały o zadanej całkowitej objętości $c$. Niech będzie zadany obszar $\Omega$, będący płaszczyzną środkową płyty. Należy tak rozłożyć materiały, aby całkowita podatność płyty, czyli praca obciążenia zewnętrznego, przyjmowała wartość minimalną. W ten sposób otrzymuje się płyty najsztywniejsze, por. [7]. Zagadnienie tak sformułowane nie posiada w ogólności rozwiązania, czyli problem jest źle postawiony. Aby zagadnienie było dobrze postawione należy dokonać tzw. relaksacji odpowiedniego funkcjonału. Z fizycznego punktu widzenia relaksacja oznacza, że płyta o minimalnej podatności posiada mikrostrukturę. Matematycznie osiąga się to przez wykorzystanie homogenizacji.

Zagadnienie projektowania optymalnego otrzymuje się wtedy gdy płyta zbudowana jest tylko z jednego materiału. Oznacza to, że w mikroskali dopuszczamy istnienie pustek. W skrajnym przypadku, gdy c jest „małe", okazuje się, że płyta optymalna jest płytą idealnie usztywniającą się (ang. perfectly locking plate). W tym ostatnim modelu związek konstytutywny wiąże tensor zmiany krzywizny z tensorem prędkości momentów. Innymi słowy płyty optymalne o małej objętości nie są płytami sprężystymi.

## 2. Płyty dwuskładnikowe o minimalnej podatności: relaksacja

Oznaczmy przez $\Gamma$ brzeg obszaru $\Omega$, tzn. $\Gamma = \partial\Omega$. Zakładamy, że płyta jest utwierdzona na części $\Gamma_0$ brzegu, czyli

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_0, \tag{2.1}$$

gdzie $w$ oznacza przemieszczenie pionowe płyty, a $\boldsymbol{n} = (n_\alpha)$ jest wektorem normalnym do brzegu $\Gamma$ i skierowanym na zewnątrz obszaru $\Omega$. Załóżmy, ze płytę należy zbudować z dwuskładnikowego materiału izotropowego, czyli tensor sztywności $\boldsymbol{D}$ ma postać:

$$\boldsymbol{D} = \chi_1(x)\boldsymbol{D}_1 + \chi_2(x)\boldsymbol{D}_2, \tag{2.2}$$

gdzie $\chi_1(x) + \chi_2(x) = 1$, $x \in \Omega$. Funkcja $\chi_1$ oznacza funkcję charakterystyczną obszaru zajmowanego przez materiał (1); definicja funkcji $\chi_2$ jest podobna (w odniesieniu do materiału (2)). W całej pracy wskaźniki greckie przyjmują wartości 1,2. Izotropia oznacza, że

$$\boldsymbol{D}_\alpha = 2k_\alpha \boldsymbol{I} + 2\mu_\alpha \mathbf{I}, \tag{2.3}$$

gdzie

$$I_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu}, \qquad \mathbf{I}_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\sigma\mu}\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu}). \tag{2.4}$$

Pole momentów $\boldsymbol{M} = (M_{\alpha\beta})$ nazywamy polem statycznie dopuszczalnym, jeśli $\boldsymbol{M} \in S(\Omega)$, gdzie

$$S(\Omega) = \{\boldsymbol{M} \in L^2(\Omega, \mathbb{E}^s_2) \mid \int_\Omega M_{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta}(\upsilon)dx = \int_\Omega q\upsilon dx, \forall \upsilon \in V(\Omega)\}, \tag{2.5}$$

przy czym $V(\Omega)$ oznacza zbiór przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych:

$$V(\Omega) = \{\upsilon \in H^2(\Omega) \mid \upsilon = 0, \ \frac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \ \text{na} \ \Gamma_0\}. \tag{2.6}$$

Tutaj $\mathbb{E}_2^s$ oznacza przestrzeń symetrycznych macierzy $2\times 2$; $\boldsymbol{M}(x)\in\mathbb{E}_2^s$, $x\in\Omega$. Jeśli chodzi o tensor krzywizny $\kappa$, to w punkcie $x\in\Omega$ będziemy pisać, że $\kappa(x)\in\mathbb{E}_s^2$.

Dla płyt cienkich i małych przemieszczeń mamy

$$\kappa_{\alpha\beta}(\upsilon)=-\upsilon_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}. \tag{2.7}$$

Wariacyjna postać zagadnienia równowagi płyty jest następująca:

$$(P)\left|\begin{array}{l}\text{znaleźć}\quad w\in V(\Omega)\ \text{ takie, że}\\ a(w,\upsilon)=f(\upsilon),\quad \forall\,\upsilon\in V(\Omega)\end{array}\right.,$$

gdzie

$$a(w,\upsilon)=\int_\Omega D_{\alpha\beta\lambda\mu}\kappa_{\alpha\beta}(w)\kappa_{\lambda\mu}(\upsilon)dx;\ w,\upsilon\in H^2(\Omega), \tag{2.8}$$

$$f(\upsilon)=\int_\Omega q\upsilon dx. \tag{2.9}$$

Z postaci funkcjonału $f$ wnioskujemy, że na płytę działa obciążenie rozłożone $q$.

Funkcjonał $J{:}L^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}^1$,

$$J(\chi_2)=f(w(\chi_2)), \tag{2.10}$$

nosi nazwę *całkowitej podatności* płyty. Jego argumentem jest funkcja $\chi_2$, która określa rozkłady materiałów (1) i (2) w obszarze $\Omega$; przypomnijmy, iż $\chi_1=1-\chi_2$. Jeśli $\chi_2$ jest dane, to zadanie $(P)$ można rozwiązać, a następnie, mając $w(\chi_2)$, obliczyć $J(\chi_2)$.

Niech $c$ oznacza pewną dodatnią stałą. Zagadnienia minimalnej podatności formułuje się następująco:

$$\min\{J(\chi_2)\,|\,\chi_2\in L^\infty(\Omega,\{0,1\}),\ \int_\Omega\chi_2dx=c,\ w\text{ - rozwiązanie zadania }(P)\}. \tag{2.11}$$

Korzystając z twierdzenia Castigliano można zadanie (2.11) przekształcić do równoważnej postaci

$$\min_{\chi_2\in L^\infty(\Omega,\{0,1\})}\ \min_{M\in S(\Omega)}\int_\Omega(C_{\alpha\beta\lambda\mu}M_{\alpha\beta}M_{\lambda\mu}+\lambda\chi_2)dx, \tag{2.12}$$

gdzie $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}^{-1}$, zaś $\lambda$ jest mnożnikiem Lagrange'a. Korzystając ze słynnego twierdzenia Rockafellara [7,9] otrzymujemy:

$$\min_{M\in S(\Omega)}\int_\Omega\min\{\boldsymbol{M}{:}(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{M})+\lambda,\ \boldsymbol{M}{:}(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{M})\}dx, \tag{2.13}$$

gdzie

$$C_\alpha = \frac{1}{2}K_\alpha \boldsymbol{I} + \frac{1}{2}L_\alpha \mathbf{I}, \quad K_\alpha = (k_\alpha)^{-1}, \quad L_\alpha = (\mu_\alpha)^{-1}. \tag{2.14}$$

Przyjmujemy następujące uporządkowanie

$$k_2 > k_1, \quad \mu_2 > \mu_1 .$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że funkcja $\chi_2$ przyjmuje wartość 1 w podobszarze $\Omega_2$ zajmowanym przez materiał (2), oraz zero w $\Omega \setminus \Omega_2$.

Funkcja podcałkowa we wzorze (2.13) jest *niewypukła*, a samo zadanie jest źle postawione, por. [7]. Wynika stąd konieczność relaksacji interesującego nas funkcjonału. Można wykazać, że zrelaksowana postać zadania projektowania płyty cienkiej na minimum podatności jest następująca:

$$\min_{m_2 \in L^\infty(\Omega;[0,1])} \min_{D \in \overline{G^{per}_{m_2}}} \max_{\upsilon \in V(\Omega)} \int_\Omega [2q\upsilon - D_{\alpha\beta\lambda\mu}(x)\kappa_{\alpha\beta}(\upsilon)\kappa_{\lambda\mu}(\upsilon) + \lambda m_2(x)]dx . \tag{2.15}$$

Zbiór $\overline{G^{per}_{m_2}}$ oznacza domknięcie zbioru płyt o mikrostrukturze periodycznej, przy czym udział fazy drugiej wynosi $m_2(x)$, $x \in \Omega$. Zwróćmy uwagę na fakt, że w ostatnim zadaniu funkcja $m_2$ przyjmuje wartości z przedziału [0,1]. Można wykazać, że minimum po $\boldsymbol{D}$ i maksimum po $\upsilon$ są przemienne. Dowód tego faktu nie jest prosty; jest on ważny ze względów numerycznych, por. [7].

## 3. Optymalizacja kształtu

Rozpatrzmy zagadnienie optymalizacji kształtu płyty Kirchhoffa o minimalnej podatności. Tym razem zakładamy, że płyta poddana jest momentom zaginającym $M_n^0$ i sile poprzecznej $Q^0$ działającymi wzdłuż $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. Płyta jest utwierdzona na części $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ brzegu. Objętość płyty jest zadana. Tensor sztywności $\boldsymbol{D}$ jest izotropowy, stały w podobszarach i ma postać:

$$\boldsymbol{D}(x) = 2k(x)\boldsymbol{I} + 2\mu(x)\mathbf{I}, \tag{3.1}$$

gdzie $x = (x_\alpha) \in \Omega$. Zagadnienie relaksacji zostało przedyskutowane w monografii [7], por. również [1]. Zadanie zrelaksowane można otrzymać przechodząc formalnie do zera z $k_1$ i $\mu_1$ w zadaniu rozpatrzonym w punkcie poprzednim. Wnioskujemy stąd, że projekt optymalny dopuszcza pustki w zakresie mikroskali, czyli w tych podobszarach, gdzie $k_1 = 0$, $\mu_1 = 0$.

Przejdźmy do sformułowania zadania zrelaksowanego. Oznaczmy przez $\theta$, $\theta \in L^\infty(\Omega,[0,1])$ udział objętościowy fazy stałej. Warunek izoparametryczny ma postać:

$$\int_\Omega \theta(x)dx = c\,, \tag{3.2}$$

gdzie $c$ jest ustaloną stałą dodatnią.

Zadanie zrelaksowane ma postać:

$$\min\{\int_\Omega F_\lambda(\mathbf{M}(x))dx | \mathbf{M} \in S_1(\Omega)\}, \tag{3.3}$$

gdzie

$$F_\lambda(M) = \min_{0\le\theta\le 1}[2W^*(M,\theta) + \lambda\theta]. \tag{3.4}$$

Zbiór $S_1(\Omega)$ momentów statycznie dopuszczalnych ma postać:

$$S_1(\Omega) = \{M \in L^2(\Omega, E^s_2) | \int_\Omega M_{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta}(\upsilon)dx = f(\upsilon), \quad \forall \upsilon \in V_{\Gamma_0}\}, \tag{3.5}$$

gdzie

$$f(\upsilon) = \int_{\Gamma_1}[M_n^0(-\frac{\partial \upsilon}{\partial n}) + Q^0\upsilon]ds, \qquad V_{\Gamma_0} = \{\upsilon \in H^2(\Omega) | \upsilon = 0\,, \text{ na } \Gamma_0\}. \tag{3.6}$$

Potencjał dopełniający (dualny) $W^*$ ma postać, por. [7, podrozdział 26]:

$$W^*(M,\theta) = W_0^*(M) + \frac{1-\theta}{\theta}g(M), \tag{3.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} W_0^*(M,\theta) &= \tfrac{1}{4}K(I(M))^2 + \tfrac{1}{4}L(II(M))^2, \\ g(M) &= \tfrac{1}{4}K\,tr^2 M + \tfrac{1}{4}L[|\lambda_1(M)| + |\lambda_2(M)|]^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tutaj $\lambda_1(M)$ i $\lambda_2(M)$ oznaczają główne momenty zginające, $trM = M_{\alpha\alpha}$ ; ponadto

$$I(M) = \frac{1}{\sqrt{2}}trM\,, II(M) = \frac{1}{\sqrt{2}}(tr^2 M - 4\det M)^{1/2}.$$

Wróćmy do zadania (3.4). Minimalizując po $\theta$ otrzymujemy:

$$F_\lambda(M) = 2W_0^*(M) + \lambda - \lambda\begin{cases}(1-\eta)^2 & \text{jeśli } \eta \le 1, \\ 0 & \text{jeśli } \eta \ge 1,\end{cases} \tag{3.9}$$

gdzie $\eta = (g(M)/\lambda)^{1/2}$. Funkcja $F_\lambda$ jest funkcją poliwypukłą o wzroście kwadratowym. Wynika stąd, że zadanie zrelaksowane (3.3) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

## 4. Płyty optymalne o małej objętości

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy $c$ jest „małe". Oznacza to, że w zależności (3.9) warunek $\eta \leq 1$ przeważa i funkcję $F_\lambda(M)$ można aproksymować następująco:

$$F_\lambda(M) = \lambda^{1/2} G(M) = G(\lambda^{1/2} M), \tag{4.1}$$

gdzie

$$G(M) = [K \, tr^2 M + L(|\lambda_1(M)| + |\lambda_2(M)|)^2]^{1/2}. \tag{4.1a}$$

Zauważmy, że funkcja $G(M)$ jest funkcją o *wzroście liniowym*. Wynika stąd, że płyta o małej objętości jest płytą *idealnie usztywniającą się*, por. [11]. Oznacza to, że obecnie $M$ przedstawia *prędkość momentów*, a nie momenty, por. również [5].

Stosując teorię dualności można przedstawić zadanie (3.3), gdzie $F_\lambda$ ma postać (41), w następującej postaci:

$$\sup\{f(w) | w \in V_{\Gamma_0}, \quad \kappa(w(x)) \in B, \quad x \in \Omega\}. \tag{4.2}$$

Zbiór $B$ odkształceń dopuszczalnych przez warunek usztywnienia ma postać:

$$B = \{\kappa = (\kappa_{\alpha\beta}) \in \mathbb{E}^2_s : |\lambda_\alpha(\kappa)| \leq (K+L)^{1/2}, \quad sign(\lambda_1(\kappa))(\lambda_1(\kappa) - \lambda_2(\kappa)) \leq (2L)^{1/2}\}, \tag{4.3}$$

gdzie $L > K$.

Związek konstytutywny opisujący płytę o małej objętości wygodnie jest zapisać w postaci subróżniczkowej

$$M \in \partial I_B(\kappa), \tag{4.4}$$

gdzie $I_B$ oznacza funkcję indykatorową zbioru B, por.[6,8]

$$I_B(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \kappa \in \mathrm{B}, \\ +\infty & \text{jeśli } \kappa \notin \mathrm{B}. \end{cases} \tag{4.5}$$

W przypadku płyty niejednorodnej $B$ zależy od $x \in \Omega$.

Odwrotny związek konstytutywny ma postać:

$$\kappa \in \partial F_\lambda(M) \quad \text{lub} \quad \kappa \in \partial G(M), \tag{4.6}$$

ponieważ $\lambda$ jest nieujemne. We wzorach (4.4) i (4.6) $\partial$ oznacza subróżniczkę, por. [8]. Sam zbiór $B$ jest wypukły i domknięty oraz $\kappa = \mathbf{0}$ należy do jego wnętrza.

*Podstawowe własności funkcji G*

i) $G(0) = 0$.

ii) Istnieją stałe $C_1 > C_0 > 0$ takie, że $C_0|M| \leq G(M) \leq C_1|M|, \quad \forall M \in \mathbb{E}^2_s$.

iii) $G$ jest funkcją dodatnio jednorodną, tzn. $G(aM) = aG(M)$, jeśli $a \geq 0$. W szczególności

$$F_\lambda(M) = G(\lambda^{1/2}M) = \lambda^{1/2}G(M).$$

Matematyczna analiza związana z istnieniem rozwiązań nie wymaga konkretnej postaci warunku usztywnienia płyty, czyli szczególnej postaci zbioru $B$. Wystarczy przyjąć następujące założenia, por. [3,4,10]:

(a) $B \subset \mathbb{E}^2_s$ jest zbiorem wypukłym i domkniętym.

(b) Istnieją stałe $0 < r < R < +\infty$ takie, że $K(0,r) \subset B \subset K(0,R)$, gdzie $K(0,r)$ oznacza koło o środku w zerze i promieniu $r$.

Zbiór $B$ dany wzorem (4.3) spełnia oczywiście warunki (a), (b).

Funkcja podpierająca zbioru $B$ jest określona następująco, por. [8]:

$$G(M) = \sup\{M_{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta} | \kappa \in B\}, \qquad M \in \mathbb{E}^s_2. \tag{4.7}$$

W szczególności, jeśli zbiór $B$ ma postać (4.3), to $G(M)$ ma postać (4.1a).

W przypadku płyt idealnie usztywniających się zadania ekstremalne nie mogą być sformułowane w takiej postaci jak dla płyt sprężystych, por. [2]. Rozpatrzmy najpierw zagadnienie wyznaczania przemieszczeń poprzecznych płyty o małej objętości. Zadanie pierwotne formułujemy następująco:

$$(\mathcal{P}) \qquad \sup\{f(w) | w \in U, \quad \kappa(w(x)) \in B, \qquad x \in B\},$$

gdzie

$$U = \{w \in V_{\Gamma_0} | w = \tilde{u}e_1, \qquad \partial w/\partial n = \tilde{u}e_2 \quad \text{na} \quad \Gamma_1\}.$$

W funkcjonale $f$ wielkości $Q^0$ i $M_n^0$ należy rozumieć jako pole mnożników wagowych, por. [2]. Tutaj $e_\alpha$, $\alpha = 1,2$ są zadanymi funkcjami parametru $s \in \Gamma_1$, zaś $\tilde{u}$, które może zależeć od $s$, oznacza intensywność przemieszczeń uogólnionych $(w, \partial w/\partial n)$. Zagadnienie jednoparametrowe jest oczywiście przypadkiem szczególnym zadania $(\mathcal{P})$. Wówczas $\Lambda = \tilde{u} \in \mathbb{R}^1$ jest po prostu mnożnikiem przemieszczeń uogólnionych. Problem istnienia pola przemieszczeń $\overline{w}$, będącego rozwiązaniem zadania $(\mathcal{P})$, rozstrzyga następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.1**. Niech będą spełnione założenia (a), (b) i niech

$$\int_{\Gamma_1} (Q^0 e_1 - M_n^0 e_2) ds \neq 0. \tag{4.8}$$

Wówczas zadanie $(\mathcal{P})$ posiada rozwiązanie $\overline{w} \in U$ takie, że $\kappa(\overline{w}(x)) \in B$, $x \in \Omega$.

Analiza zadania $(\mathcal{P})$ związana jest z zadaniem dualnym, które przyjmuje następującą postać:

$$(\mathcal{P}^*) \qquad \inf\{G(M) | M \in L^2(\Omega, E_2^s),\ \ M_{\alpha\beta,\beta\alpha} = 0 \ \text{w}\ \Omega;\ Q = Q^0,\ \ M_n = M_n^0 \ \text{na}\ \Gamma_1\}.$$

Z teorii dualności wynika, że zachodzi równość, por. [6,7]

$$\sup \mathcal{P} = \inf \mathcal{P}^*. \tag{4.9}$$

Przejdźmy do zagadnienia jednoparametrowego, gdy:

$$w = \Lambda w^0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = \Lambda w^1 \qquad \text{na} \quad \Gamma_1. \tag{4.10}$$

Funkcje $w^0$ i $w^1$ są zadane. Zbiór przemieszczeń dopuszczalnych $U_{od}(\Lambda)$ przyjmuje postać:

$$U_{od}(\Lambda) = \{w \in H^2(\Omega) | w = 0 \ \text{na}\ \Gamma_0;\quad w = \Lambda w^0,\quad \frac{\partial w}{\partial n} = \Lambda w^1 \ \text{na}\ \Gamma_1\}. \tag{4.11}$$

Połóżmy

$$S_0 = \{M \in L^2(\Omega, E_2^s) | \mathit{div}\ \mathit{div} M = 0 \ \ \text{w}\ \ \Omega\}, \tag{4.12}$$

$$B_g = \{w \in H^2(\Omega) | \kappa(w(x)) \in B,\ \ x \in \Omega\}. \tag{4.13}$$

Analiza nośności granicznej płyt usztywniających się sprowadza się do rozwiązania następującej pary zadań dualnych:

$$(Q) \qquad \sup\{\Lambda | B_g \cap U_{od}(\Omega) \neq \phi\},$$

$$(Q^*) \qquad \inf\{\int_\Omega G(M(x))dx | M \in S_0,\ \ \int_{\Gamma_1} (Qw^0 - M_n w^1) ds = 1\}.$$

Można wykazać, że zachodzi równość

$$\Lambda_l = \sup Q = \inf Q^* < +\infty. \tag{4.14}$$

Tutaj $\Lambda_l$ oznacza mnożnik graniczny.

Chcąc wykazać, że rozwiązanie zadania $(Q)$ istnieje, wygodnie jest wprowadzić następującą perturbację tego zadania:

$$(Q_\delta) \qquad \sup\{-\Lambda + \frac{1}{\delta} d(\kappa(w), B_d) | \Lambda \in \mathbb{R}^1, w \in U_{ad}(\Lambda)\},$$

gdzie $\delta > 0$ oraz

$$B_d = \{\rho \in L^2(\Omega, E_2^s) | \rho(x) \in B,\ \ x \in \Omega\}.$$

Funkcja $d(\kappa(w), B_d)$ określa odległość elementu $\kappa(w)$ od zbioru $B_d$. Łatwo wykazać, że rozwiązanie zadania $(Q_\delta)$ istnieje. Rozwiązanie zadania $(Q)$ otrzymuje się przechodząc z parametrem $\delta$ do zera.

W materiale usztywniającym się mogą powstać powierzchnie nieciągłości prędkości naprężeń (w przypadku trójwymiarowym) lub linie nieciągłości (w przypadku dwuwymiarowym), por. [4]. Linie nieciągłości są analogonami, znanych z teorii idealnej plastyczności, linii poślizgu. Oznacza to, że zadanie dualne $(Q^*)$ nie posiada rozwiązania w przestrzeni $S_0$. Przestrzeń ta jest po prostu za mała. Można wykazać, że rozwiązanie zadania $(Q^*)$ istnieje w sensie uogólnionym. W tym celu należy wprowadzić zadania zrelaksowane $(RQ^*)$, które posiada rozwiązanie w odpowiednio dobranej przestrzeni prędkości momentów, będących miarami ograniczonymi [11].

## 5. Uwagi końcowe

W niniejszej krótkiej pracy nie omówiliśmy zagadnień związanych z tym, jakie mikrostruktury posiadają płyty o minimalnej podatności. Zagadnienie to jest szczegółowo przedyskutowane w monografii [7]. W zagadnieniach dotyczących projektowania optymalnego płyt sprężystych pozostaje wiele problemów otwartych. Nie będziemy ich tutaj wszystkich wyliczać. Wymieńmy tylko niektóre z nich. Załóżmy, że przynajmniej jedna z faz jest anizotropowa. W tym przypadku nie wiadomo, jaka mikrostruktura realizuje płytę o minimalnej podatności. Opracowanie efektywnych procedur numerycznych rozwiązywania zadań przedstawionych w punktach 3 i 4 również pozostaje otwarte.

LITERATURA


1. Allaire F., Bonnetier G., Francfort F., Jouve: Shape optimization by the homogenization method, Numer. Math., **76**, 1997, 27-68
2. Čyras: Optimization theory of perfectly locking bodies, Arch. Mech., **24**, 1972, 203-210
3. Demengel F.: Relaxation et existence pour le probleme de matériaux a blockage, Math. Modelling and Numer. Anal., **19**, 1985, 351-395
4. Demengel F., Suquet P.: On locking materials, Acta Appl. Math., **6**, 1986, 185-211
5. Jemioło S., Telega J.J.: Fabric tensor and constitutive equations for a class of plastic and locking orthotropic materials, Arch. Mech., **49**, 1997, 1041-1067
6. Ekeland I., Temam R.: Convex Analysis and Variational Problems, North Holland, Amsterdam, 1976

7. Lewiński T., Telega J.J.: Plates, Laminates and Shells: Asymptotic Analysis and Homogenization, World Scientific, Singapore, 1999, w druku
8. Rockafellar R.T.: Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970
9. Rockafellar R.T.: Integral functionals, normal integrands and measurable selections, w: Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 543, Springer-Verlag, Berlin, 1976, str. 157-207
10. Telega J.J., Jemioło S.: Microscopic behaviour of locking materials with microstructure. Part I. Primal and dual locking potential, relaxation, Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci., **46**, 1998, 265-276
11. Telega J.J., Lewiński T., Dzierżanowski G.: Minimization of compliance of two-phase plates of small volume, Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Buffalo University, 17-21 May 1999, w druku

**Abstract**

The aim of the paper is to study three optimization problems for thin plates within the theory of small displacements. The first problem concerns the minimization of compliance of two-phase plates, where the phases are isotropic. This problem has form (2.11) and is ill-posed. Hence the need for a relaxation. The relaxed problem is given by (2.14). It appears that the layout of the optimal plate is realized by a microstructure, not necessarily isotropic, cf. [7]. The second problem concerns the shape optimization. The relaxed problem is now given by (3.3). The optimal layout admits voids at the microlevel. Both relaxed problem (2.14) and problem (3.3) involve homogenization. The third problem is studied in Sec.4 of the paper and is obtained from the one investigated in Sec.3, provided that the plate volume is small. The optimal plate of small volume is no longer elastic, but its behaviour is perfectly locking, cf. also [11].