

Janusz WALCZAK

Marian PASKO

INTERPOLACYJNA METODA SYNTEZY FUNKCJI RZECZYWISTYCH

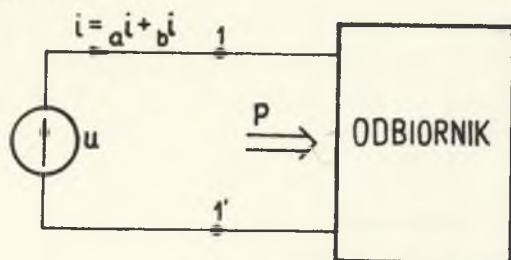
Streszczenie. W artykule sformalizowano problem syntezy interpolacyjnej funkcji rzeczywistych, sprowadzający się do wyznaczenia funkcji rzeczywistej (immitancji) dwójników podklasy $\pm R, L, C$ przyjmującej dla zadanego i skończonego widma częstotliwości zadane wartości. Wykorzystując teorię stożków dodatnich, podano warunki wystarczające rozwiązania postawionego problemu. Przedstawiono również realizacje minimalne rozwiązań problemu syntezy w sensie minimalnej liczby użytych rezystancji ujemnych. Uzyskane wyniki, które znajdują zastosowanie w teorii mocy układów z przebiegami odkształconymi, zilustrowano przykładem liczbowym.

1. WSTĘP

Rozpatrywany w artykule problem powstał w wyniku wcześniejszych prac [5], [6], [7], [19], [22], dotyczących teorii mocy układów z przebiegami odkształconymi, opierającej się na koncepcji S.Fryzego [11]. W myśl tej koncepcji prąd źródła (rys.1) napięcia odkształconego zasilającego odbiornik dwuzaciskowy rozkłada się na dwa składniki:

- aktywny (i_a), umożliwiający doprowadzenie do odbiornika zadanej mocy czynnej P ,
- bierny (i_b), reprezentujący niepożądaną pozostałość prądu, którą należy eliminować.

Współczesne uogólnienia koncepcji S.Fryzego doprowadziły do uzyskania wielu rozkładów prądu źródła o mniej lub bardziej określonej interpretacji fizycznej [1], [5], [9], [10], [12], [16], [21], [22]. Możliwa jest [8] pewna unifikacja sposobów wyznaczania rozkładów prądu źródła o dowolnej



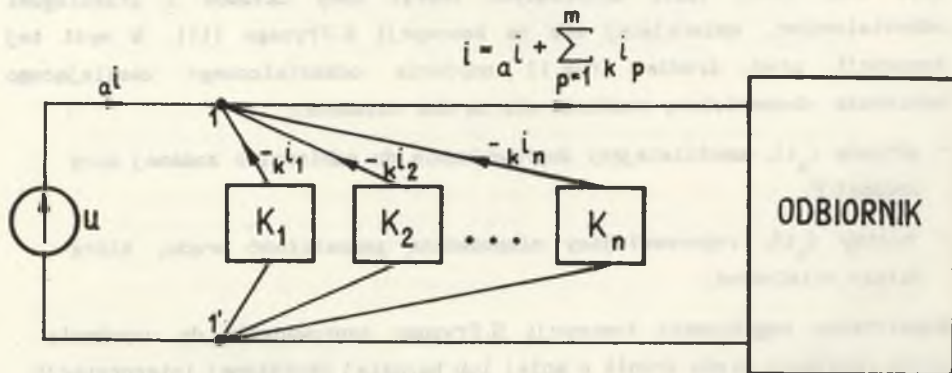
(skończonej) liczbie faz, którą przeprowadza się w przestrzeniach Hilberta prądów i napięć źródeł zasilających odbiorniki.

Rys.1. Odbiornik zasilany ze źródła napięcia odkształconego

Unifikacja ta składa się z dwóch etapów:

1. Minimalizacji wskaźnika jakości prądu [5], [6], [7], [9], będącego pewnym funkcjonałem w przyjętej przestrzeni Hilberta, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzaną do odbiornika. Element minimalizujący wymieniony funkcjonał nazywany jest prądem aktywnym.
2. Dekompozycji różnicy całkowitego prądu źródła i prądu aktywnego na dalsze składniki i_{k_p} ($p \in \{1, \dots, m\}$) wynikłej z możliwości ich kompensacji (eliminacji).

Kompensację tę przeprowadza się poprzez dołączenie, równolegle do zacisków odbiornika, dwójników kompensacyjnych K_p ($p \in \{1, \dots, n\}$) (rys.2), realizowalnych w zadanych klasach elementów.



Rys.2. Struktura układu kompensacji

W często spotykanym w praktyce przypadku zasilania odbiornika ze źródła

napięcia okresowego, odkształconego (rys.1); minimalizacją wartości skutecznej prądu źródła prowadzi do następującego rozkładu ortogonalnego (w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni $L^2(0;T)$) [1], [9] prądu:

$$i = i_a + i_r + i_s, \quad (1)$$

gdzie:

i - całkowity prąd źródła,

i_a - składnik aktywny prądu określony wzorem:

$$i_a = G_e u, \quad (2)$$

i_r - składnik reaktancyjny prądu określony wzorem:

$$i_r = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(jh\omega(\cdot)) \quad (3)$$

i_s - składnik rozproszenia prądu określony wzorem:

$$i_s = (G_u - G_e) U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_e) U_h \exp(jh\omega(\cdot)). \quad (4)$$

We wzorach (1) do (4) przyjęto oznaczenia:

U_h - wartość zespolona skuteczna h-tej harmonicznej napięcia u ,

$Y_h = G_h + jB_h$, $h \in \{0, 1, \dots\}$ - admitancje odbiornika dla poszczególnych harmonicznych,

G_e - konduktancja zastępcza określona wzorem:

$$G_e = \frac{P}{\|u\|_L^2}, \quad (5)$$

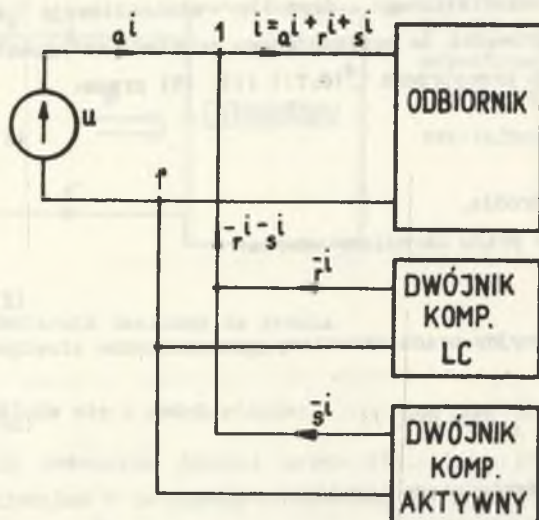
gdzie:

P - zadana moc czynna doprowadzana do odbiornika,

$\|u\|_L^2$ - wartość skuteczna napięcia zasilającego odbiornik.

Składowa aktywna prądu (1) posiada minimalną wartość skuteczną i transportuje do odbiornika zadaną moc czynną P . Składowe reaktancyjna i rozproszenia są niepożądane i należy je eliminować w sposób opisany powyżej (rys.2).

Skończona liczba harmonicznych składowej reaktancyjnej (i_r) prądu może być zawsze skompensowana [19] za pomocą dwójnika reaktancyjnego LC (rys.3).



Rys.3. Układ kompensacji - przebiegi okresowe

Kompensacja składowej rozproszenia prądu (i) jest niemożliwa w klasie dwójników pasywnych [9], ponieważ admitancja dwójników kompensacyjnych nie jest funkcją rzeczywistą dodatnią, lecz tylko funkcją rzeczywistą (por. (4)).

Zagadnienie syntezy układu kompensacji składowej rozproszenia prądu źródła w pewnej klasie dwójników aktywnych rozpatrzone poniżej.

2. PROBLEM SYNTEZY

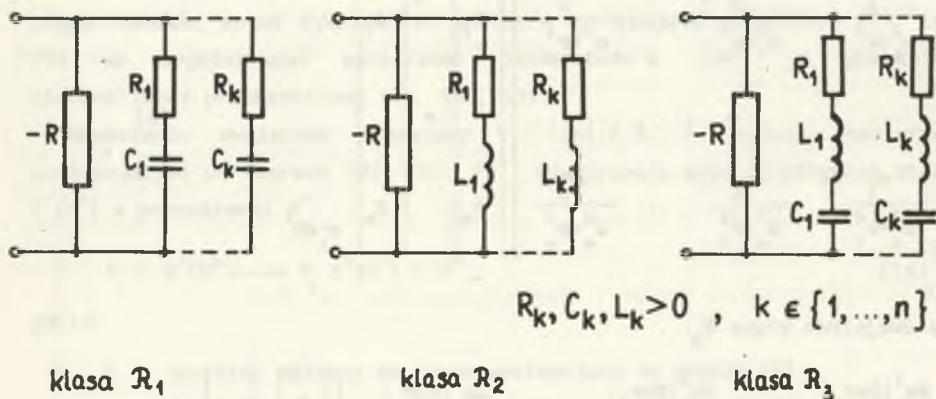
Ze wzoru (4) wynika, że eliminacja skończonej liczby n harmonicznych składowej rozproszenia prądu źródła jest możliwa poprzez włączenie, równoległe do jego zacisków, dwójnika o admitancji $Y(s)$, takiej że:

$$\bigwedge_{\substack{h \in \mathbb{N} \\ \text{card } N_0 = n}} \text{Re}\{Y(j\omega)\} \Big|_{\omega = \omega_h} = - (G_n - G_0) \quad (6)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$G_n, G_0 \in \mathbb{R}^+$$

Problem syntezy sprowadza się więc do interpolacji części rzeczywistej dwójników, zgodnie ze wzorem (6). W przeciwieństwie do znanych metod syntezy dwójników klasy $(\pm R, L, C)$ [13], [15], [17], admitancja $Y(s)$ dwójnika będzie wynikiem rozwiązania postawionego w artykule problemu syntezy, a nie wielkością zadaną. Należy zauważyć, że prezentowana w artykule metoda interpolacyjna syntezy nie jest jedyna, znane są [18] metody rozwiązania postawionego problemu oparte na aproksymacji admitancji dwójników. Z uwagi na wymaganą stabilność zwarciovą dwójników i możliwie małą liczbę elementów aktywnych użytych do ich realizacji (ze względu na zastosowanie do kompensacji w układach przemysłowych) problem syntezy rozpatrzono w podzbiorach $\mathcal{R}_1(\pm R, C)$, $\mathcal{R}_2(\pm R, L)$, $\mathcal{R}_3(\pm R, L, C)$ klas $(\pm R, C)$, $(\pm R, L)$, $(\pm R, L, C)$ dwójników o strukturach kanonicznych Fostera przedstawionych na rys. 4.



Rys. 4. Klasy realizacji dwójników

Rozpatrywany problem syntezy (PS) formuluje się następująco:

Wyznaczyć admitancję $Y(s)$ dwójnika klasy R \mathcal{R}_1 ($1 \in \{1, 2, 3\}$) spełniająca warunki określone wzorem (6), gdy zadane są:

- konduktancje odbiornika G_h (dla $h \in \{1, \dots, n\}$, harmonicznych) i konduktancja G_e ,
- zbiór n biegunów $\left\{ \sigma_h \right\}_{h \in \mathbb{N}_0}$ dwójnika przyjętej klasy \mathcal{R}_1 .

□

Wykorzystując wzory określające postaci kanoniczne $Y(j\omega)$ dwójników klas \mathcal{R}_1 [13], rozwiązanie problemu (PS) sprowadza się do rozwiązania następujących

układów równań liniowych względem współrzędnych wektora k :

- dla dwójników klasy \mathcal{R}_1 :

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \sigma_i \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

- dla dwójników klasy \mathcal{R}_2 :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\sigma_n}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_1}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\sigma_n}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \sigma_i \in \mathbb{R}^+ \quad (8)$$

- dla dwójników klasy \mathcal{R}_3 :

$$\begin{bmatrix} \frac{2\omega_1^2 |\operatorname{Re}\sigma_1|}{\omega_1^4 + \omega_1^2 (|\sigma_1|^2 + |\sigma_1|^4)} & \frac{2\omega_1^2 |\operatorname{Re}\sigma_2|}{\omega_1^4 + \omega_1^2 (|\sigma_2|^2 + |\sigma_2|^4)} & \cdots & \frac{2\omega_1^2 |\operatorname{Re}\sigma_n|}{\omega_1^4 + \omega_1^2 (|\sigma_n|^2 + |\sigma_n|^4)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2\omega_n^2 |\operatorname{Re}\sigma_1|}{\omega_n^4 + \omega_n^2 (|\sigma_1|^2 + |\sigma_1|^4)} & \frac{2\omega_n^2 |\operatorname{Re}\sigma_2|}{\omega_n^4 + \omega_n^2 (|\sigma_1|^2 + |\sigma_1|^4)} & \cdots & \frac{2\omega_n^2 |\operatorname{Re}\sigma_n|}{\omega_n^4 + \omega_n^2 (|\sigma_n|^2 + |\sigma_n|^4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \sigma_i \in \mathbb{C} \quad (9)$$

gdzie:

k - wektor współczynników form kanonicznych dwójników klas \mathcal{R}_i :

$$k = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T; \quad \dim k = n, \quad (10)$$

g - wektor prawych stron równań (7), (8), (9):

$$g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T; \dim g = h, \quad (11)$$

$$g_h = -(G_n - G_e) - k_0, \quad h \in \{1, \dots, n\}, \quad (12)$$

$$k_0 = (-R)^{-1} \quad (\text{por. rys.4}). \quad (13)$$

Warunki konieczne i wystarczające rozwiązania problemu (PS) będą spełnione [15], [17], gdy wszystkie współrzędne wektora k (stanowiącego rozwiązanie układu równań (7), (8), (9)) są dodatnie.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU (PS)

Zakładając, że bieguny $|\sigma_h|$ i częstotliwości $\omega_h (h \in \{1, \dots, n\})$ tworzą ciągi rosnące, można wykazać, że macierze występujące we wzorach (7), (8), (9) są uogólnionymi macierzami Vandermonde'a [14], co gwarantuje nieosobliwość przekształceń (7), (8), (9).

Skończenie wymiarowe operatory $V_i (i=1, 2, 3, \dots)$ (opisane macierzami występującymi we wzorach (7), (8), (9)) odwzorowują więc iniektywnie stożki $K^+(R^n)$ w przestrzeni R^n :

$$V_i : K^+(R^n) \longrightarrow V_i K^+(R^n) \subset R^n, \quad (14)$$

gdzie:

V_1 - operator opisany macierzą występującą we wzorze (7)
dla $i=1$, opisany macierzą występującą we wzorze (8) dla $i=2$ oraz
macierzą występującą we wzorze (9) dla $i=3$,

$$K^+(R^n) = \{k \in R^n : (k_1 > 0, k_2 > 0, \dots, k_n > 0)\}. \quad (15)$$

Dobierając wartość współczynnika k_0 zgodnie ze wzorem

$$\bigwedge_{h \in \{1, \dots, n\}} - \{G_n - G_e\} - k_0 > 0 \quad (16)$$

łatwo zauważyć, że operatory V_i odwzorowują stożek $K^+(R^n)$ w siebie, tzn.:

$$V_i : K^+(R^n) \longrightarrow V_i K^+(R^n) \subset K^+(R^n). \quad (17)$$

Zbiór $V_i K^+$ nazywamy klinem [14].

Z powyższych rozważań wynika, że:

Jeżeli:

1. Założone w problemie (PS) ciągi $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ są ciągami rosnącymi

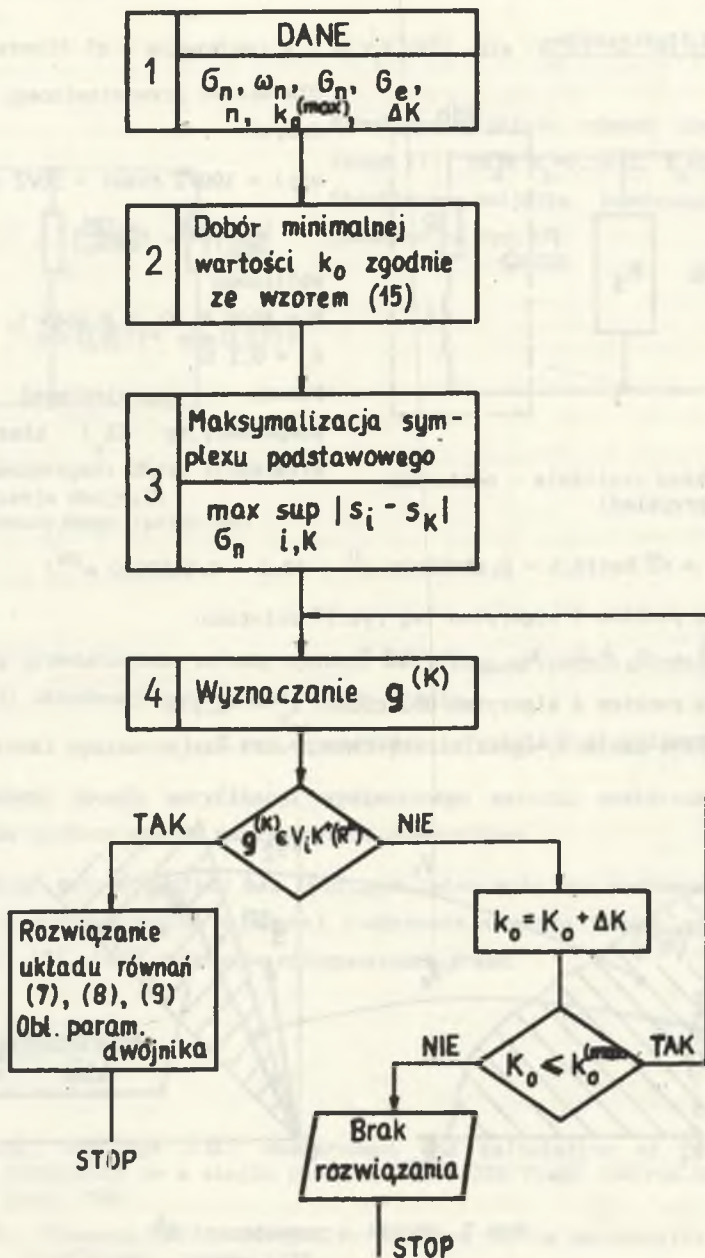
$$2. \bigvee_{k_0 \in \mathbb{R}^-} \bigvee_{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}} g \in V_1 K^+(R^n), \quad (17a)$$

to problem syntezy posiada pozytywne rozwiązanie.

Niestety opisany powyżej warunek nie pozwala w sposób bezpośredni stwierdzić, czy dla danego zbioru biegunów dwójnika $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, częstotliwości $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, oraz zbioru parametrów $\{G_n - G_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje rozwiązanie problemu (PS). Wynika to z faktu, że macierze występujące we wzorach (7), (8), (9) nie są macierzami typu M [2] posiadającymi dodatnie odwrotności, a uogólniona teoria dodatniej odwracalności operatorów V_1 [3], [4], [22] nie pozwala określić w postaci jawnej warunków istnienia dodatnich operatorów V_1^{-1} .

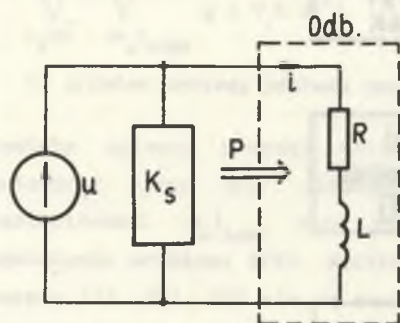
Z przedstawionego powodu identyfikację warunków rozwiązania oraz rozwiązanie problemu (PS) przeprowadzono z wykorzystaniem algorytmu numerycznego (rys. 5).

Procedurę maksymalizacji (punkt 3. algorytmu) przeprowadza się dla $n-1$ wymiarowego sympleksu o wierzchołkach s_i ($i \in \{1, \dots, n\}$). Wierzchołki te określa się drogą wyznaczenia punktów przecięcia części jednostkowej hipersfery n -wymiarowej (leżącej w stożku $K^+(R^n)$) z krawędziami klina $V_1 K^+(R^n)$ dla zadanych macierzy przekształceń (7), (8), (9).



Rys. 5. Algorytm syntezy

Przykład ilustracyjny



Rys.6. Układ zasilania - odbiornik (przykład)

Dla układu przedstawionego na rys.6 o danych:

$$u(t) = 100\sqrt{2} \cos\omega t + 30\sqrt{2} \cos 3\omega t,$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

obliczono

$$P = 5090 \text{ W}, G_0 = 0,4669 \text{ S}, G_1 = 0,5 \text{ S},$$

$$G_3 = 0,1 \text{ S}.$$

Należy zaprojektować dwójnik kompensacyjny (K_S) klasy R_1 do eliminacji prądu rozproszenia:

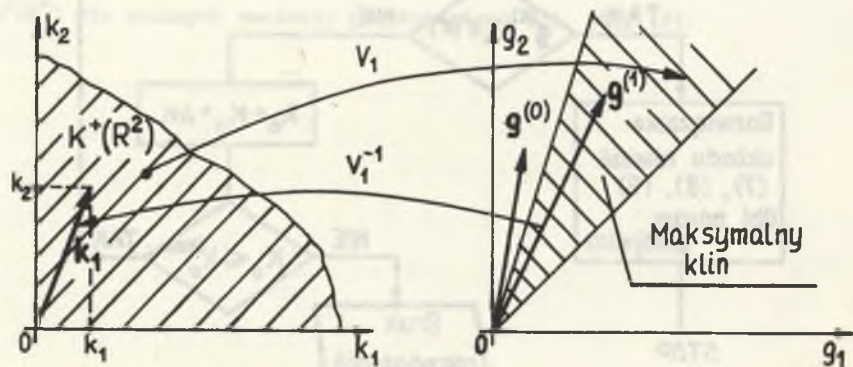
$$i_s = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(0,5 - 0,4669)100 e^{j\omega t} + (0,1 - 0,4669)30 e^{j3\omega t}\}.$$

Zgodnie z punktem 1 algorytmu (wg rys.5) założono:

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3, k_{0(\max)} = -0,5 \text{ S}.$$

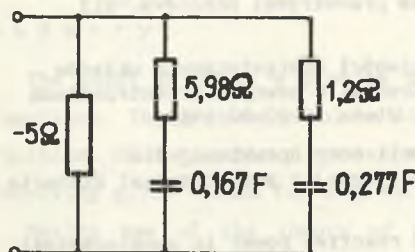
Zgodnie z punktem 2 algorytmu obliczono: $k_0 = -0,1 \text{ S}$.

Klin maksymalny (p.3 algorytm) pokazano na rys.7.

Rys.7. Stożki w przestrzeni R^2

W pierwszej iteracji (p.4 algorytmu) $g^{(0)} \in V_1 K^+(R^2)$ dla $k_0^{(0)} = -0,1 \text{ S}$ (rys.7).

W drugiej iteracji (p.4 algorytmu) $g^{(1)} \in V_1 K^+(R^2)$ dla $k_0^{(1)} = -0,2 \text{ S}$ (rys. 7).



Rozwiązanie układu równań liniowych (wzór (7)) daje $k_1=0,1672$, $k_2=0,8327$. Strukturę dwójnika kompensacyjnego pokazano na rys.8.

Rys.8. Realizacja dwójnika kompensacyjnego (przykład)

Podsumowanie

1. W artykule przedstawiono metodę syntezy dwójników aktywnych służących do kompensacji składowej rozproszenia prądu źródła.
2. Podano warunki wystarczające rozwiązania postawionego problemu syntezy.
3. Zaproponowano sposób weryfikacji wymienionego warunku wystarczającego oraz metodę syntezy opartą na algorytmie numerycznym.
4. Przedstawiona metoda syntezy bez istotnych zmian może być zastosowana do konstrukcji kompensatorów składowej rozproszenia prądu źródła szeregu innych [5], [7], [23] rozkładów ortogonalnych prądu.

LITERATURA

- [1] Beer A.S., van Wyk J.D.: Measurement and calculation of Czarnecki current components in a single phase system. IEEE Trans.Instrum.Meas. vol.39, April 1990.
- [2] Berman A., Plemmons R.J.: Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Acad.Press. London 1979.
- [3] Berman A., Plemmons R.J.: Monotonicity and the generalized inverse. SIAM J. Appl.Math. No 22. 1972.
- [4] Berker G.P.: On matrices having a invariant cone. Czech. Math.J. No 21. 1972.

- [5] Brodzki M., Walczak J., Umińska-Bortliczek M., Pasko M.: Optimierung eines vorgeschlagerten neuen Qualitätsfaktors Elektrischen Energie. 33 Int.Symp.Techn.Univ.Ilmenau Oct. 1988.
- [6] Brodzki M., Walczak J.: Nowe definicje mocy w układach z przebiegami odkształconymi, wykorzystujące pojęcie przestrzeni Soboleva. XII KKTOiUE, Myczkowce 17-20.10.1979.
- [7] Brodzki M., Walczak J.: Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi w pewnych przestrzeniach funkcji prawie okresowych. XIII SPETO, Wisła 19-20.04.1989.
- [8] Brodzki M., Walczak J.: O związku teorii mocy uprawianej dla pojedynczych odbiorników energii elektrycznej z przestrzmiami Hilberta. XIII SPETO, Wisła 22-25.05.1990.
- [9] Czarnecki L.S.: Considerations on the reactive power in nonsinusoidal situations. IEEE Trans.Instrum.Meas. Vol.Im-34, Sept.1984.
- [10] Depenbrock M.: Wirk und Blindleistung ETG-Fachung. "BLINDLEISTUNG", Aachen, Oct.1979.
- [11] Fryze S.: Wirk, Blind und Scheinleistung in Elektrisch Stromkreisen mit nichtsinusförmigen Verlauf vom Strom und Spannung. ETZ. Bd.53, 1932.
- [12] Fodor G., Tevan G.: Powers and compensation in networks in periodic state. Archiv für Elektrotechnik, No 65, 1982.
- [13] Guillemin E.A.: Synthesis of passive networks. J.Wiley, N.York 1965.
- [14] Krasnoselskij M.A., Lifsic F.A., Sobolev A.V.: Pozitivnyje linejnyje sistemy. nauka, Moskva 1985.
- [15] Karni S.: Network Theory: Analysis and Synthesis. All.Bac.Inc., Boston-Mass. 1966.
- [16] Kusters N.L., Moore W.J.M.: On the definition of reative power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans.Power Appl.Syst., Vol. PAS-99. Sept.1980.
- [17] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych. WNT, Warszawa 1974.
- [18] Osowski S.: Formuła optymalizacyjna syntezy obwodów pasywnych. XII SPETO, Wisła 19-22.04.1990.
- [19] Pasko M., Walczak J.: A synthesis of compensation systems of a current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. Int.Conf."Math.Optym. - theory and Appl." Eisenach. Dec. 1989.
- [20] Shepherd W., Zakikhani P.: Suggested definition on reactive power for nonsinusoidal systems. Proc. IEE Vol.119. No 9, Sept.1972.
- [21] Schröder J.: Lineare Operatoren mit positive Inversen. Arch.Rat.math.Anal.No 8. 1961.
- [22] Walczak J.: An analysis of energetistic properties of two-terminal receiver with application of quality indices of deformed currents. Int. Conf. "Math. Optym. - Theory and Appl." Eisenach. Dec.1989.

Recenzent: doc.dr hab.inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 grudnia 1990 r.

INTERPOLATION METHOD OF REAL-VALUED FUNCTION SYNTHESIS

Summary

The paper presents a problem of interpolation synthesis of real-valued functions. The problem resolves itself into determination of a real-valued function of two-ports (imittance function) of the R, L, C sub class receiving given values for a given finite frequency spectrum.

Making use of the theory of positive cones the conditions which are sufficient to solve the problem have been given.

Minimal realization of synthesis problem solutions in the sense of a minimal number of used negative resistances have been also given.

The results which can be used in the theory of system power with nonsinusoidal waveforms have been illustrated by a numerical example.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИИ

Резюме

В статье формализуется проблема интерполяционного синтеза действительных функции сходящаяся к опеределению действительной функции (иммитанции) двухполюсников класса $\pm R, L, C$ принимающей для данного оконченного спектра частоты данные значения.

Употребляя теорию положительных конусов представляются достаточные условия решения данной проблемы.

Совместно даются минимальные реализации решений задачи синтеза в смысле минимума использованных отрицательных резистанции.

Результаты, которые можно применить в теории мощности цепей с несинусоидальными цессати иллюстрируется вычисленным примером.