ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z. 86 Nr kol. 1440

Jerzy WYRWAŁ

O ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ METODĄ DEKOMPOZYCJI

Streszczenie. W artykule rozważamy równania operatorowe, których rozwiązanie może być uzyskane metodą dekompozycji. Metoda jest ilustrowana przykładami.

ON THE SOLUTION OF EQUATIONS BY THE DECOMPOSITION METHOD

Summary. In this paper, we consider operator equations whose solution can be obtained by the decomposition method. The method is illustrated with examples.

1. Wstęp

Wśród powszechnie wykorzystywanych, przybliżonych metod rozwiązywania nieliniowych równań operatorowych stosunkowo mało znana jest zaproponowana przez Adomiana [1] metoda dekompozycji. Metoda ta pozwala uzyskać przybliżone rozwiązania w przypadku szerokiej klasy deterministycznych i stochastycznych nieliniowych równań operatorowych, takich jak: równania różniczkowe cząstkowe [2], algebraiczne [3], różniczkowe sprzężone [4] i różniczkowe zwyczajne [5].

Przy wykorzystywaniu tej metody postępuje się w następujący sposób [6]:

- dzieli się dany operator na część liniową i nieliniową,
- odwraca się operator liniowy,
- rozwija się poszukiwaną funkcję w szereg, którego pierwszy wyraz uwzględnia warunki początkowe i/lub brzegowe oraz dane funkcje,
- człony nieliniowe przedstawia się w postaci wielomianów Adomiana,
- kolejne wyrazy szeregu oblicza się stosując procedurę iteracyjną.

W prezentowanym artykule przedstawiono ideę metody, jej podstawowe formuły oraz pokazano możliwości zastosowań na przykładzie kilku prostych zadań.

2. Opis metody

Rozważmy nieliniowe równanie operatorowe

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \tag{1}$$

gdzie: $\mathbf{F}$ – operator nieliniowy, $\mathbf{u}$ – element poszukiwany, $\mathbf{f}$ – element dany.

Załóżmy, że powyższy operator można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{u}), \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{L}$ – odwracalny operator liniowy (np. w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych jest to operator różniczkowy najwyższego rzędu), $\mathbf{R}$ – operator liniowy, który pozostał po wydzieleniu z operatora $\mathbf{F}$ operatora $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$ – operator nieliniowy.

Mnożąc równanie (1) stronami przez operator odwrotny $\mathbf{L}^{-1}$ oraz wykorzystując zależność (2) sprowadzamy je do relacji:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{u} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{u} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f}. \tag{3}$$

Lewą stronę relacji (3) można łatwo obliczyć Ma ona postać:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{g}^{*}, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{g}^{*}$ – funkcja zawierająca warunki graniczne (początkowe i/lub brzegowe).

Podstawiając związek (4) do równania (3) otrzymujemy następującą postać wyjściowego równania operatorowego:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{u} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{u}), \tag{5}$$

gdzie warunki graniczne i funkcję daną zawiera element

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}^{*} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f}. \tag{6}$$

Zgodnie z ideą metody [1] dokonujemy dekompozycji poszukiwanej funkcji, a mianowicie przedstawiamy ją w postaci szeregu funkcyjnego

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots + \mathbf{g}_n + \ldots = \sum_0^{\infty} \mathbf{g}_i, \tag{7}$$

którego wyrazy należy wyznaczyć.

Także operację nieliniową rozwijamy w szereg

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_n + \ldots = \sum_0^{\infty} \mathbf{A}_i, \tag{8}$$

przy czym występujące w nim wielomiany Adomiana [5] są definiowane wzorami:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{N}(\mathbf{g}_0),$$
$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbf{N}\left(\sum_0^n \lambda^i \mathbf{g}_i\right)\right]_{\lambda=0}, \tag{9}$$

gdzie λ jest parametrem.

Podstawiając formuły (7) i (8) do równania (5) otrzymujemy związek:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots + \mathbf{g}_n + \ldots = \mathbf{g}_0 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \ldots + \mathbf{g}_{n-1} + \ldots)\\ - \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{n-1} + \ldots).\end{aligned} \tag{10}$$

Przyrównując do siebie kolejne człony powyższego związku dostajemy następujące formuły rekurencyjne

$$\mathbf{g}_1 = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{g}_0 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_0, \tag{11}$$

$$\mathbf{g}_2 = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{g}_1 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_1, \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_n = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{g}_{n-1} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_{n-1}, \tag{13}$$

pozwalające obliczyć kolejne wyrazy szeregu (7) przy wykorzystaniu wyrazów obliczonych poprzednio.

Poszukiwane rozwiązanie przybliżone ma postać szeregu

$$\mathbf{u} \cong \tilde{\mathbf{u}}_n = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots + \mathbf{g}_{n-1} = \sum_0^{n-1} \mathbf{g}_i, \tag{14}$$

a jego dokładność rośnie wraz z liczbą uwzględnionych wyrazów.

3. Przykłady

Na poniższych przykładach pokazano sposób wykorzystania metody do rozwiązywania prostych równań: algebraicznego kwadratowego, liniowego różniczkowego zwyczajnego i liniowego różniczkowego cząstkowego.

Przykład 1

Jako pierwsze rozpatrzmy algebraiczne równanie kwadratowe

$$x^2 + 5x + 4 = 0. \tag{15}$$

W rozważanym przypadku funkcje i operatory dane są zależnościami:

$$\mathbf{u} \equiv x,$$

$$\mathbf{L} \equiv 5, \qquad \mathbf{L}^{-1} \equiv 0.2,$$

$$\mathbf{R} \equiv 0,$$

$$\mathbf{N}(\cdot) \equiv (\cdot)^2,$$

$$\mathbf{f} \equiv -4.$$

W konsekwencji równanie operatorowe (5) przyjmie postać:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{u}). \tag{16}$$

Jak łatwo obliczyć, na podstawie wzorów (9) oraz (11) – (13)

$$\mathbf{g}^* = 0,$$

$$\mathbf{g}_0 = -0.8,$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{g}_0^2 = 0.64,$$

$$\mathbf{g}_1 = -0.128,$$

$$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{g}_0\mathbf{g}_1 = 0.2048,$$

$$\mathbf{g}_2 = -0.04096,$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{g}_1^2 + 2\mathbf{g}_0\mathbf{g}_2 = 0.08192,$$

$$\mathbf{g}_3 = -0.01638,$$

$$\mathbf{A}_3 = 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_0\mathbf{g}_3 = 0.0367,$$

$$\mathbf{g}_4 = -0.00734.$$

Ograniczając się do pierwszych pięciu wyrazów szeregu (14), otrzymujemy następującą, przybliżoną wartość pierwszego pierwiastka równania (15)

$$x_1 \cong \tilde{\mathbf{u}}_5 = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_4 = -0.99268, \tag{17}$$

przy czym dokładna wartość tego pierwiastka wynosi $x_1 = -1$. Wartość drugiego pierwiastka obliczamy ze znanego wzoru, z którego wynika, iż

$$x_2 = \frac{c}{ax_1} = -4.02949,$$

co jest dobrym przybliżeniem jego dokładnej wartości, wynoszącej $x_2 = -4$.

Przykład 2

Rozważmy z kolei liniowe równanie różniczkowe zwyczajne

$$u'' + u = 0, \tag{18}$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} u(0) &= a, \\ u'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

W tym przypadku funkcje i operatory mają postać:

$$\mathbf{u} \equiv u(x),$$

$$\mathbf{L} \equiv (\cdot)'', \qquad \mathbf{L}^{-1} = \int_0^x \int_0^{x_1} (\cdot) dx_2 dx_1,$$

$$\mathbf{R} \equiv 1,$$

$$\mathbf{N}(\cdot) \equiv 0,$$

$$\mathbf{f} \equiv 0,$$

a równanie (5) sprowadza się do relacji

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{u}. \tag{20}$$

W pierwszej kolejności należy obliczyć wyrażenie:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{u} = u(x) - u(0) - xu'(0) = \mathbf{u} - \mathbf{g}^*,$$

skąd, po wykorzystaniu warunków brzegowych (19), otrzymamy, że

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}^* = a.$$

Ponieważ w rozważanym przypadku

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} \equiv \mathbf{L}^{-1},$$

to - jak łatwo obliczyć – przy wykorzystaniu formuł (11) – (13)

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{a}{2!}x^2,$$

$$\mathbf{g}_2 = +\frac{a}{4!}x^4,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_n = \frac{(-1)^n a}{(2n)!}x^{2n}$$

i w przypadku uwzględnienia n wyrazów szeregu (14) otrzymujemy przybliżone rozwiązanie rozpatrywanego zadania brzegowego w postaci:

$$u \cong \tilde{\mathbf{u}}_n = \sum_0^{n-1} \mathbf{g}_k = a\sum_0^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}. \tag{21}$$

W rozważanym przypadku możemy również uzyskać rozwiązanie dokładne, biorąc nieskończoną sumę wyrazów szeregu (21). Ponieważ [7]

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = \cos x,$$

więc rozwiązanie ścisłe wynosi:

$$u = \sum_{0}^{\infty} \mathbf{g}_k = a \cos x. \tag{22}$$

Przykład 3

Jako trzecie rozważymy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = x, \tag{24}$$

i brzegowym

$$u(0,t) = -t. \tag{25}$$

W przypadku powyższego równania funkcje i operator nieliniowy przedstawiają relacje:

$$\mathbf{u} \equiv u(x,t),$$
$$\mathbf{N}(\cdot) \equiv 0,$$
$$\mathbf{f} \equiv 0.$$

W rozpatrywanym przypadku nie można zadania początkowo-brzegowego – z uwagi na występowanie zarówno operatora pochodnej cząstkowej po czasie, jak i operatora pochodnej cząstkowej po zmiennej przestrzennej – przekształcić bezpośrednio do wymaganej przez metodę postaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{u}, \tag{26}$$

wynikającej z równania (5). Można to uczynić pośrednio zapisując je w pierwszej kolejności w dwóch równoważnych postaciach [2], a mianowicie

$$\mathbf{L}_t \mathbf{u} = -\mathbf{R}_x \mathbf{u}, \tag{27}$$

lub

$$\mathbf{L}_x \mathbf{u} = -\mathbf{R}_t \mathbf{u}. \tag{28}$$

Występujące w równaniach (27) i (28) operatory dane są relacjami:

$$\mathbf{L}_x \equiv \mathbf{R}_x \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \qquad \mathbf{L}_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx_1,$$

$$\mathbf{L}_t \equiv \mathbf{R}_t \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}, \qquad \mathbf{L}_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt_1.$$

Mnożąc równanie (27) stronami przez $\mathbf{L}_t^{-1}$ zaś (28) przez $\mathbf{L}_x^{-1}$, dodając otrzymane rezultaty stronami, przekształcając wynik oraz wykorzystując zależność

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{u} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_x^{-1}\mathbf{L}_x + \mathbf{L}_t^{-1}\mathbf{L}_t\right)\mathbf{u} = u - \frac{1}{2}u(x,0) - \frac{1}{2}u(0,t) = \mathbf{u} - \mathbf{g}^*,$$

sprowadzamy wyjściowe zadanie do postaci (26), przy czym

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_x^{-1}\mathbf{R}_t + \mathbf{L}_t^{-1}\mathbf{R}_x\right),$$

natomiast

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}^* = \frac{1}{2}(x-t).$$

W ostatniej zależności wykorzystano warunek początkowy (24) i brzegowy (25).

Łatwo wykazać, przy wykorzystaniu wzorów rekurencyjnych (11) – (13), że

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{g}_0,$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{2^2}\mathbf{g}_0,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_n = \frac{1}{2^n}\mathbf{g}_0.$$

Biorąc n wyrazów szeregu (14) dostajemy przybliżone rozwiązanie rozpatrywanego zadania początkowo-brzegowego w postaci

$$u \cong \tilde{\mathbf{u}}_n = \sum_0^{n-1}\mathbf{g}_k = \sum_0^{n-1}\frac{1}{2^k}\mathbf{g}_0. \tag{29}$$

Również w tym przypadku istnieje rozwiązanie dokładne, które możemy uzyskać biorąc nieskończoną sumę wyrazów szeregu (29). Ponieważ [7]

$$\sum_0^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2,$$

zatem

$$u = x - t, \tag{30}$$

co jest rozwiązaniem ścisłym.

W przypadku uwzględnienia sześciu wyrazów szeregu (29) otrzymujemy następujące rozwiązanie przybliżone:

$$u \cong \tilde{\mathbf{u}}_6 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)(x-t) = 0.984375(x-t).$$

4. Wnioski

Szereg innych przykładów zastosowań prezentowanej metody w fizyce i inżynierii można znaleźć w cytowanych pracach. Prezentowane przykłady wskazują na fakt, iż metoda dekompozycji jest efektywną i użyteczną metodą rozwiązywania szerokiej klasy równań fizyki matematycznej.

LITERATURA

1. Adomian G.: Stochastic Systems, Academic Press, New York, 1983
2. Adomian G.: A new approach to nonlinear partial differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **102**, 2, 1984, 420 – 434
3. Adomian G.: On the solution of algebraic equations by the decomposition method, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **105**, 1, 1985, 141 – 166
4. Adomian G. Rach R.: A coupled nonlinear systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **113**, 2, 1986, 510 – 513
5. Venkatarangan S.N., Rajalakshmi K.: A modification of Adomian's solution for nonlinear oscillatory systems, Computer Mathematics and Applications, **29**, 6, 1995, 67 – 73
6. Venkatarangan S.N., Rajalakshmi K.: A modification of Adomian's decomposition method to solve equations containing radicals, Computer Mathematics and Applications, **29**, 6, 1995, 75 – 80
7. Poradnik inżyniera. Matematyka, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa, 1986

Abstract

The decomposition methodology of Adomian has now been applied to a very wide variety of nonlinear equations. It is a general and powerful method distinctly different from usual method. It can reasonably be considered to be an analytic approximation method which provides realistic solutions to physical problems since it requires no linearization or perturbative methods. Further it provides insight into the nature of the solutions and provides expressions whose derivatives are approximations to the derivatives so that the approximation – generally a very rapidly convergent series – can be verified at any stage of approximation. An accurate numerical solution can be obtained and no cumbersome expressions are involved. The method provides a new approach to nonlinear problems of all types.