

Andrzej WAWRZYNEK, Marcin KOGUT

## ODWROTNE ZAGADNIENIA CIEPLNE I TERMOGRAFIA W BUDOWNICTWIE

**Streszczenie.** W pracy przedstawione zostaną wyniki zadań testowych, których celem było określenie warunków przeprowadzenia eksperymentów prowadzących do opracowania metody określania powierzchniowych i podpowierzchniowych uszkodzeń konstrukcji betonowych, na podstawie pomiarów temperatury na jej powierzchni, za pomocą kamery termowizyjnej. Wyniki pomiarów stanowiłyby podstawę do rozwiązywania odwrotnych (geometrycznych) zadań przewodnictwa ciepła. Na obecnym etapie badań pomiary są symulowane numerycznie.

## INVERSE THERMAL PROBLEMS AND THERMOGRAPHY IN CIVIL ENGINEERING

**Summary.** In this paper results of testing problems are presented, in which conditions of experiments leading to detection of surface and subsurface damages in concrete elements using infrared measurements of surface temperatures are determined. On the basis of results of such experiments inverse geometrical thermal problems will be solved. At this stage measurements are simulated numerically.

### 1. Wprowadzenie

Termografia jest nowoczesnym narzędziem do nieniszczącego - najczęściej jakościowego - diagnozowania elementów urządzeń mechanicznych, analizy procesów produkcyjnych, kontroli jakości produkcji, itp., w których mamy do czynienia z niejednorodnym i/lub zmiennym polem temperatury. W budownictwie termografię stosuje się głównie do wyznaczania w budynkach obszarów o najgorszych parametrach cieplnych, powodujących duże straty ciepła ([1]). Wiele ośrodków uczelnianych i przemysłowych podejmuje próby zastosowania termografii w diagnozowaniu elementów konstrukcji budowlanych oraz materiałów budowlanych

(np. University of Technology w Delft - monitorowanie historycznych budowli; Barg-Baustofflabor z Berlina - lokalizacja kotew w ścianach zewnętrznych ([7]); itd).

W pracy przedstawiono **wstępne** wyniki badań numerycznych, mających na celu określenie, czy możliwe jest wyznaczenie parametrów geometrycznych - szerokość, głębokość, itd. - rysy powierzchniowej lub podpowierzchniowej (o parametrach suchego powietrza), w obszarze o parametrach termofizycznych betonu, na podstawie pomiarów temperatury na powierzchni analizowanego obszaru. Pomiar realizowany miałyby być przy użyciu kamery termowizyjnej o odpowiedniej czułości.

Przeprowadzone wstępne symulacje numeryczne wskazują, że połączenie termografii oraz metod rozwiązywania geometrycznych zagadnień odwrotnych mogłoby być skutecznym narzędziem do **ilościowego** określania uszkodzeń.

Na omawianym tutaj etapie badań rozwiązano szereg stacjonarnych, odwrotnych zadań przewodnictwa ciepła typu geometrycznego, z **jednym parametrem decyzyjnym** – szerokością rysy lub jej głębokością, przy czym jako wynik pomiaru przyjmowano rozwiązanie „wprost” równania Laplace’a w wybranych punktach „pomiarowych” na brzegu. Temperaturę w punktach pomiarowych losowo zakłócano błędem „pomiarowym”. Poszukiwano takich warunków brzegowych – sposobu nagrzewania części brzegu i studzenia innej części – aby mierzona temperatura była możliwie silnie wrażliwa na parametry geometryczne szczeliny.

Do obliczeń numerycznych wykorzystano uniwersytecką wersję programu *ANSYS 5.3* oraz jego wewnętrzny język: *ANSYS Parametric Design Language*.

## 2. Sformułowanie problemu

W pracy rozwiązywane są rzadziej analizowane w literaturze odwrotne zagadnienia geometryczne. Przyjmując do definicji zadania parametry geometryczne, jak szerokość, głębokość itp., poszukujemy takich ich wartości, które zapewniają najmniejsze różnice pomiędzy temperaturami obliczeniowymi (wynikającymi z modelu matematycznego) oraz zmierzonymi.

Przedmiotem pracy są stacjonarne, dwuwymiarowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa ciepła, wynikające z analizy równania Laplace’a ([3], [4]):

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{dla } \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci:

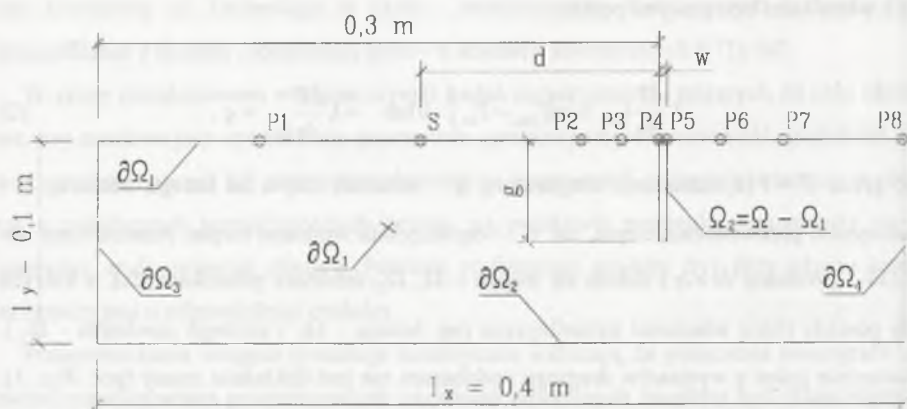
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \alpha(T_{|\partial\Omega} - T_{ot}) \quad \text{i/lub} \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = q, \quad (2)$$

gdzie przez  $T = T(\mathbf{x})$  oznaczono temperaturę;  $q$  – strumień ciepła na brzegu obszaru,  $\lambda$  – współczynnik przewodzenia ciepła, zaś  $\alpha$  – współczynnik wnikania ciepła. Analizowany obszar ( $\Omega$  – prostokąt  $l_x \times l_y$ ) składa się dwóch –  $\Omega_1, \Omega_2$  (również prostokątnych), z których każdy posiada różne własności termofizyczne (np. betonu –  $\Omega_1$  i suchego powietrza –  $\Omega_2$ ). Jednocześnie jeden z wymiarów drugiego podobszaru nie jest dokładnie znany (por. Rys. 1). Traktujemy obszar  $\Omega$  jako uproszczony model rysy w betonowym elemencie konstrukcyjnym. Obszar ogrzewany jest punktowo (punkt  $S$  na Rys. 1), przy czym źródło ciepła ma stałą temperaturę  $T_{in} = 100[^\circ\text{C}]$ , a jego odległość od szczeliny może być również poszukiwanym parametrem geometrycznym.

Spośród wielu prób symulacyjnych przeanalizowano trzy zadania:

- gdy znana jest głębokość szczeliny ( $g = 30[\text{mm}]$ ) oraz jej odległość od punktowego źródła ciepła, znajdującego się na brzegu ( $d = 20[\text{mm}]$ ), zaś poszukiwana szerokość rysy ( $w \in (0.1; 1.2)[\text{mm}]$ ) rzędu kilku dziesiątych milimetra;
- gdy znane jest  $d = 20[\text{mm}]$  oraz  $w = 0.3[\text{mm}]$ , nieznanne  $g \in (10; 80)[\text{mm}]$ ;
- dane jest  $g = 30[\text{mm}]$  oraz  $w = 0.3[\text{mm}]$ , nieznanne  $d \in (5; 35)[\text{mm}]$ .

Punkty pomiarowe ( $P1-P8, M=8$ ) znajdują się na górnej krawędzi obszaru  $\Omega - \partial\Omega_1$ , na której założono wymianę ciepła z otoczeniem poprzez konwekcję. Na obydwu krawędziach bocznych założono warunek symetrii. Zaś na dolnej krawędzi warunek I rodzaju – stała znana temperatura.



Rys. 1. Analizowany obszar  
Fig. 1 Considered body

Ostatecznie przyjęte w omawianej symulacji warunki brzegowe mają postać:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\delta\Omega_1} = \alpha(T \Big|_{\delta\Omega_1} - T_{out}), \quad T \Big|_{\delta\Omega_2} = T_{in}, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\delta\Omega_3 \cup \delta\Omega_4} = 0, \quad T \Big|_S = T_{source}. \quad (3)$$

### 3. Algorytm rozwiązywania zagadnień odwrotnych

Postawione zadanie rozwiązano metodą najmniejszych kwadratów, połączoną ze znaną z literatury metodą współczynników wrażliwości (np. [5], [6]). Poszukiwane parametry decyzyjne (szerokość, długość, odległość źródła od brzegu szczeliny) wyznaczone są poprzez minimalizację funkcjonału postaci

$$\Delta = (\mathbf{U} - \mathbf{T})^T \mathbf{W}(\mathbf{U} - \mathbf{T}) \longrightarrow \min, \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{U}$  jest wektorem zawierającym pomiary temperatur w określonych punktach pomiarowych,  $\mathbf{T}$  – temperaturą w tych samych punktach pomiarowych, wynikającą z obliczeń, a  $\mathbf{W}$  – diagonalną macierzą błędów pomiarowych. Ze względu na nieliniowość problemu rozwiązanie może być znalezione jedynie iteracyjnie.

Ogólny sposób postępowania w przypadku rozwiązywania zagadnień odwrotnych można przedstawić w następujących etapach:

- sformułowanie zadania brzegowego, przy przyjęciu szacowanej wartości nieznannej wielkości, tzw. zmiennej decyzyjnej, np. szerokości szczeliny rysy;
- rozwiązanie postawionego zagadnienia prostego;

- porównanie otrzymanych z obliczeń wartości temperatury w punktach pomiarowych z wynikami pomiarów i zmodyfikowanie zmiennej decyzyjnej poprzez minimalizację odpowiedniej funkcji celu, np. najmniejszy błąd kwadratowy.

Poszczególne metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych różnią się sposobem modyfikacji danych wejściowych. Większość z nich jest oparta na idei współczynników wrażliwości. Współczynnik wrażliwości  $Z_i$  definiuje się jako pierwszą pochodną funkcji opisującej zmienną zależną (temperaturę) w  $i$ -tym punkcie pomiarowym względem zmiennej decyzyjnej (szerokości)

$$Z_i = \frac{\partial T_i}{\partial Y}. \quad (5)$$

W pierwszym etapie przyjmujemy szacowaną wartość zmiennej decyzyjnej  $Y^*$  i z rozwiązania zadania wprost znajdujemy odpowiadające jej pole temperatury  $T^*$ , w tym również w punktach pomiarowych, czyli  $T_i^*$ .

W omawianym tutaj zadaniu wartości współczynników wrażliwości obliczono przez numeryczne różniczkowanie pola temperatury:

$$Z_i = \frac{\partial T(x_i, y_i, Y^*)}{\partial Y} = \frac{\partial T_i}{\partial Y} \approx \frac{T(x_i, y_i, Y^* + \varepsilon) - T(x_i, y_i, Y^* - \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (6)$$

gdzie przyjmowano  $\varepsilon = 10^{-4} Y^*$ .

Rzeczywista temperatura w  $i$ -tym punkcie może być rozwinięta w szereg Taylora względem wartości  $Y^*$ , tzn.

$$T_i = T_i^* + \left. \frac{\partial T_i}{\partial Y} \right|_{Y^*} (Y - Y^*) + \dots = T_i^* + Z_i (Y - Y^*) + \dots \quad (7)$$

Pomijając pochodne wyższych rzędów w szeregu Taylora wektor temperatur w punktach węzłowych możemy przedstawić jako:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* + \mathbf{Z} (Y - Y^*), \quad (8)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_M\}^T$  - wektor temperatur w punktach pomiarowych dla dokładnej wartości zmiennej decyzyjnej  $Y$ ,

$\mathbf{T}^* = \{T_1^*, \dots, T_M^*\}$  - wektor temperatur w punktach pomiarowych dla wartości zmiennej decyzyjnej  $Y^*$ ,

$\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_M\}$  - macierz (wektor) współczynników wrażliwości.

Iteracyjny proces znajdowania poszukiwanego parametru decyzyjnego (zagadnienie nieliniowe) składał się z rozwiązania szeregu następujących zagadnień brzegowych (zadań wprost) przy użyciu pakietu *ANSYS*:

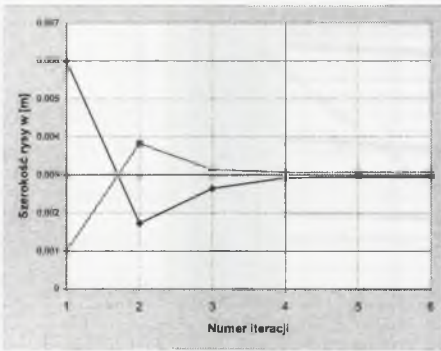
- rozwiązanie zadania wprost dla rzeczywistej wartości parametru decyzyjnego  $Y$ . Określenie temperatury w punktach pomiarowych (wektor  $\mathbf{U}$ ) zakłóconych błędem losowym o zadanych granicach; zapamiętywana jest również dokładna wartość rozwiązania w celu badania warunku przerwania obliczeń;
- rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla przyjętej wartości parametru decyzyjnego  $Y^*$  - wektor  $\mathbf{T}^*$ ;
- poszukiwanie współczynników wrażliwości poprzez rozwiązanie dwóch zadań: dla  $Y^* \pm \epsilon$

oraz poszukiwania wartości stacjonarnej funkcjonau (4). Otrzymana wartość parametru decyzyjnego  $Y^{(i)}$  ( $i$  - numer kroku iteracyjnego) porównywana jest z rozwiązaniem dokładnym. Jeśli nie jest spełniony warunek przerwania obliczeń, powtarzany jest krok b) i c) dla  $Y^* = Y^{(i)}$ .

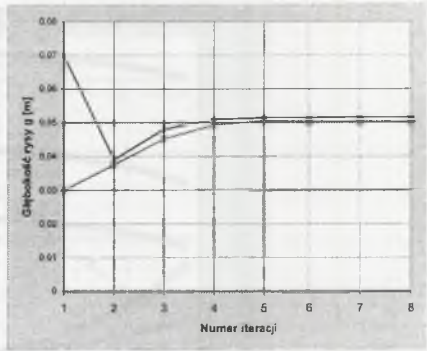
W obliczeniach przyjęto następujące dane geometryczne i termofizyczne:

$$\begin{aligned} l_x &= 400[\text{mm}] & l_y &= 100[\text{mm}] \\ \lambda_1 &= 0,5[\text{W/mK}] & \lambda_2 &= 0,026[\text{W/mK}] \\ T_{in} &= 0[^\circ\text{C}] & T_{out} &= 20[^\circ\text{C}] & \alpha &= 20[\text{W/m}^2 \text{K}] \end{aligned}$$

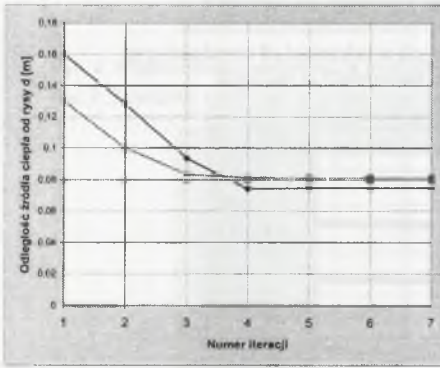
Na rysunkach 2 – 5 przedstawiono przebieg procesu iteracyjnego poszukiwania parametrów decyzyjnych (odpowiednio: szerokości, głębokości i odległości szczeliny od źródła oraz dodatkowo współczynnika przejmowania ciepła) przy założeniu, że pomiary temperatury na brzegu obszaru wykonano z dokładnością odpowiednio: 4%, 6%, 10%, 2%. Na wykresach zaznaczono również dokładne rozwiązanie zadania (prosta pozioma). Znalezione wartości parametrów decyzyjnych różnią się od ścisłego rozwiązania o 2-8%, co jest wystarczającą dokładnością z inżynierskiego punktu widzenia.



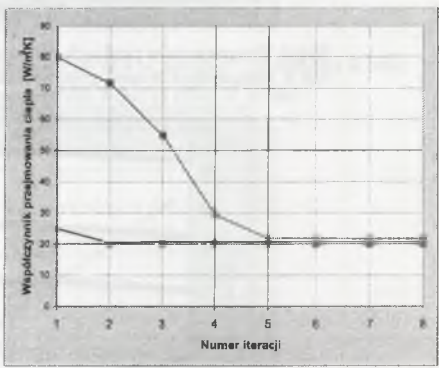
Rys. 2. Szerokość rysy w kolejnych iteracjach  
Fig. 2. Width of the crack against iteration number



Rys. 3. Głębokość rysy b w kolejnych iteracjach  
Fig. 3. Depth of the crack against iteration number



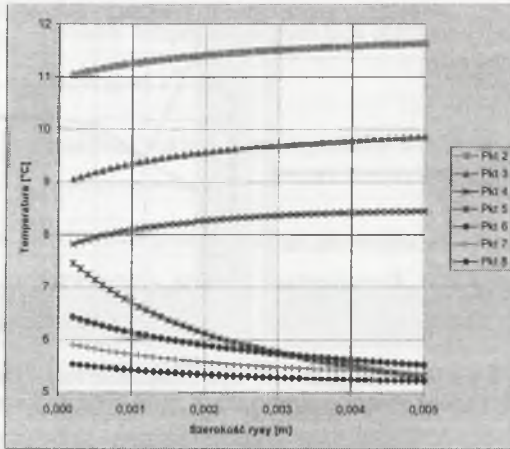
Rys. 4. Odległość źródła w kolejnych iteracjach  
Fig. 4. Distance from the heat source



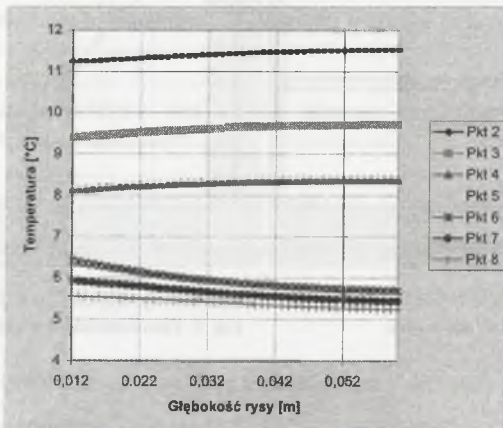
Rys. 5. Współczynnik  $\alpha$  w kolejnych iteracjach  
Fig. 5. Film coefficient  $\alpha$  against iteration number

#### 4. Uwagi i wnioski

- W tak sformułowanym zadaniu dobrze identyfikowane są wartości szerokości rysy, odległości rysy od źródła ciepła, jak również wartości współczynnika przejmowania ciepła. Nieco gorsze wyniki uzyskujemy dla głębokości szczeliny. Przyczyną tego może być mała wrażliwość wymuszanego pola temperatury na ten parametr.



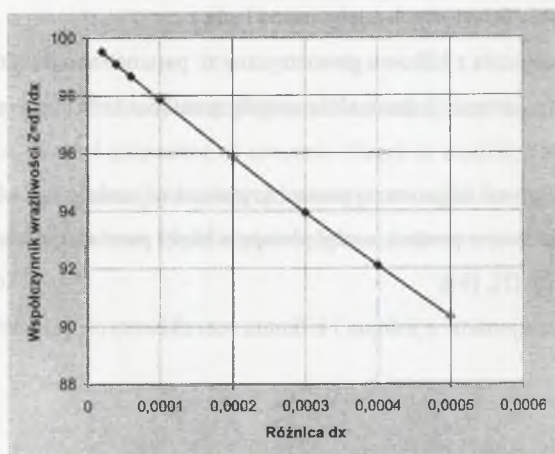
Rys. 6. Temperatura w punktach pomiarowych w zależności od szerokości rysy  
 Fig. 6. Temperature at measurement points due to width of the crack



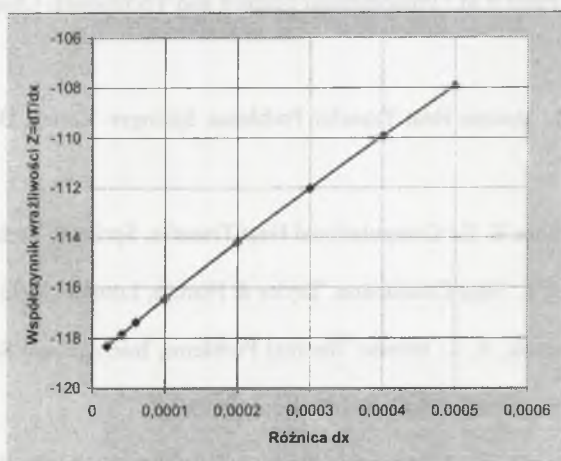
Rys. 7. Temperatura w punktach pomiarowych w zależności od głębokości rysy  
 Fig. 7. Temperature at measurement points due to depth of the crack

- W przypadku jednego parametru decyzyjnego łatwo wykazać, mimo nieliniowości zagadnienia, że znajdowane rozwiązanie jest jedynym rozwiązaniem, co ilustrują rysunki 6 i 7, pokazujące, jak zmienia się pole temperatury w poszczególnych punktach pomiarowych wraz ze zmianą odpowiednio szerokości i głębokości szczeliny. Jak widać, obydwie funkcje są wzajemnie jednoznaczne.
- Rysunek 8 pokazuje, jak zmieniają się współczynniki wrażliwości przy malejącej różnicy  $\epsilon$  (por. wzór (6)). Jak widać, wyznaczenie tych współczynników możliwe jest z dużą dokładnością. Przeprowadzone testy wykazały, że zastosowana dokładność jest wystarczająca – dalsze zmniejszanie parametru  $\epsilon$  nie prowadzi do poprawienia dokładności znajdowanych parametrów decyzyjnych.





Rys. 8. Współczynnik wrażliwości w punkcie pomiarowym nr 4 w zależności od wartości  $\epsilon = dx$   
 Fig. 8. Sensitivity coefficient at measurement point number 4 due to value of  $\epsilon = dx$



Rys. 9. Współczynnik wrażliwości w punkcie pomiarowym nr 5 w zależności od wartości  $\epsilon = dx$   
 Fig. 9. Sensitivity coefficient at measurement point number 5 due to value of  $\epsilon = dx$

- Aby możliwe było porównywanie wyników rozwiązań dla parametrów różniących się o bardzo małą wielkość (por. zależność (6)), obszary definiowane w programie ANSYS posiadają we wszystkich obliczeniach te same, tzw. *keypoint*'y (punkty określające brzeg). Również punkty pomiarowe są stałe (*keypoints*), przez co generowana siatka elementów skończonych zawsze posiada węzły w tych punktach i jest podobna w każdym typie analizowanych zadań.

W dalszych badaniach testowych analizowane będą:

- stacjonarne zagadnienia z kilkoma geometrycznymi parametrami decyzyjnymi;
- zagadnienia poszukiwania jednocześnie współczynników termofizycznych i parametrów geometrycznych;
- różne funkcje celu - od najprostszej postaci kryterium najmniejszego błędu kwadratowego po jego zmodyfikowane postaci, uwzględniające błędy pomiarowe i zakładane dokładności pomiarów ([2], [5], [6]);
- zagadnienia niestacjonarne z jednym i kilkoma poszukiwanymi parametrami.

## LITERATURA

1. Almond D. P., Patel P.M.: *Photothermal Science and Techniques*, Chapman & Hall, Suffolk, 1996
2. Alifanov, O. M.: *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1994
3. Jaluria Y., Torrance K. E.: *Computational Heat Transfer*, Springer Verlag, Berlin, 1986
4. Kakac S., Yener Y.: *Heat Conduction*, Taylor & Francis, London, 1993
5. Kurpisz, A., Nowak, A. J.: *Inverse Thermal Problems*, International Series on Computational Engineering, Comp. Mech. Publications, 1995
6. Kurpisz, A., Nowak, A. J.: *Applying BEM and the Sensitivity Coefficient Concept to Inverse Heat Conduction Problems*, *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, vol. 32, 363-383, 1991
7. Weise F., Arndt D., Borchardt K., Geyer E., Henschen, Krause M., Niedack-Nad M.: *Non-Destructive Testing Methods for Determining the Built-in Position of Anchoring Elements at Curtain Facades*, *International Symposium Non-Destructive Testing in Civil Engineering (NDT-CE)*, vol. 2, 867-876, Berlin, 1995

**Abstract**

Inverse, two-dimensional, steady state problem is solved, for rectangular domain, which is described as area of thermal properties of concrete. Crack is modelled as area with thermal parameters of dry air. Decision (unknown) parameters are width and depth of the crack as well as distance of the crack from the heat source, when temperature on the surface of considered body is known.

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

**MODELING OF CRACKS WITH THERMAL PROPERTIES OF AIR**

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

**1. Wprowadzenie**

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*