

Janusz WALCZAK

OPTIMALIZACJA WARUNKÓW PRACY RZECZYWISTYCH

TRÓJFAZOWYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘĆ ODKSZTAŁCONYCH

I. WYZNACZENIE PRĄDU AKTYWNEGO

Streszczenie. W artykule przedstawiono wyniki analizy energetyczno-jakościowych warunków pracy rzeczywistych, trójfazowych źródeł napięć odkształconych. Sformalizowano i rozwiązano problem minimalizacji wskaźnika jakości prądu źródła, który uwzględnia zarówno ocenę właściwości energetycznych, jak i jakościowych prądu, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzoną do odbiornika. Rozwiązanie wymienionego problemu przeprowadzono przy trzech różnych założeniach odnośnie do operatora impedancji wewnętrznej źródła zasilającego. Przedstawiono interpretację prądu aktywnego będącego rozwiązaniem problemu minimalizacji.

1. WSTĘP

W pracach [2], [5] wykazano, że prądy w obwodach trójfazowych (wielofazowych) z idealnymi źródłami napięć odkształconych mogą być rozłożone na cztery wzajemnie ortogonalne składniki. Każdy z tych składników związany jest z odrębnymi zjawiskami występującymi w obwodach. Eliminacja z prądów odbiornika niektórych z wymienionych składowych ortogonalnych prądów umożliwia zmniejszenie, a nawet minimalizację wartości skutecznych prądów wielofazowych idealnych źródeł napięć odkształconych.

Nowy rozkład ortogonalny prądów idealnych, wielofazowych, źródeł napięć odkształconych podano w pracach [3], [4]. Rozkład ten uzyskano poprzez minimalizację funkcjonału jakości prądu stanowiącego ocenę właściwości energetyczno-jakościowych (wartości skutecznej i zawartości wyższych harmonicznych) prądu.

Próbie uogólnienia wymienionych wyników na układy wielofazowe zasilane z rzeczywistych (o skończonej impedancji wewnętrznej) źródeł napięć odkształconych podjęto w pracy [6]. Wykorzystując transformację Fouriera-Gelfanda, zaproponowano [6] metodę iteracyjnego wyznaczania prądów

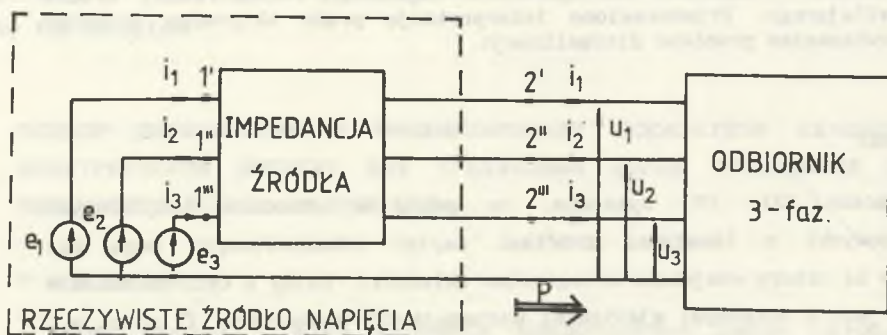
aktywnych minimalizujących wartości skuteczne prądów fazowych źródła rzeczywistego.

Dalsze uogólnienie stanowi analiza właściwości energetyczno-jakościowych układów ze źródłami rzeczywistymi napięć odkształconych przedstawiona w artykule.

Analizę tę przeprowadzono we wprowadzonej wcześniej [3], [4] przestrzeni Sobolewa $W_{2,\alpha,3}^1$ oraz w skojarzonej z nią bijektywnie przestrzeni ciągowej l^2 współczynników szeregów Fouriera napięć i prądów występujących w obwodach. Przedstawiona metoda umożliwiła uzyskanie wyników w postaci zamkniętej.

2. FORMALIZACJA PROBLEMU MINIMALIZACJI

Rozpatrujemy układ złożony z rzeczywistego źródła napięcia trójfazowego, odkształconego, zasilającego odbiornik trójfazowy (rys.1).



Rys.1. Odbiornik trójfazowy zasilany z rzeczywistego źródła napięcia trójfazowego, odkształconego

Fig.1. 3-phase receiver supplied by nonideal and nonsinusoidal 3-phase voltage source

Prąd $i=(i_1, i_2, i_3)$ i napięcie $u=(u_1, u_2, u_3)$ źródła są elementami przestrzeni Sobolewa $W_{2,\alpha,n}^1(0,T)$ [3], z normą i iloczynem skalarnym, które określają wzory:

$$\|f\|_W = \sqrt{\sum_{k=0}^1 \alpha_k \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T \left(f_{\alpha}^{(k)}(t) \right)^2 dt} \quad (1)$$

$$({}_1f, {}_2f)_W = \sum_{k=0}^1 \alpha_k \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T {}_1f_{\alpha}^{(k)}(t) {}_2f_{\alpha}^{(k)}(t) dt, \quad (2)$$

$$f = (f_1, f_2, f_3), \quad {}_1f = ({}_1f_1, {}_1f_2, {}_1f_3), \quad {}_2f = ({}_2f_1, {}_2f_2, {}_2f_3) \in W_{2,\alpha,3}^1,$$

gdzie:

α_k - ($k \in \{0, \dots, 1\}$) - współczynnik wagi,

$f^{(k)}, {}_1f^{(k)}, {}_2f^{(k)}$ - k-te pochodne funkcji $f, {}_1f, {}_2f$,

1 - maksymalny rząd pochodnych funkcji $f, {}_1f, {}_2f$.

Model rzeczywistego źródła napięcia trójfazowego, odkształconego opisuje macierzowy operator impedancji Z.

$$Z : W_{2,\alpha,3}^1(0, T) \times W_{2,\alpha,3}^1(0, T) \rightarrow W_{2,\alpha,3}^1(0, T) \quad (3)$$

określony wzorem:

$$u_{\alpha} = e_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^3 Z^{\alpha\beta} i_{\beta} \quad (4)$$

$$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\},$$

$$u, i, e \in W_{2,\alpha,3}^1(0; T).$$

Operatory skalarne $Z^{\alpha\beta}$ są liniowymi, przyczynowymi i czasowo-niezmienniczymi operatorami typu splotu o jądrach należących do przestrzeni Soboleva $W_2^1(\mathbb{R})$.

Formułujemy następujący problem optymalizacji:

Wyznaczyć

$$\min \left(\|i\|_W \right)^2 \quad (5)$$

przy ograniczeniu

$$P = (u, i)_L, \quad (6)$$

gdzie:

P - zadana moc czynna doprowadzana do odbiornika,

L_3^2 - przestrzeń Hilberta będąca sumą prostą trzech egzemplarzy przestrzeni $L^2(0; T)$, z normą i iloczynem skalarnym, które określają wzory:

$$\|f\|_L = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T f_{\alpha}^2(t) dt}, \quad (7)$$

$$(f_1, f_2)_L = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T f_{1\alpha}(t) f_{2\alpha}(t) dt, \quad (8)$$

$$f_1, f_2 \in W_{2, \alpha, 3}^1(0, T) \subset L_3^2(0; T).$$

Problem optymalizacyjny opisany wzorami (5), (6) polega na wyznaczeniu prądu źródła, który realizuje zadany kompromis (za pomocą współczynników wagi α_k) pomiędzy minimum sumy kwadratów wartości skutecznych prądów fazowych źródła a minimum zniekształceń tych prądów, przy założeniu że do odbiornika doprowadzana jest zadana moc czynna P . Wykorzystując fakt (por. [3], [4]), że przyporządkowania funkcjom $f \in W_{2, \alpha, 3}^1(0; T)$ ich współczynników szeregów Fouriera względem bazy trygonometrycznej przestrzeni $W_{2, \alpha, 3}^1(0, T)$ i $L_3^2(0, T)$ (podobnej do bazy trygonometrycznej przestrzeni $L^2(0; T)$) są bijekcjami, problem optymalizacyjny (5), (6) sprowadza się do minimalizacji następującego funkcjonału Lagrange'a w przestrzeni ciągłej l^2 :

$$\begin{aligned} L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda) &= \sum_{h=0}^{\infty} \nu_h^2 \sum_{\alpha=1}^3 (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\ &+ \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 (E_{1\alpha h} A_{\alpha h} + E_{2\alpha h} B_{\alpha h}) \right] + \\ &+ \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha \alpha h} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\ &+ \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 R_{\alpha \beta h} (A_{\alpha h} A_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h}) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left. \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 X_{\alpha\beta h} \left(A_{\alpha h} B_{\beta h} - A_{\beta h} B_{\alpha h} \right) \right) \quad (9)$$

gdzie:

$E_{\alpha h} = E_{\alpha h} - j_2 E_{\alpha h}$, $I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - j_2 B_{\alpha h}$ - wartości zespolone skuteczne SEM

$e_{\alpha} (\alpha \in \{1, 2, 3\})$ źródła i prądu $i_{\alpha} (\alpha \in \{1, 2, 3\})$ źródła,

$Z_{\alpha\beta h}$ - wartości transformat Fouriera jąder operatorów

$Z^{\alpha\beta} (\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\})$ dla częstotliwości $h\omega$,

$$h \in N^+(0), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$Z_{\alpha\beta h} = R_{\alpha\beta h} + jX_{\alpha\beta h}, \quad (10)$$

$$V_h = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 (h\omega)^2 + \alpha_2 (h\omega)^4 + \dots + \alpha_1 (h\omega)^{21}}, \quad (11)$$

α_k - współczynniki wagi (por. wzór (1), (2)).

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU MINIMALIZACJI

Warunki konieczne ekstremum [1] funkcjonału Lagrange'a określonego wzorem (9) podano poniżej:

$$2V_h^2 A_{\alpha h} - \lambda \left(E_{\alpha h} - 2R_{\alpha\alpha h} A_{\alpha h} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) A_{\beta h} - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) B_{\beta h} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\}$$

$$2V_h^2 B_{\alpha h} - \lambda \left(2 E_{\alpha h} - 2 R_{\alpha \alpha h} B_{\alpha h} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (R_{\alpha \beta h} + R_{\beta \alpha h}) B_{\beta h} - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 (X_{\alpha \beta h} - X_{\beta \alpha h}) A_{\alpha h} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\}$$

$$P - \sum_{h=0}^{\infty} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(E_{\alpha h} A_{\alpha h} + 2 E_{\alpha h} B_{\alpha h} \right) - R_{\alpha \alpha h} \left(A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2 \right) - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 R_{\alpha \beta h} \left(A_{\alpha h} A_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h} \right) - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 X_{\alpha \beta h} \left(A_{\alpha h} B_{\beta h} + A_{\beta h} B_{\alpha h} \right) \right] = 0 \quad (14)$$

Rozwiązanie układu równań (12), (13), (14) względem zmiennych $(A_{\alpha h})$, $(B_{\alpha h})$, λ pozwala wyznaczyć prąd aktywny $(I_{\alpha} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h})$ stanowiący rozwiązanie problemu (5), (6).

Układ równań (12), (13) można zapisać w postaci następującego równania macierzewego (dla każdej harmonicznej h):

$$A_h X_h = E_h, \quad (15)$$

gdzie:

$$X_h = \begin{bmatrix} A_{1h} & A_{2h} & A_{3h} & B_{1h} & B_{2h} & B_{3h} \end{bmatrix}^T, \quad (16)$$

$$E_h = \begin{bmatrix} 1 E_{1h} & 1 E_{2h} & 1 E_{3h} & 2 E_{1h} & 2 E_{2h} & 2 E_{3h} \end{bmatrix}^T \lambda,$$

A_h - jest macierzą blokową o wymiarach 6×6 i o budowie przedstawionej poniżej

$$A_h = \begin{array}{|c|c|} \hline M_h & N_h \\ \hline N_h & M_h \\ \hline \end{array} \quad (17)$$

Elementy macierzy M_h , N_h o wymiarach (3x3) określają wzory:

$$M_{\alpha\beta h} = \begin{cases} 2V_h^2 + 2R_{\alpha\alpha h} \lambda & \text{dla } \alpha=\beta \\ \lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (18)$$

$$N_{\alpha\beta h} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha=\beta \\ \lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha > \beta \\ -\lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha < \beta \end{cases} \quad (19)$$

Jeżeli

$$\bigwedge_{h \in N} \det M_h \neq 0 \wedge \det (M_h - N_h M_h^{-1} N_h) \neq 0, \quad (20)$$

to rozwiązanie układu równań (15) istnieje i wyraża się wzorami:

$$A_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^3 {}_1^a \alpha\beta h(\lambda) {}_1 E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^3 {}_2^a \alpha\beta h(\lambda) {}_2 E_{\beta h} \quad (21)$$

$$B_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^3 {}_3^a \alpha\beta h(\lambda) {}_1 E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^3 {}_4^a \alpha\beta h(\lambda) {}_2 E_{\beta h} \quad (22)$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\},$$

gdzie:

$$A_h^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{{}_1^a \alpha\beta h(\lambda)} & \boxed{{}_2^a \alpha\beta h(\lambda)} \\ \boxed{{}_3^a \alpha\beta h(\lambda)} & \boxed{{}_4^a \alpha\beta h(\lambda)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Z równań (21), (22) wynika, że harmoniczne składowej aktywnej prądów fazowych $I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h}$, stanowiące rozwiązanie problemu (5), (6) w przestrzeni l^2 , zależą od wszystkich składowych SEM ($E_{1\alpha h}$), ($E_{2\alpha h}$), $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ źródła zasilającego. Harmoniczne $I_{\alpha h}$ wyraża wzór:

$$I_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 \left(1_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_3 1_{\alpha\beta h}^b(\lambda) \right) E_{\beta h} + \\ + \lambda \sum_{\beta=1}^3 \left(2_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_4 2_{\alpha\beta h}^b(\lambda) \right) E_{\beta h} \quad (24)$$

i stąd :

$$i_{\alpha}(t) = \lambda \sum_{\beta=1}^3 Z_{\alpha\beta 0}^e(\lambda) + \\ + \sqrt{2} \lambda \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 \left(1_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) E_{\beta h} + 2_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) E_{\beta h} \right) \exp(jh\omega t), \quad (25)$$

gdzie

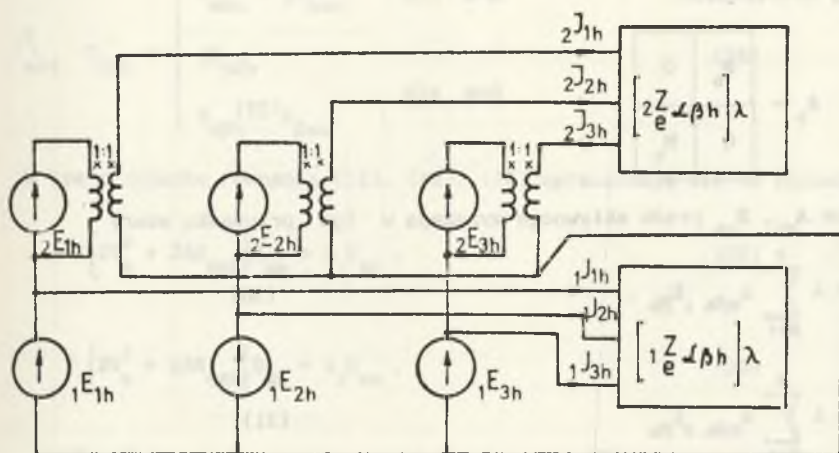
$$1_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) = 1_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_3 1_{\alpha\beta h}^b(\lambda), \quad (26)$$

$$2_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) = 2_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_4 2_{\alpha\beta h}^b(\lambda). \quad (27)$$

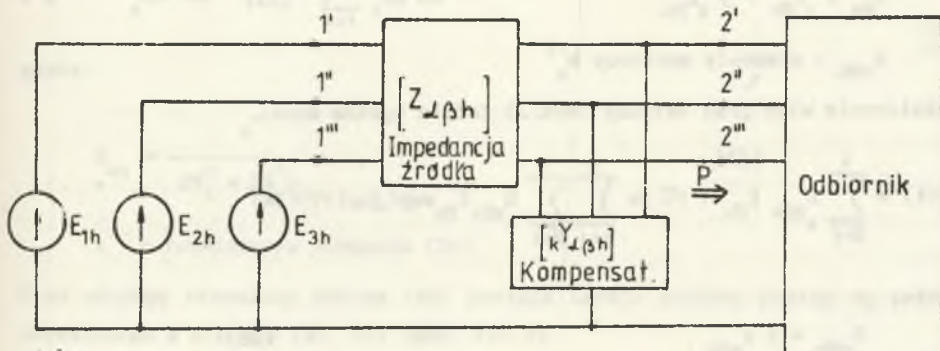
Podstawienie wzorów (21), (22) do wzoru (14) daje silnie nieliniowe równanie algebraiczne względem zmiennej λ .

Wydaje się, że rozwiązywanie tego równania można przeprowadzać wyłącznie metodami numerycznymi. Ponieważ interpretacja fizyczna prądu aktywnego (25) jest bardzo złożona (rys. 2a, 2b) (i nie daje żadnych wskazówek do kompensacji prądu różnicowego $i_{\alpha} - i_{\alpha}$) (i_{α} - prąd całkowity danej fazy), przyjmijmy odnośnie do macierzy impedancji $Z_{\alpha\beta h}$ (wzór (10)) następujące założenie :

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \operatorname{Im} \left\{ Z_{\alpha\beta h} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ Z_{\beta\alpha h} \right\} \quad (28)$$



a)



b)

Rys.2. Interpretacja prądu aktywnego (25) dla pojedynczej harmonicznej

Fig.2. Interpretation of active current (25) for single harmonics

Rozwiązanie równania (15) przeprowadzić należy wtedy dla macierzy A_h określonej następująco:

$$A_h = \begin{array}{|c|c|} \hline M_h & 0 \\ \hline 0 & M_h \\ \hline \end{array} \quad (29)$$

Współrzędne $A_{\alpha h}$, $B_{\alpha h}$ prądu aktywnego wyrażają w tym przypadku wzory

$$A_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta h 1} E_{\beta h}, \quad (30)$$

$$B_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta h 2} E_{\beta h} \quad (31)$$

i stąd

$$I_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta h} E_{\beta h}, \quad (32)$$

gdzie:

$$E_{\beta h} = {}_1 E_{\beta h} - j {}_2 E_{\beta h} \quad (33)$$

$a_{\alpha\beta h}$ - elementy macierzy M_h^{-1}

Ostatecznie więc prąd aktywny (Rys.3) źródła wyraża wzór:

$$i(t) = \sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta 0} E_{\beta 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta h} E_{\beta h} \exp(jh\omega t), \quad (34)$$

gdzie:

$$G_{\alpha\beta h} = \lambda a_{\alpha\beta h}. \quad (35)$$

Podstawienie wzorów (30), (31) do równania (14) daje również, jak w omawianym poprzednio przypadku, bardzo silnie nieliniowe równanie algebraiczne względem zmiennej λ . Analizą rozwiązań tego równania zajmować się nie będziemy.

Przyjmijmy obecnie (w celu dalszego uproszczenia rozważań), że model źródła rzeczywistego składa się z idealnych SEM $e_{\alpha}(t)$ (rys.1) oraz układu pasywnego SLS modelującego impedancje wewnętrzne źródła. Wtedy:

$$\hat{\Lambda}_{h \in N} Z_{\alpha\beta h} = \begin{cases} R_{\alpha\alpha h} + jX_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha=\beta \\ jX_{\alpha\beta h} & \\ X_{\alpha\beta h} = X_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (36)$$

W tym przypadku równania (12), (13), (14) upraszczają się do postaci:

$$\left(2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} \right) A_{\alpha h} = \lambda_1 E_{\alpha h}, \quad (37)$$

$$\left(2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} \right) B_{\alpha h} = \lambda_2 E_{\alpha h}, \quad (38)$$

$$P = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\lambda}{2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h}} - R_{\alpha\alpha h} \left(\frac{\lambda}{2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h}} \right)^2 \right) |E_{\alpha h}|^2 \quad (39)$$

Równanie (39) jest podobne do równania rozpatrywanego w pracy [7].

Prąd aktywny źródła określa wzór:

$$i_{\alpha}(t) = G_{\alpha\alpha} E_{\alpha\alpha} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{\alpha h} E_{\alpha h} \exp(jh\omega t), \quad (40)$$

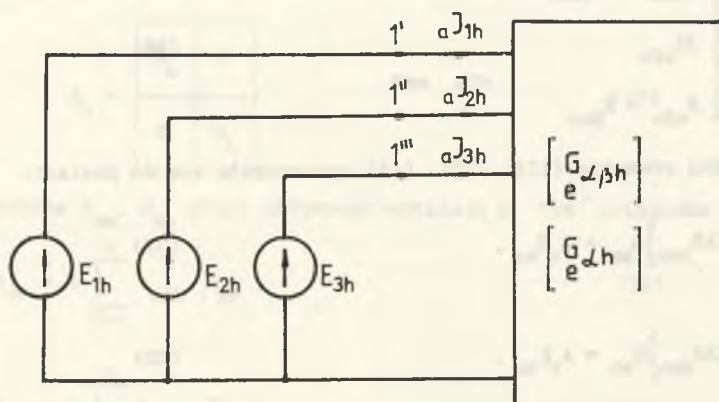
gdzie:

$$G_{\alpha h} = \frac{\lambda^*}{2V_h^2 + 2\lambda^* R_{\alpha\alpha h}}, \quad (41)$$

λ^* - rozwiązanie równania (39).

Prąd aktywny określony wzorem (40) posiada bardzo podobną postać do prądu określonego w pracach [3], [4] (por. rys.3).

Jedyną różnicą jest fakt, że konduktancje zastępcze $G_{\alpha h}$ są różne dla każdej fazy $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ w przypadku rzeczywistego źródła zasilającego.



Rys.3. Interpretacja prądu aktywnego (34), (40) dla pojedynczej harmonicznej

Fig.3. Interpretation of active current (34), (40) for single harmonics

Wykorzystując warunki wystarczające ekstremum warunkowego [1], można wykazać, że jeśli macierze $Z_{\alpha\beta h}$ spełniają warunki określone wzorem (36), to funkcjonal (9) osiąga minimum na elemencie i określonym wzorem (40), gdy

$$\bigwedge_{h \in N} \bigwedge_{\alpha \in \{1, 2, 3\}} \nabla_h^2 + \lambda R_{\alpha\alpha h} > 0 \quad (42)$$

Prąd i określony wzorem (40) stanowi minimum funkcjonału (9), gdy $\lambda > 0$.

Podobnie wykorzystując warunki wystarczające ekstremum warunkowego [1] oraz twierdzenie Sylwestra o dodatniej określoności form kwadratowych, można wykazać, że gdy macierze $Z_{\alpha\beta h}$ spełniają warunki określone wzorem (28), to funkcjonal (9) osiąga minimum na elemencie i określonym wzorem (34), gdy spełnione są warunki

1°

$$\bigwedge_{h \in N} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}} \left(\nabla_h^2 + \lambda R_{\alpha\alpha h} \right) > 0 \wedge \left(R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h} \right) \lambda > 0 \quad (43)$$

2° Forma kwadratowa zbudowana z macierzy r o wymiarach $[3 \times 3]$ i określona wzorem:

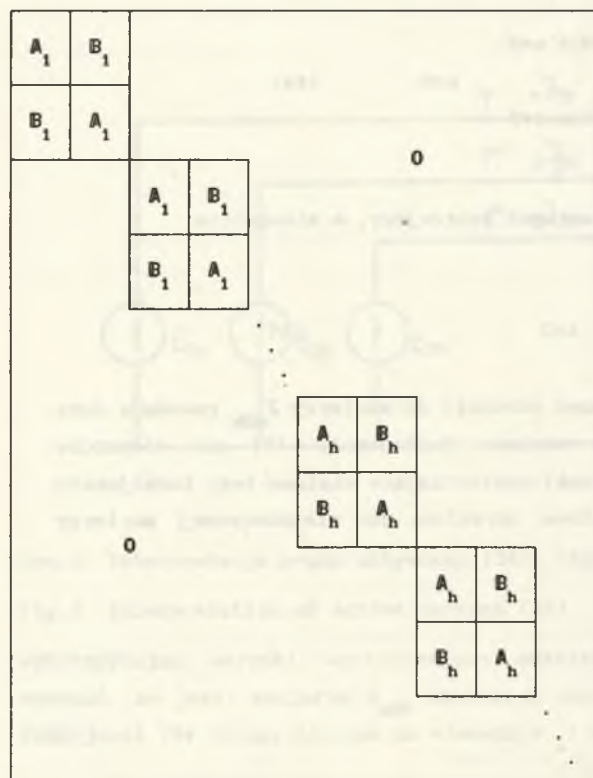
$$[r_{\alpha\beta}] = \begin{cases} 2 \frac{\nabla_h^2}{\lambda} + 2R_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha = \beta \\ R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad (44)$$

jest dodatnio określona.

Zamiast warunku 1° można przyjąć warunek ostrzejszy, a mianowicie (1°)'

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}} R_{\alpha\beta h} > 0 \wedge \lambda > 0 \quad (45)$$

Pominięcie uczynionych wyżej założeń odnośnie do macierzy $Z_{\alpha\beta h}$ powoduje dużą komplikację warunków istnienia minimum funkcjonału (9) na elemencie określonym wzorem (25). Wtedy warunki wystarczające minimum tego funkcjonału są spełnione, gdy forma kwadratowa określona na nieskończonej macierzy blokowej



(46)

gdzie ;

$$A_h = [A_{\alpha\beta h}] = \begin{cases} 2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha=\beta \\ \lambda (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (47)$$

$$B_h = [B_{\alpha\beta h}] = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha=\beta \\ X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (48)$$

$$\dim A_h = \dim B_h = [3 \times 3],$$

jest dodatnio określona. Bardziej szczegółowym badaniem warunków dodatniej określoności tej formy zajmować się nie będziemy.

Przejdźmy obecnie do analizy równania (39), które zapiszemy w postaci wzoru:

$$P=F(\lambda) , \quad (49)$$

gdzie:

$F(\lambda)$ oznacza funkcję występującą po prawej stronie wzoru (39).

Ponieważ dysponujemy z reguły skończonym widmem harmonicznych prądu i napięcia, a kompensacja w klasie układów skupionych dotyczy również skończonej liczby harmonicznych prądu źródła, to rozpatrzmy równanie przybliżone:

$$P=F^n(\lambda)=\sum_{h=0}^n f^h(\lambda)=\sum_{h=0}^n \sum_{\alpha=1}^3 f^{h\alpha}(\lambda) , \quad (50)$$

gdzie:

$$f^{h\alpha}(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{2V^2+2\lambda R_{\text{osch}}} - R_{\text{osch}} \left(\frac{\lambda}{2V^2+2\lambda R_{\text{osch}}} \right)^2 \right) |E_{\text{och}}|^2$$

Właściwości funkcji f^h , dla ustalonego h , są następujące:

1. Dla $\lambda \in [0, \infty)$ pochodna $(f^h)'$:

$$(f^h)'(\lambda)=\sum_{\alpha=1}^3 \frac{4V_h^2}{(2V_h^2+2\lambda R_{\text{osch}})^2} |E_{\text{och}}|^2 > 0 \quad (51)$$

jest ściśle dodatnia, a więc funkcja F^n w przedziale $[0, \infty)$ jest ściśle rosnąca.

2. Granice funkcji f^h przy $\lambda \rightarrow \pm\infty$ wynoszą:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f^h(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{|E_{\text{och}}|^2}{4R_{\text{osch}}} = \sum_{\alpha=1}^3 P_{\text{och}} , \quad (52)$$

gdzie:

$P_{d^{\alpha h}}$ - moc czynna wydawana przez h-tą harmoniczną $E_{\alpha h}$ SEM e_{α} ($\alpha \in \{1, 2, 3\}$) w warunkach dopasowania energetycznego, tzn. maksymalna moc wydawana przez h-tą harmoniczną SEM źródła.

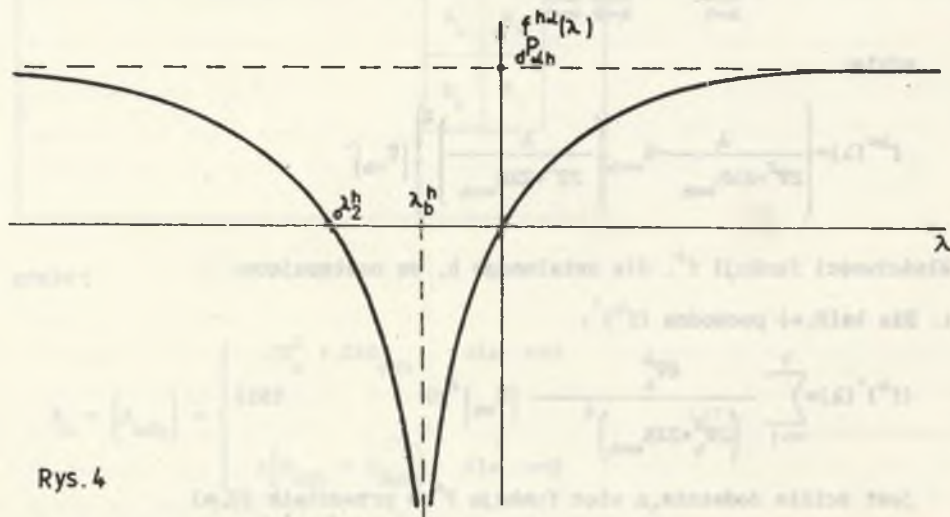
3. Zera funkcji $f^{\alpha h}$ są następujące:

$$f^h(\lambda) = 0 \quad \text{dla} \quad \lambda_1^h = 0, \quad \lambda_2^h = -\frac{2V_h^2}{R_{\alpha \alpha h}} \quad (53)$$

4. Funkcja $f^h(\lambda)$ posiada pojedynczy biegun λ_b^h na ujemnej półosi zmiennej λ :

$$\lambda_b^{\alpha h} = -\frac{V_h^2}{R_{\alpha \alpha h}} \quad (54)$$

Jakościowe właściwości funkcji $f^{\alpha h}$ ilustruje rys. 4.



Rys. 4

Rys. 4. Wykres funkcji $F^{h\alpha}(\lambda)$

Fig. 4. Graph of function $F^{h\alpha}(\lambda)$

Rozpatrzmy obecnie równanie przybliżone

$$P = f^1(\lambda) = f^h(\lambda) \Big|_{h=1} \quad (55)$$

oraz równanie

$$P = \bar{f}^1(\lambda) \quad (55a)$$

powstałe przez przyjęcie w równaniu (55) parametrów $R_{\alpha\alpha 1}$, $|E_{\alpha 1}|$ równych:

$$R_1 = \max_{\alpha} \{ R_{\alpha\alpha 1} \}, \quad (56)$$

$$E = \min_{\alpha} \left\{ |E_{\alpha 1}| \right\}. \quad (57)$$

Łatwo wykazać nierówność:

$$\bigwedge_{\lambda \in (0, \infty)} f^1(\lambda) > \bar{f}^1(\lambda) \quad (58)$$

oraz fakt, że rozwiązanie równania (55a) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste o różnych znakach ${}_p \lambda_1$, ${}_p \lambda_2$, określone wzorem:

$${}_p \lambda_{1,2} = -\frac{2V_h^2}{R_1} \pm \sqrt{\frac{4V_h^4}{R_1^2} - \frac{4V_h^2}{R_1^2} + \frac{4V_h^2}{\xi R_1}} \quad (59)$$

gdzie:

$$\xi = 1 - 4GR_1 > 0, \quad (60)$$

$$G = \frac{P}{3|E|^2}. \quad (61)$$

Ilustrację graficzną rozwiązań (55a), (55), (49) przedstawiono na rys. 5. Asymptoty krzywych przedstawionych na rys. 5 określają wzory:

$${}_d P = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 {}_d P_{\alpha h}, \quad (62)$$

$${}_d P = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{|E_{\alpha 1}|^2}{4R_{\alpha\alpha 1}}, \quad (63)$$

$${}_d \bar{P}_1 = 3 \frac{|E|^2}{4R_1}. \quad (63a)$$

(55a), (55), (49) spełniają oszacowania:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_1^1 < \lambda_{p1}^1 \quad (65)$$

gdzie:

λ_1 - rozwiązanie równania (49) (dokładne)

λ_1^1 - rozwiązanie równania (55) (przybliżone),

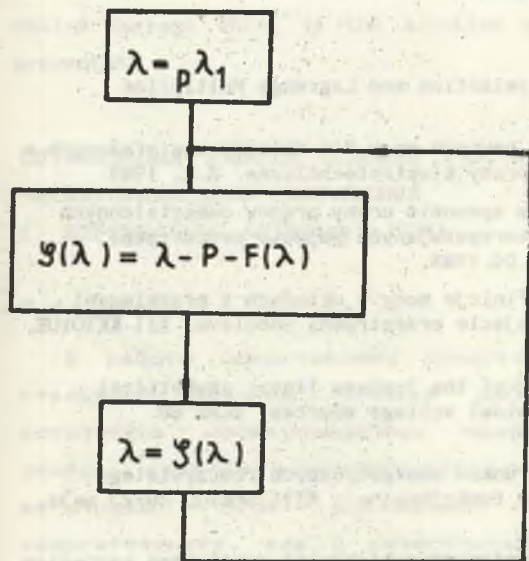
λ_{p1}^1 - rozwiązanie równanie (55a) (przybliżone).

Stosując do równania (49) metodę bisekcji w przedziale $[0, \lambda_{p1}^1]$, zawsze można wyznaczyć dodatni pierwiastek równania (49).

Jeżeli

$$\bigwedge_{\lambda \in (0, \lambda_{p1}^1)} \max_{p1} \left[\sum_{h=0}^n \sum_{\alpha=1}^3 \left[\left(1 + \lambda \frac{R_{\alpha\alpha h}}{V_h^2} \right)^2 \right]^{-1} \left(\frac{|E_{\alpha h}|^2}{|E|^2} \right) \right] < 2, \quad (66)$$

to do rozwiązania równania (49) można również stosować metodę punktu stałego z przybliżeniem początkowym λ_{p1}^1 (rys.6).



Rys.6. Metoda punktu stałego dla równania (49)

Fig.6. Fixed point method for equation (49)

PODSUMOWANIE

1. Uzyskane w artykule wyniki dla układów trójfazowych z rzeczywistymi źródłami zasilającymi bez żadnych istotnych różnic przenoszą się na układy wielofazowe o dowolnej skończonej liczbie faz.
2. Istotną różnicę w stosunku do układów wielofazowych z idealnymi źródłami napięć odkształconych stanowi fakt, że konduktancje zastępcze (dla przypadku źródeł rzeczywistych) zależą nie tylko od numeru harmonicznych, ale i od numeru przewodu fazowego. Macierze tych konduktancji są macierzami diagonalnymi o różnych elementach na przekątnej bądź też macierzami symetrycznymi.

LITERATURA

- [1] Bertsekas D.P.: Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Acad.Press. NY 1982.
- [2] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielofazowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne. Z.2, 1989.
- [3] Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystujących pojęcie przestrzeni Soboleva. XI SPETO Wisła, 20-23.04.1988.
- [4] Brodzki M., Walczak J.: Nowe definicje mocy w układach z przebiegami odkształconymi wykorzystujące pojęcie przestrzeni Soboleva. XII KKT01UE, Myczkowce, 17-20.10.1989.
- [5] Czarnecki L.S.: New paper theory of the 3-phase linear asymmetrical circuits supplied from nonsinusoidal voltage sources. ICAS'88. Finlandia.
- [6] Ślwczyński M.: Optymalizacja warunków energetycznych rzeczywistego źródła napięcia metodami analizy funkcjonalnej. XIII SPETO, 20-23 maja, Wisła 1990.
- [7] Walczak J.: Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym, z rzeczywistego źródła napięcia. XIII SPETO, 20-23 maja, Wisła 1990.

Recenzent: doc.dr inż.Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 26 lutego 1991 r.

OPTIMIZATION OF OPERATING CONDITIONS OF NONIDEAL AND NONSINUSOIDAL
THREE-PHASE VOLTAGE SOURCES

I. DETERMINING THE ACTIVE CURRENT

Summary

The paper presents the results of the analysis of energetic-quality operating conditions of nonideal and nonsinusoidal three-phase voltage sources. The problem of minimizing, performance index of the source current has been formulated and solved. It takes into account the evaluation of energetic and quality properties of the current, at the constrained condition on the active power supplied to the receiver. The solution of the problem has been carried out at three different assumptions concerning the inner impedance operator of the supplying source. The interpretation of the active current which is the solution of minimization problem has been presented.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ УСЛОВИИ РЕАЛЬНЫХ ТРЕХФАЗОВЫХ ИСТОЧНИКОВ
НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

I. ВПРЕДЕЛЕНИЕ АКТИВНОГО ТОКА

Резюме

В работе представлены результаты энергетическо-качественного анализа условий работы реальных трехфазных источников несинусоидальных напряжений. Формализована и решена проблема минимизации показателя качества тока источника. Этот показатель учитывает так оценку энергетических, как и качественных свойств тока. Проблема оптимизации решена при ограничении в виде плавности, относящегося к подведенной к приемнику активной мощности. Решение этой проблемы получено для трёх разных предпосылок относительно оператора внутреннего импеданса источника питания. В статье представлена интерпретация активного тока, который становится решением проблемы минимизации.