

Seria: ELEKTRYKA z. 122

Nr kol. 1124

Marian PASKO

Mirosław DYBEK

KOMPUTEROWE WYZNACZANIE STRUKTUR DWÓJNIKÓW KOMPENSUJĄCYCH  
SKŁADOWĄ REAKTANCYJNĄ PRĄDU ŹRÓDŁA NAPIĘCIA ODKSZTAŁCONEGO  
ZASILAJĄCEGO ODBIORNIK LINIOWY

Streszczenie. Artykuł stanowi kontynuację prac dotyczących wyznaczania struktur dwójników mających na celu zmniejszenie wartości skutecznej prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik liniowy. W pracy zamieszczono niezbędną teorię, na podstawie której został skonstruowany algorytm numeryczny do wyznaczania wymienionych dwójników. Zadaniem wyznaczonych dwójników jest kompensacja składowej reaktancyjnej prądu źródła na podstawie znajomości susceptancji odbiornika dla harmonicznych, które należy wykompensować. W pracy przedstawiono przykład doboru dwójników opierając się na zrealizowanym programie komputerowym.

## 1. WSTĘP

Niniejszy artykuł stanowi podsumowanie prac [1], [2], [4], [5], [6], [7] dotyczących możliwości zmniejszenia wartości skutecznej prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik dwuzaciskowy, za pomocą odpowiednich dwójników reaktancyjnych LC. Wyznaczanie struktur dwójników reaktancyjnych podporządkowanych temu celowi sprowadza się do:

- rozwiązania silnie nieliniowych układów równań,
- sprowadzenia omawianego problemu do wykorzystania teorii operatorów liniowych [5], [7].

Pierwszy z wymienionych sposobów sprowadza się do wykazania, że istniejące rozwiązania silnie nieliniowych układów równań spełniają warunki

realizowalności w klasie dwójników LC. Wykazanie powyższych faktów metodami jakościowymi jest rzeczą bardzo trudną. Dlatego też ograniczamy się tylko do drugiego sposobu i cały algorytm syntezy oparty jest na tym sposobie. Natomiast samo zmniejszenie wartości skutecznej prądu źródła jest równoczesne ze zmniejszeniem jego mocy pozornej. Minimalizację mocy pozornej poprzez kompensację mocy biernej indywidualnych harmonicznych wyprowadzono z warunku podanego w 1931 przez L. Staniewicza [8]. Warunek ten wymaga, aby współczynnik mocy źródła był równy jedności, a mianowicie

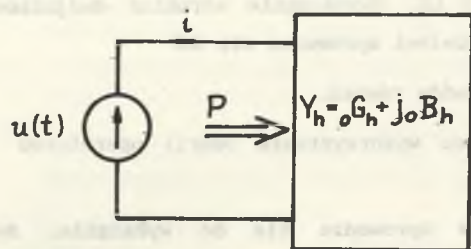
$$\left. \begin{aligned} \frac{|U_n|}{|I_n|} &= \frac{|U_k|}{|I_k|} && \text{(warunek modułu)} \\ \text{Arg}\{U_n\} &= \text{Arg}\{I_n\} && \text{(warunek fazy)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dla każdego  $n, k \in \{1, 2, 3, \dots, l\}$

Autor tego warunku nie podał jednak środków technicznych umożliwiających jego spełnienie. Środki techniczne, za pomocą których można było uzyskać warunki, zostały podane w pracy [3] w 1968, ale sposób ten ze względów technicznych jest nie do przyjęcia. Spełnienie tylko warunku fazy zostało podane przez Emanuela w 1974 [4]. Emanuel stwierdza, że aby skompensować moc bierną  $n$ -harmonicznych, należy włączyć na zaciski odbiornika dwójnik reaktancyjny złożony z  $n(2n-1)$  elementów reaktancyjnych. L.S. Czarnecki w swoich pracach [1], [2] stwierdził, że dla kompensacji  $n$ -harmonicznych wystarczy włączyć dwójnik reaktancyjny złożony z  $m$ -elementów spełniających zależność:

$$n \leq m \leq 2n-1.$$

Kompensacja mocy biernej indywidualnych harmonicznych jest ściśle związana z rozkładem prądu źródła na składowe wzajemnie ortogonalne.



Rys. 1.

W rozkładzie zaproponowanym przez L.S. Czarneckiego kompensacja mocy biernej indywidualnych harmonicznych jest równoznaczna z kompensacją prądu reaktancyjnego, który dla odbiornika dwuzaciskowego (rys.1) zasilanego z idealnego źródła napięcia odkształconego wyraża się wzorem (1).

Niech 
$$u(t) = U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h \exp j h \omega t, \quad (2)$$

$$Y_h = G_h + j B_h, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}$$

wówczas omawiana składowa reaktancyjna prądu źródła ma postać

$$i_r(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} j B_h U_h \exp j h \omega t, \quad (3)$$

gdzie:  $U_h$  - wartość skuteczna zespolona napięcia dla  $h$ -tej harmonicznej.

Warunkiem kompensacji składowej reaktancyjnej prądu źródła (3) dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych jest, aby dla każdego  $h \in \{1, 2, \dots, n\}$  dołączony układ kompensacyjny miał susceptancję  $B_{k_h}$  spełniającą zależność

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} B_{k_h} = -B_h, \quad (4)$$

W literaturze [1], [2] istnieją przykłady rozwiązania tego problemu dla niewielkiej liczby harmonicznych. Brak było natomiast analizy warunków istnienia rozwiązań wymienionego problemu dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych.

Istnieją również przykłady [6] świadczące o tym, że nie zawsze wymieniony problem syntezy ma realizację fizyczną.

Zagadnienia kompensacji prądu  $i_r$  dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych przedstawiono w pracach [5], [7], gdzie podano warunki konieczne i wystarczające rozwiązania powyższego problemu w całej klasie dwójków LC, dla dowolnej zmiany susceptancji  $B_h$ .

Dwójniki LC podzielono na cztery klasy (D1+D4) charakteryzujące się różnymi własnościami  $B_r(\omega)$  przy dążeniu  $\omega$  do zera i nieskończoności, i tak:

$$\left. \begin{array}{l} \text{klasa D1: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = \infty, \\ \text{klasa D2: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = 0, \\ \text{klasa D3: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = \infty, \\ \text{klasa D4: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Dobór odpowiedniej klasy dwójnika LC zależy od zmienności  ${}_0B_h$ . Z dowodu wymienionych warunków koniecznych i wystarczających [5], [7] wynika sposób konstrukcji algorytmu numerycznego pozwalającego na dobór dwójników LC dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych.

## 2. ALGORYTM NUMERYCZNY

Algorytm ten pokazano na schemacie blokowym przedstawionym na rys.2. Poszczególne etapy algorytmu (rys.2 numery od 1 do 6) zostaną opisane w punktach 2.1 do 2.6.

2.1. Dane wejściowe dla algorytmu obliczeniowego stanowią:

- n - liczba kompensowalnych harmonicznych
- wektor susceptancji odbiornika  ${}_0B_h = [{}_0B_1, {}_0B_2, \dots, {}_0B_n]$
- pulsacja podstawowa  $\omega$
- wektor pulsacji kompensowanych

$$H(i) = [H_1, H_2, \dots, H_n]. \quad (6)$$

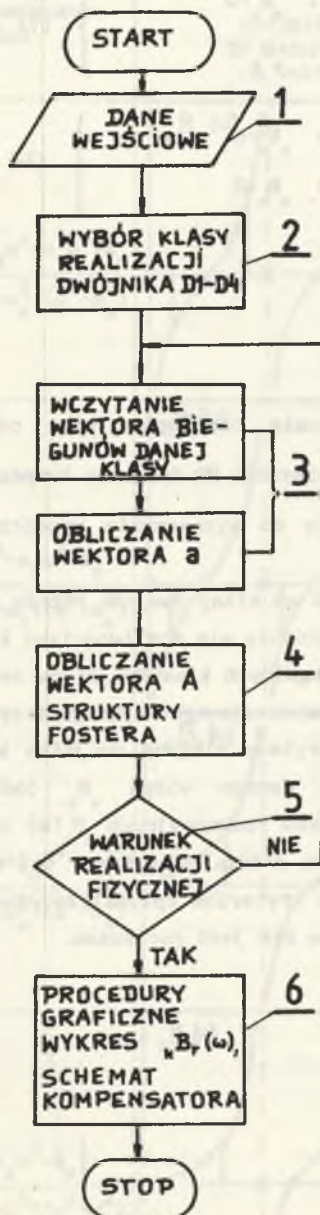
2.2. Po wprowadzeniu danych wejściowych algorytm realizuje wybór klasy dwójnika. Wybór ten wynika z warunku koniecznego realizacji dwójnika kompensującego [5].

Wybór ten jest przeprowadzony następująco:

- Jeżeli wszystkie składowe wektora  ${}_0B_h > 0$ , to realizacja będzie w klasie D2.
- Jeżeli wszystkie składowe wektora  ${}_0B_h < 0$ , to realizacja będzie w klasie D3 lub D4.
- Jeżeli  ${}_0B_1 > 0$  natomiast pozostałe składowe wektora  ${}_0B_h$ , dla  $h > 1$  są  $< 0$ , to realizacja będzie w klasie D1.

Jeżeli wektor susceptancji odbiornika nie spełnia żadnego z wyżej wymienionych warunków, to stosuje się tzw. rozkład delta, który polega na tym, że wektor  ${}_0B_h$  rozbija się na dwa wektory  ${}_0B_{h(1)}$  i  ${}_0B_{h(2)}$  według



ALGORYTM DOBORU  
DWÓJNIKÓW REAKTANCYJNYCH

Rys. 2.

następującej zasady:

$$\bullet B_{(1)h} = \left. \begin{cases} B_h + \Delta_h, & \text{jeżeli } B_h > 0 \\ \Delta_h, & \text{jeżeli } B_h < 0 \end{cases} \right\} (7)$$

$$\circ B_{(2)h} = \left. \begin{cases} -\Delta_h, & \text{jeżeli } B_h > 0 \\ B_h - \Delta_h, & \text{jeżeli } B_h < 0 \end{cases} \right\} (7a)$$

przy czym

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta_h > 0.$$

### 2.3. Realizacja w zadanej klasie rozpoczyna się od zadania:

- wektora częstotliwości biegunów WB dwójnika kompensującego  $B_{kr}(\omega)$ .

Obliczenia sprowadzają się do wyznaczania współczynników  $a_k$  funkcji rzeczywistej wymiernej.

Funkcje  $B_{kr}(\omega)$  w zależności od klasy dwójnika różnią się swą postacią, a odpowiadające im dwójniki różnią się możliwościami kompensacyjnymi.

Funkcje  $B_{kr}(\omega)$  dla poszczególnych klas dwójników zestawiono w tabeli 1 na przykładzie dwójnika kompensującego mającego trzy skończone bieguny. Ponieważ w omawianym algorytmie bieguny dwójnika kompensującego są z góry zadawane, więc dla danego widma  $B_h$  (odbiornika) istnieje nieskończenie wiele dwójników reakcyjnych  $B_{kr}(\omega)$  zdolnych kompensować składową reaktancyjną prądu źródła. O wyborze tej czy innej struktury winno zdecydować przyjęte kryterium optymalizacyjne. Zagadnienie to w ogóle w niniejszym artykule nie jest poruszane.

TABELA 1

Klasa dwójnika	Postać analityczna dwójnika kompensującego $k_r B(\omega)$	Przebieg funkcji $k_r B(\omega)$ dwójnika kompensującego z zaznaczonymi warunkami na wektor $-\{B_h\}$	Liczba komp. harm.
D1	$k_r B(\omega) = \frac{a_8 \omega^8 - a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$		5
D2	$k_r B(\omega) = \frac{-a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$		4
D3	$k_r B(\omega) = \frac{\omega(a_6 \omega^6 - a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_0)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$		4
D4	$k_r B(\omega) = \frac{\omega(-a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_0)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$		3

Z warunku  $B_{kr}(h) = -{}_o B_h$ , oraz przy założonych błęgunach wynika, że wyznaczanie współczynników  $a_k$  funkcji  $B_{kr}(\omega)$  wiąże się z rozwiązaniem układu równań liniowych postaci:

$$Va = b, \quad (8)$$

gdzie  $V$  - macierz Vandermonde'a o wymiarze  $n \times n$  postaci

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 & \omega_1^4 & \dots & \omega_1^{2n-2} \\ 1 & \omega_2^2 & \omega_2^4 & \dots & \omega_2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$a$  - wektor szukanych współczynników licznika funkcji  $B_{kr}(\omega)$  zależny od klasy dwójnika,

$b$  - wektor wyrazów wolnych zależny od klasy dwójnika.

Przykładowo dla dwójnika klasy D2 zamieszczonego w tabeli 1 mamy

$$a = [a_0, -a_2, a_4, -a_6]^T, \quad a_k > 0 \quad (10)$$

$$b = [-{}_o B_1 \omega_1 M(\omega_1^2), -{}_o B_2 \omega_2 M(\omega_2^2), -{}_o B_3 \omega_3 M(\omega_3^2), -{}_o B_4 \omega_4 M(\omega_4^2)]^T, \quad (11)$$

$$M(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2).$$

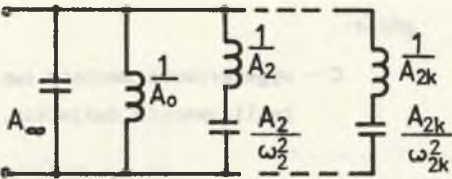
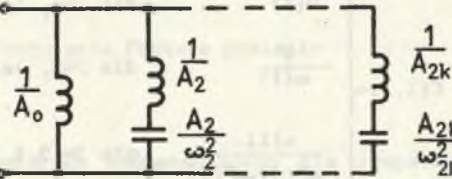
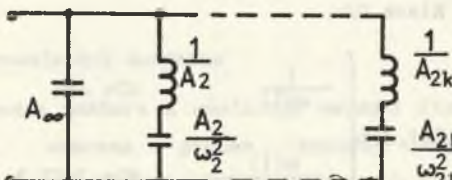
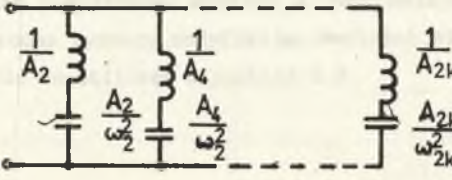
Aby składowe wektora  $a$  spełniały warunek przeplatania znaków, musi zachodzić zgodność znaków odpowiadających sobie składowych  $a$  i  $b$ . Stąd wynika warunek narzucony na widmo  ${}_o B_h$  i podział na klasy. Warunek przeplatania znaków wektora  $a$  jest warunkiem koniecznym, aby funkcja rzeczywista wymierna była funkcją reaktancyjną. Warunek wystarczający sprawdzamy w podobny sposób, a mianowicie otrzymaną funkcję rozwijamy w II postaci kanoniczną Fostera.

#### 2.4. Procedury wyznaczania współczynników II postaci kanonicznej Fostera

Postaci kanoniczne Fostera i odpowiadające jej dwójniki dla poszczególnych klas zestawiono w tabeli 2.



TABELA 2

Klasa	Postać kanoniczna $B_{kr}(\omega)$	Struktura dwójnika
D1	$A_{\infty}\omega \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k}\omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	
D2	$\frac{A_0}{\omega} \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k}\omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	
D3	$A_{\infty}\omega + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k}\omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	
D4	$\sum_{k=1}^n \frac{A_{2k}\omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	

Obliczenia sprowadzają się do wyznaczenia współczynników  $A_{\infty}$ ,  $A_0$ ,  $A_{2k}$ ,  $k \in \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ , które winny spełniać warunki  $A_{\infty} > 0$ ,  $A_0 > 0$ , natomiast  $A_{2k} > 0$ .

Wyznaczenie odbywa się poprzez rozwiązanie układu równań postaci

$$CA = B, \quad (12)$$

gdzie:

$C$  - wygenerowana macierz  $n \times n$  różna dla różnych klas realizowanych dwójników.

Klasa D1:

$$C(I, J) = \begin{cases} \omega(I) & \text{dla } J=1, I \in \{1, 2, \dots, n\} \\ -\frac{1}{\omega(I)} & \text{dla } J=2, J \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{3, 4, \dots, n\}. \end{cases}$$

Klasa D2:

$$C(I, J) = \begin{cases} \frac{1}{\omega(I)} & \text{dla } J=1 \\ \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{2, 3, \dots, n\}. \end{cases}$$

Klasa D3:

$$C(I, J) = \begin{cases} \omega(I) & \text{dla } J=1 \\ \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{2, 3, \dots, n\} \end{cases}$$

Klasa D4:

$$C(I, J) = \begin{cases} \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

**A** - wektor współczynników rozwinięcia Fostera postaci:

$$A = [A_{\omega}, A_0, A_2, \dots, A_{2k}]^T,$$

**B** - wektor susceptancji dwójnika kompensującego dla rozpatrywanych częstotliwości kompensujących

$${}_r B = [{}_r B(1), {}_r B(2), \dots, {}_r B(n)]^T.$$

## 2.5. Sprawdzenie fizycznej realizowalności dwójnika

Jeżeli otrzymane współrzędne wektora **A** spełniają warunki fizycznej realizowalności dwójnika, wówczas proces syntezy dwójnika kompensującego w danej klasie należy uznać za zakończony i następuje przejście do procedur graficznych.

Jeżeli natomiast którakolwiek współrzędna wektora **A** jest mniejsza od zera, to należy powtórzyć proces syntezy, modyfikując wartości biegunów dla danego dwójnika i powrócić do obliczeń w punkcie 2.3.

## 2.6. Procedury graficzne

Następuje wydruk schematów struktury dwójnika kompensującego z naniesionymi parametrami LC oraz wydruk przebiegu susceptancji dwójnika kompensującego  ${}_k B_r(\omega)$ .

### 3. PRZYKŁAD DOBORU DWÓJNIKA KOMPENSUJĄCEGO

#### 3.1. Wektor pulsacji kompensowanych

$$H(1)=[1, 5, 9, 13] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

#### 3.2. Wektor susceptancji odbiornika kompensowanych harmonicznyc

$$B_h=[2, 2, 2, 1] \text{ S.}$$

Na podstawie algorytmu zostanie wybrana klasa D2 dwójnika kompensującego.

#### 3.3. Wybór wektora biegunów

$$WB=[3, 7, 11] \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Dla tak dobranego wektora biegunów otrzymujemy funkcję rzeczywistą syntezywanego dwójnika o postaci

$$B_k(\omega) = \frac{-12,03\omega^6 + 1979,35\omega^4 - 62834,2\omega^2 + 153026,8}{\omega(\omega^2-9)(\omega^2-49)(\omega^2-121)}$$

Pomimo że znaki współczynników licznika realizowanej funkcji  $a_k$  (współczynniki wektora  $a$  (wzór 10)) się przeplatają, to funkcja ta nie jest funkcją reaktancyjną, gdyż wektor współczynników rozwinięcia Fostera  $A$  nie jest ściśle dodatni.

Wektor ten ma postać

$$A=[2,87; 6,47; 2,92; -0,23].$$

Modyfikacja wartości biegunów powoduje, że wektor ten staje się ściśle dodatni.

Przyjmując np. wektor  $WB$  o postaci

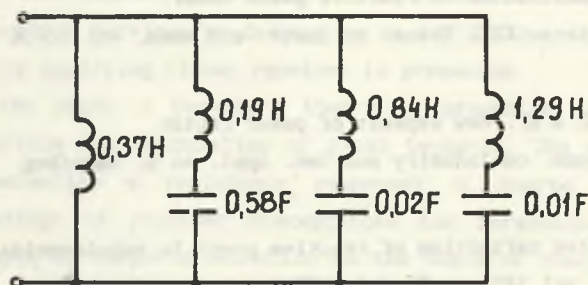
$$WB=[3; 8,5; 11] \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{ wówczas wektor}$$

$$A=[2,68; 5,22; 1,19; 0,78].$$



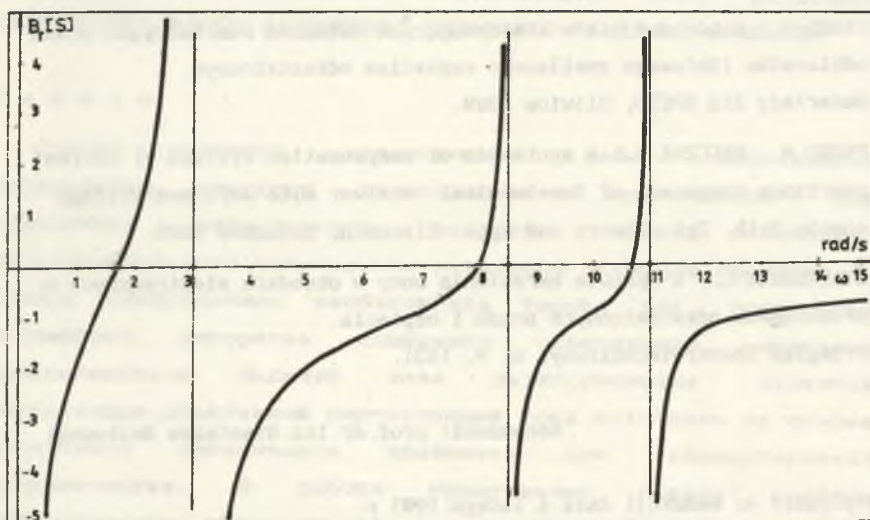
Struktura dwójnika kompensującego dla zmodyfikowanego wektora  $\mathbf{WB}$  przedstawiona jest na rys.3, którego II forma kanoniczna Fostera ma postać:

$$k_{B_r}(\omega) = -\frac{A_0}{\omega} + \frac{5,2,2\omega}{9-\omega^2} + \frac{1,19\omega}{72,25-\omega^2} + \frac{0,78\omega}{121-\omega^2}$$



Rys. 3.

Wykres zmienności susceptancji dwójnika kompensującego  $k_{B_r}(\omega)$  przedstawiono na rys.4.



Wykres susceptancji dwójnika kompensującego

Rys. 4

## LITERATURA

1. CZARNECKI L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka", z.91, Gliwice 1984.
2. CZARNECKI L.S.: Minimalization of reactive power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans. on Instr. and Meas. vol IM-36 no 1, March 1987.
3. ERLICKI M.S., EMANUEL A.E.: New aspects of power factor improvement. IEEE Trans. on Industry and Gen. Appl. no 4, July/Aug. 1968.
4. EMANUEL A.E.: Suggested definition of reactive power in nonsinusoidal systems. Proc. IEEE, vol 121, no 7, July 1974.
5. PASKO M., WALCZAK J.: Metoda syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka", z.113 (w druku).
6. PASKO M.: Dobór dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu odbiornika liniowego zasilanego napięciem odkształconym. Materiały XII SPETO, Gliwice 1989.
7. PASKO M., WALCZAK J.: A synthesis of compensation systems of current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. Math. Opt. Theory and Appl. Eisenach, December 1989.
8. STANIEWICZ L.: W sprawie określenia mocy w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny, nr 9, 1931.

Recenzent: prof.dr inż.Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 lutego 1991 r.

## THE COMPUTER CALCULATION OF THE TWOPORT STRUCTURES FOR COMPENSATION OF A REACTANCE CURRENT OF VOLTAGE-DEFORMED SOURCE SUPPLYING LINEAR RECEIVER

## Summary

A continuation of earlier works devoted to calculation of the twoport structures serving for decreasing an rms of the current of voltage-deformed source supplying linear receiver is presented.

In the paper a necessary theory is presented to construct a numerical algorithm for calculation of cited twoports. The twoports are serving for compensation a resistance component of source current basing on the knowledge of receiver susceptances for harmonics to be compensated. An example of twoports selection on the basis of realized computer program is presented.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУР ДВУХОПЛЮСНИКОВ  
КОМПЕНСИРУЮЩИХ РЕАКТИВНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ТОКА ИСТОЧНИКА  
НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ПИТАЮЩЕГО ЛИНЕЙНЫЙ ПРИЁМНИК

## Резюме

Статья является продолжением работ посвященных определению структур двухполюсников применяемых для уменьшения эффективного значения тока источника несинусоидального напряжения питающего линейный приёмник. В статье представлена необходимая теория для построения численного алгоритма служащего определению названных двухполюсников. Задачей этих двухполюсников является компенсация реактивной составляющей тока источника на основе известного susceptанса приёмника для компенсируемых гармонических. В работе представлен пример подбора двухполюсников использующий компьютерную программу.