ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Czesław WOŹNIAK

MODELOWANIE KOMPOZYTÓW O BUDOWIE PERIODYCZNEJ. HOMOGENIZACJA A MODELE NIEASYMPTOTYCZNE

Streszczenie. Celem pracy jest krytyczne spojrzenie na fizyczną poprawność rezultatów znanej w literaturze metody homogenizacji asymptotycznej, por. [2, 3], zwrócenie uwagi na jej usterki i ograniczenia, a następnie propozycja usunięcia tych niedomagań poprzez osłabienie fizycznych założeń homogenizacji. Wykazano, że proponowane podejście prowadzi do pewnych uśrednionych modeli nieasymptotycznych, które w szczególnych przypadkach są zgodne z rezultatami uzyskanymi metodą homogenizacji. Rozważania przeprowadzono na przykładzie równania przewodnictwa cieplnego.

MODELLING OF COMPOSITES WITH PERIODIC STRUCTURE. HOMOGENIZATION VERSUS NONASYMPTOTIC MODELS

Summary. The aim of contribution is to discuss certain aspects of the known asymptotic homogenization method cf. [2, 3] related mainly to the physical reliability of its results and to propose a new modelling approach by retaining some terms neglected in the homogenization procedure. It will be shown that the proposed approach leads to an averaged but nonasymptotic model which only for special problems coincides with the homogenized one. The analysis is carried out for the heat conduction equation.

1. Wprowadzenie

Problemy fizyki i mechaniki kompozytów o periodycznej strukturze są opisywane z reguły za pomocą równań różniczkowych cząstkowych o periodycznych, nieciągłych i silnie oscylujących współczynnikach funkcyjnych. Ogólna idea homogenizacji polega na zastąpieniu tych współczynników pewnymi stałymi uśrednionymi modułami, co prowadzi do przybliżonego opisu problemu fizycznego, w którym mamy do czynienia z równaniami o stałych współczynnikach. W szczególności, gdy rozpatrujemy problem przewodnictwa cieplnego w anizotropowym kompozycie Δ-periodycznym, zajmującym obszar Ω (Δ jest komórką periodyczności), mamy do czynienia ze znanym równaniem dla pola temperatury, $\theta = \theta(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x}\in\Omega$, t jest współrzędną czasową :

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\nabla\theta)-c\dot{\theta}=f, \tag{1}$$

gdzie f jest gęstością źródeł ciepła, natomiast $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ jest tensorem przewodnictwa cieplnego oraz $c = c(\mathbf{x})$ ciepłem właściwym. W kompozycie periodycznym $\mathbf{A}(\cdot)$, $c(\cdot)$ są silnie oscylującymi funkcjami Δ-periodycznymi, kawałkami stałymi, a homogenizacja polega na zastąpieniu równania (1) równaniem

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}^o\cdot\nabla\theta^o)-c^o\dot{\theta}^o=f, \tag{2}$$

w którym pole temperatury oznaczyliśmy symbolem θ^o oraz gdzie $\mathbf{A}^o$ jest niezależne od $\mathbf{x}$ i nazwane zostało homogenizowanym tensorem przewodnictwa cieplnego, natomiast $c^o = \langle c \rangle$, gdzie $\langle \cdot \rangle$ oznacza uśrednienie po komórce Δ. Formalnego przejścia od problemu (1) do (2) dokonujemy asymptotycznie, kładąc $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})= \mathbf{A}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $c^\varepsilon(\mathbf{x})= c(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,1]$, co prowadzi do klasy problemów dla równań

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}^\varepsilon\cdot\nabla\theta^\varepsilon)-c^\varepsilon\dot{\theta}^\varepsilon=f \quad , \tag{3}$$

opisujących przewodnictwo cieplne w formalnie wprowadzonych "kompozytach" $\varepsilon\Delta$-periodycznych. Dla $\varepsilon\to 0$ mamy więc do czynienia z sytuacją, w której wymiary komórki periodyczności dążą do zera. Dla ustalonego pola temperatury oraz przy założeniu $\theta^\varepsilon\in H^1(\Omega)$, $f\in H^{-1}(\Omega)$wykazuje się wtedy (por.[2], str.14), że $\theta^\varepsilon\to\theta^o$ słabo w $H^1(\Omega)$ oraz $\mathbf{A}^\varepsilon\cdot\nabla\theta^\varepsilon\to\mathbf{A}^o\cdot\nabla\theta^o$ słabo w $L^2(\Omega)$, tj. wraz z $\varepsilon\to 0$ ciąg rozwiązań θ^ε problemu dla równań (3) dąży słabo do rozwiązania θ^o odpowiedniego problemu dla równania (2); podobna zbieżność zachodzi także dla strumieni ciepła $\mathbf{q}^\varepsilon = -\mathbf{A}^\varepsilon\cdot\nabla\theta^\varepsilon$, które dążą słabo do $\mathbf{q}^o = -\mathbf{A}^o\cdot\nabla\theta^o$. Otrzymujemy także oceny rozwiązań *a priori* postaci $\|\theta^o-\theta^\varepsilon\|<k\,\varepsilon$, gdzie $k>0$ jest stałą niezależną od ε oraz $\|\cdot\|$ jest normą w $L^2(\Delta)$. Jednocześnie wykazuje się, że homogenizowany tensor przewodnictwa cieplnego $\mathbf{A}^o$ można przedstawić w postaci $\mathbf{A}^o = \langle\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{N}\rangle$, gdzie Δ-periodyczne pole wektorowe $\mathbf{N}$ jest rozwiązaniem pomocniczego problemu periodycznego $\nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{N}) = -\nabla\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{N}\in(H^1(\Delta))^3$ (por. [2], str. 18), a powyższe rezultaty uogólnia się także na przypadek niestacjonarnego pola temperatury.

Homogenizacja rozumiana jako matematyczna teoria badająca związki między zagadnieniami dla równań różniczkowych cząstkowych o $\varepsilon\Delta$-periodycznych współczynnikach przy $\varepsilon \to 0$ (takich jak np. równanie (3)) a równaniami o stałych współczynnikach (jak np. równanie (2)) ma oczywiście charakter ścisły. Jak powyżej stwierdzono, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ rozwiązania problemów dla równań postaci (3), można przybliżyć rozwiązaniami odpowiednich problemów dla równania postaci (2). Jednakże w zagadnieniach inżynierskich mamy do czynienia nie z rodzinami problemów postaci (3), lecz z kompozytem o określonej wielkości komórki Δ, która odpowiada sytuacji $\varepsilon = 1$. Teoria homogenizacji nie daje więc wyraźnej odpowiedzi, kiedy badany fizyczny problem, opisany równaniem (1), można analizować posługując się równaniem homogenizowanym (2). Łatwo tu podać przykłady, w których korzystanie z równania (2) prowadzi do wyników pozbawionych sensu fizycznego. W związku z powyższym formułuje się niekiedy dodatkowe wymagania, by wymiary liniowe komórki periodycznej Δ były bardzo niewielkie wobec najmniejszego charakterystycznego wymiaru liniowego obszaru Ω, zajętego przez kompozyt, co w zagadnieniach inżynierskich ma często miejsce. Niemniej jednak przejście asymptotyczne $\varepsilon \to 0$, zwłaszcza w zagadnieniach niestacjonarnych, często zaciera niektóre własności kompozytów, które są istotne w fizycznej analizie problemu (np. zjawisko dyspersji przy badaniu propagacji fal). W związku z tym dokonamy przejścia od równania (1) do równania (2) nie korzystając z podejścia asymptotycznego. Pozwoli to najpierw sformułować założenia natury fizycznej, przy których równanie (1) można zastąpić przez (2), a następnie osłabić te założenia usuwając w ten sposób pewne ograniczenia, które narzuca homogenizacja na opis fizyki problemu.

2. Analiza

Załóżmy, że komórka periodyczności Δ ma środek geometryczny w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ przestrzeni fizycznej E^3. Tym samym $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \Delta$ jest komórką o środku w punkcie $\mathbf{x}$. Oznaczmy $\Omega^0 := \{\mathbf{x} \in \Omega : \Delta(\mathbf{x}) \subset \Omega\}$ i załóżmy, że $\Omega \backslash \Omega^0$ tworzy cienką przybrzegową warstwę w Ω. Uśrednienia dowolnej całkowalnej funkcji $\varphi(\cdot)$, określonej w Ω, po komórce $\Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega^0$, oznaczmy przez $<\varphi>(\mathbf{x})$. Tym samym

$$<\varphi>(\mathbf{x}) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Delta} \int_{\Delta(\mathbf{x})} \varphi(y)\, dy\,, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^0, \tag{4}$$

przy czym dalej oznaczamy $<\varphi> = <\varphi>(\cdot)$. Dostatecznie gładką funkcję $F(\cdot)$ określoną w Ω nazwiemy *wolno zmienną względem Δ*, gdy dla każdego $\mathbf{x}\in\Omega^0$ spełnia ona warunek $<F>(\mathbf{x})\approx F(\mathbf{x})$, przy czym podobny warunek spełniają także wszystkie pochodne funkcji $F(\cdot)$; piszemy wtedy $F\in SV(\Delta)$. Niech ponadto $\psi_\mathbf{x}(\mathbf{y})$ oznacza funkcję Δ-periodyczną względem $\mathbf{y}$ (a więc określoną prawie wszędzie w E^3) oraz wolno zmienną względem $\mathbf{x}\in\Omega^0$. Funkcję $\psi(\cdot)$ o wartościach $\psi(\mathbf{x}) = \psi_\mathbf{x}(\mathbf{x})$ określoną prawie wszędzie w Ω^0 i spełniającą warunek $<\psi>(\mathbf{x}) \approx <\psi_\mathbf{x}>(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega^0$, nazwiemy funkcją *Δ-periodyzującą*, pisząc $\psi\in PL(\Delta)$. Obie wprowadzone definicje, aby były ścisłe, winny także precyzować tolerancję $\approx$, którą można charakteryzować różne dokładności obliczeń bądź pomiarów.

Przejście od równania (1) do równania (2) zrealizujemy wprowadzając dwa założenia. Pierwsze z nich sprowadza się do ograniczenia pól temperatur oraz źródeł ciepła do takich tylko, które można przedstawić odpowiednio w postaci $\theta=\theta^0+\upsilon$, $\theta^0\in SV(\Delta)$, $\upsilon\in PL(\Delta)$ oraz $f = f^0 + \varphi$, gdzie $f^0 = <f>\in SV(\Delta)$, $\varphi\in PL(\Delta)$; założenie to znajduje jasną motywację fizyczną w Δ-periodycznej strukturze kompozytu. Rozkład $\theta=\theta^0+\upsilon$ staje się jednoznaczny po wprowadzeniu warunku normalizującego postaci np. $<\upsilon> = 0$ lub $<c\,\upsilon> = 0$. Po podstawieniu powyższych rozkładów do (1) oraz uśrednieniu tego równania podług dowolnego $\Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega^0$, z uwagi na $\theta^0\in SV(\Delta)$, $\upsilon\in PL(\Delta)$ otrzymamy:

$$\nabla\cdot<\mathbf{A}\cdot(\nabla\theta^0+\nabla\upsilon_\mathbf{x})>(\mathbf{x}) - <c>\dot{\theta}^0 - <c\dot{\upsilon}_\mathbf{x}>(\mathbf{x}) = <f>(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega^0, \tag{5}$$

gdyż w dowolnej komórce $\Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega^0$ funkcję υ można aproksymować funkcją periodyczną $\upsilon_\mathbf{x}$ (w dziedzinie zawężonej do $\Delta(\mathbf{x})$). Ponieważ $\theta^0\in SV(\Delta)$, przeto dla $\upsilon_\mathbf{x}$ otrzymamy na podstawie (1) równanie wariacyjne:

$$\begin{gathered}<\nabla\upsilon^*\cdot\mathbf{A}\cdot\nabla\upsilon_\mathbf{x}>(\mathbf{x}) + <\upsilon^* c\dot{\upsilon}_\mathbf{x}>(\mathbf{x}) = <\upsilon^* f>(\mathbf{x}) - \\ - <\upsilon^* c>(\mathbf{x})\dot{\theta}^0(\mathbf{x},t) - <\nabla\upsilon^*\cdot\mathbf{A}>(\mathbf{x})\cdot\nabla\theta^0(\mathbf{x},t)\,,\end{gathered} \tag{6}$$

które winno być spełnione dla każdej periodycznej funkcji testowej υ^*.

Drugie założenie, stanowiące fizyczną podstawę homogenizacji, polega na pominięciu w (5) i (6) wyrazów zawierających $<c\dot{\upsilon}_\mathbf{x}>$, $<\upsilon^* c\dot{\upsilon}_\mathbf{x}>$, $<\upsilon^* c>$ oraz ograniczeniu rozważań do rozkładów źródeł ciepła $f\in SV(\Delta)$, tj. $f \approx f^0$. Problem (6) dla $\upsilon_\mathbf{x}$, $\upsilon^*\in H^1_{per}(\Delta)$ oraz $<\upsilon_\mathbf{x}> = <\upsilon^*> = 0$ ma wtedy jednoznaczne rozwiązanie, prowadzące do $\nabla\upsilon_\mathbf{x} = \nabla\mathbf{N}\cdot\nabla\theta^0(\mathbf{x},t)$;

wektor $\mathbf{N} \in H^{1}_{per}(\Delta)$ jest tutaj rozwiązaniem problemu periodycznego $\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{N}) = - \nabla \cdot \mathbf{A}$. Tym samym równanie (5), po wprowadzeniu macierzy jednostkowej **I**, jest równaniem o stałych współczynnikach

$$\nabla \cdot (\langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{N}) \rangle \cdot \nabla \theta^{0}) - \langle c \rangle \theta^{0} c\, \upsilon_{\mathbf{x}} = f,$$

a po oznaczeniu $c^{0} \equiv \langle c \rangle$, $\mathbf{A}^{0} \equiv \langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{N}) \rangle$ sprowadza się do równania (2).

W celu uogólnienia modelu zhomogenizowanego odrzućmy drugie z powyższych założeń, które w przeciwieństwie do pierwszego nie ma jasnej interpretacji fizycznej. Otrzymane tą drogą modele nazwiemy modelami nieasymptotycznymi. Tym samym punktem wyjścia dalszych rozważań są równania (5) i (6), w których $f = f^{0} + \varphi$, gdzie $f^{0} \approx \langle f \rangle$, $\langle \varphi \rangle = 0$ oraz θ^{0}, $f^{0} \in SV(\Delta)$, zaś υ, υ^{*}, $\varphi \in PL(\Delta)$. Rozważmy niezależnie przypadki: ustalonego i zmiennego w czasie pola temperatury.

Gdy pole temperatury jest niezależne od czasu, przy warunku normalizacyjnym $\langle \upsilon_{\mathbf{x}} \rangle = 0$, $\langle \upsilon^{*} \rangle = 0$, równanie (6) dla $\upsilon_{\mathbf{x}} \in H^{1}_{per}(\Delta)$ i przy założeniu $\varphi_{\mathbf{x}} \in L^{2}_{per}(\Delta)$ prowadzi do warunku:

$$\langle \nabla \upsilon^{*} \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla \upsilon_{\mathbf{x}} \rangle (\mathbf{x}) = - \langle \nabla \upsilon^{*} \cdot \mathbf{A} \rangle (\mathbf{x}) \cdot \nabla \theta^{0}(\mathbf{x}) + \langle \upsilon^{*} \varphi_{\mathbf{x}} \rangle (\mathbf{x}), \tag{7}$$

dla każdego $\upsilon^{*} \in H^{1}_{per}(\Delta)$. Ponieważ $\langle \varphi_{\mathbf{x}} \rangle = 0$, przeto rozwiązanie problemu (7) dla każdego $\mathbf{x} \in \Omega^{0}$ jest jednoznaczne z dokładnością do stałej adytywnej, por. [2], str. 10. Tym samym $\nabla \upsilon_{\mathbf{x}} = \nabla \mathbf{N} \cdot \nabla \theta^{0}(\mathbf{x}) + \nabla \tilde{\upsilon}_{\mathbf{x}}$, gdzie $\tilde{\upsilon}_{\mathbf{x}}$ zależy od $\varphi_{\mathbf{x}}$, natomiast **N** jest określone jak poprzednio. Przy założeniu istnienia funkcji $\tilde{\upsilon} \in PL(\Delta)$ równanie (5) daje wtedy:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}^{0} \cdot \nabla \theta^{0}) + \nabla \cdot \langle \mathbf{A} \cdot \nabla \tilde{\upsilon} \rangle - f^{0} = 0. \tag{8}$$

Gdy $\varphi \in PL(\Delta)$ jest jednocześnie funkcją periodyczną, $\varphi \in H^{1}_{per}(\Delta)$, to $\varphi = \varphi_{\mathbf{x}}$ na każdym $\Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega^{0}$, a tym samym mamy do czynienia z jednym i tym samym problemem periodycznym (7) dla każdego $\mathbf{x} \in \Omega^{0}$. W przypadku ogólniejszym funkcje $\tilde{\upsilon}_{\mathbf{x}}$ należy wyznaczać niezależnie dla poszczególnych komórek, co znacznie utrudnia sformułowanie równania (8). Określony tym równaniem nieasymptotyczny uśredniony model przewodnictwa cieplnego w kompozycie uwzględnia oscylację źródeł ciepła w poszczególnych komórkach kompozytu; gdy oscylacja taka nie występuje, to $\tilde{\upsilon} = 0$ i otrzymamy z (8) równanie analogiczne do równania w teorii homogenizacji. Tym samym dla ustalonych zagadnień przewodnictwa cieplnego, w których ponadto źródła ciepła można opisać funkcjami wolno zmiennymi względem komórki Δ, model nieasymptotyczny jest identyczny ze zhomogenizowanym.

Dla nieustalonych zagadnień przewodnictwa cieplnego funkcje $\upsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{y},t)$, $\mathbf{y}\in\Delta(\mathbf{x})$ wyznaczymy z równania (6) posługując się metodą ortogonalizacyjną i przyjmując $<\upsilon> = 0$. Zagadnienie własne odpowiadające (6) jest zagadnieniem periodycznym danym przez

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla h) + \lambda\, c\, h = 0, \tag{9}$$

w którym λ jest wartością własną oraz funkcja h jest Δ-periodyczna i spełnia warunek $<h> =$ $= 0$ i te same warunki regularności jak pole temperatury. Oznaczając przez h^A, $A=1, 2,\ldots$ układ funkcji własnych powyższego zagadnienia dla dowolnego $\mathbf{x}\in\Omega^o$ przyjmiemy:

$$\upsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{y},t) = h^A(\mathbf{y})\, V^A(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{y}\in\Delta(\mathbf{x}), \tag{10}$$

przy czym A, B=1, 2, ... , N (obowiązuje konwencja sumacyjna), natomiast $V^A(\mathbf{x},t)$ są nowymi niewiadomymi. Niewiadome te dla każdego $\mathbf{x}\in\Omega^o$ muszą spełniać warunki ortogonalizacyjne, które otrzymamy z (6) przyjmując $\overset{*}{\upsilon} = h^A$, $A=1, 2, \ldots , N$. Z warunku $\upsilon\in PL(\Delta)$ otrzymujemy, że $V^A(\cdot,t)\in SV(\Delta)$. Podstawowymi niewiadomymi problemu są więc odwzorowania $t \to \theta^o(\cdot,t)$, $t\to V^A(\cdot,t)$, gdzie $\theta^o(\cdot,t)$, $V^A(\cdot,t)$ są określonymi na Ω^o funkcjami wolno zmiennymi, przy czym z (5) i (6) otrzymamy dla θ^o, V^A , $A = 1, 2, \ldots , N$ następujący układ równań:

$$\nabla \cdot (<\mathbf{A}> \cdot \nabla\theta^o + <\mathbf{A}\cdot\nabla h^A>V^A) - < c >\dot{\theta}^o - <c\, h^A>\dot{V}^A = f^{\,o}$$

$$<c\, h^A h^B >\dot{V}^B + <\nabla h^A \cdot \mathbf{A}\cdot\nabla h^B>V^B + <c\, h^A>\dot{\theta}^o + <\nabla h^A \cdot \mathbf{A} > \cdot \nabla\theta^o = <h^A \varphi > . \tag{11}$$

Są to równania o stałych współczynnikach, reprezentujące nieasymptotyczny model przewodnictwa cieplnego dla zagadnień nieustalonych. Gdy warunek normalizacyjny przyjmiemy w postaci $< c\, \upsilon > = 0$, wtedy w (11) znikają wyrazy zawierające $<c\, h^A>$, natomiast $<h^A\varphi >$ zmienić należy na $<h^A f >$. Charakterystyczną cechą tych równań jest, że dla niewiadomych V^A otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych; sytuacja jest tu podobna do opisanej w [5], a tym samym funkcje V^A można nazwać funkcjami zmiennymi wewnętrznymi. W przeciwieństwie do modelu przewodnictwa cieplnego dla zagadnień ustalonych (por. (8)) otrzymany tu model może być formułowany z różną dokładnością, która zależy od liczby funkcji własnych h^A, $A=1, 2, \ldots , N$, w rozwinięciu (10).

3. Wnioski

Przedstawione uśrednione równania przewodnictwa cieplnego (8) oraz (11) w kompozytach periodycznych otrzymano poprzez osłabienie założeń zawartych *implicite* w znanej metodzie homogenizacji asymptotycznej. Tym samym opisują one również te problemy fizyczne, których nie można badać za pomocą modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. W przypadku zagadnień stacjonarnych jest to wpływ oscylacji źródeł ciepła na rozkład temperatury, określony drugim składnikiem równania (8). Dla zagadnień nieustalonych efekt ten ujmuje prawa strona drugiego z równań (11). Otrzymany model opisuje także bardzo istotny w problemach niestacjonarnych wpływ wielkości komórki periodyczności na przewodnictwo cieplne (efekt skali), gdyż stałe współczynniki $\langle c\, h^A h^B \rangle$, $\langle c\, h^A \rangle$ w równaniach (11) (w przeciwieństwie do pozostałych współczynników), zgodnie z (9) zależą od wielkości komórki. Ten efekt skali nie występuje w zagadnieniach stacjonarnych, opisanych równaniem (8) . Ponadto model określony równaniami (11) uwzględnia także wpływ możliwych silnych oscylacji pola temperatury w chwili początkowej t_0 na przewodnictwo cieplne przy założeniu, że oscylacje te można przedstawić z wystarczającą dokładnością formułą (10) dla $t = t_0$. Wpływ ten opisują warunki początkowe dla funkcji $V^A(\mathbf{x},\cdot)$, $\mathbf{x}\in\Omega^0$.

Jak zaznaczono we wstępie, problem fizycznej wiarygodności modelu zhomogenizowanego jest raczej otwarty, gdyż pominięcie pewnych wyrazów w (5) i (6) (wymienionych po wzorze (6)) może mieć istotny wpływ na rozwiązanie problemu. W przypadku posługiwania się nieasymptotycznymi modelami warunki fizycznej poprawności otrzymanych rozwiązań winny być sprawdzone *a posteriori* jako $\theta^0\in SV(\Delta)$ w modelu dla zagadnień ustalonych oraz $\theta^0(\cdot,t)$, $V^A(\cdot,t)\in SV(\Delta)$ dla nieustalonych zagadnień przewodnictwa cieplnego. W tym drugim przypadku są to jedynie warunki konieczne, gdyż dokładność rozwiązania zależy także od liczby N wyrazów w rozwinięciu (10). Należy jednakże zaznaczyć, że rozwiązanie periodycznego zagadnienia własnego dla równania (9) jest trudne, a w większości problemów funkcje własne h^A otrzymuje się metodami przybliżonymi. Sytuacja jest tu jednakże podobna jak w przypadku homogenizacji, gdzie rozwiązanie **N** problemu periodycznego, poza przypadkami jednowymiarowymi, również otrzymujemy metodami przybliżonymi.

Pewne zastosowania równań (11) można znaleźć w [4], a analizę szczególnego przypadku tych równań w [1]. Należy podkreślić, że przeprowadzone w pracy rozważania dotyczyły wprawdzie tylko zagadnień przewodnictwa cieplnego, niemniej zaproponowane podejście ma charakter ogólny i da się zastosować do różnych zagadnień termomechaniki.

LITERATURA

1. Ignaczak J.: Saint-Venant type decay estimates for transient heat conduction in a composite rigid semispace, J. Therm. Stresses **21**, 1998, 185-204
2. Jikov V.V, Kozlov O.A., Oleinik O.A.: Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer -Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994
3. Sanchez-Palencia E.: Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics 127, Springer - Verlag, Berlin 1980
4. Woźniak Cz., Baczyński Z. F., Woźniak M.: Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites, ZAMM, **76**, 1996, 223-229
5. Woźniak Cz.: Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure, Arch. Mech., **49**, 1997, 421-441

Abstract

In the first part of this contribution certain aspects of the known asymptotic homogenization method, [2, 3], related both to the physical reliability of its results and restrictions imposed on the scope of its physical applications are discussed. By taking into account terms which are neglected in the known homogenization procedure new non-asymptotic models of heat conduction in periodic composite materials are derived. The first model is restricted to steady-state problems where the effect of highly oscillating heat sources on heat conduction is described by the second term in equation (8). The second model with governing equations (11) is related to non-stationary problems and makes it possible to investigate also the effect of periodicity cell size and that of initial temperature oscillations on a heat conduction. The aforementioned effects are described respectively by terms involving coefficients $<c\, h^A h^B>$, $<c\, h^A>$ in (11) and by the initial conditions for unknowns V^A. The criteria of physical reliability for the obtained results are also discussed.