

Zofia CICHOWSKA

CEWKI SPRĘŻONE MAGNETYCZNIE W TOPOLOGICZNEJ METODZIE ANALIZY
OBWODÓW SLS

Streszczenie. Opisano sposób uwzględnienia w analizie obwodów cewek sprężonych poprzez wprowadzenie schematów zastępczych ze źródłami sterowanymi, co prowadzi do diagonalizacji macierzy impedancji i admitancji gałęziowych. Opisano również możliwość wykorzystania dwóch typów schematów zastępczych. Dla każdej pary cewek sprężonych połączonych we wspólnym węźle schemat zastępczy zawiera trzy cewki niesprężone połączone w gwiazdę lub trójkąt.

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację rozważań przeprowadzonych w artykule [3].

Rozważany jest obwód SLS, którego graf jest mocno spójny. Obwód (i graf) zawiera w węzłów i g gałęzi. Źródła sterowane są sterowane prądami lub napięciami gałęzi pasywnych. Gałąź jest rozumiana jako pojedynczy element pasywny RLC lub aktywny - idealne źródło. Gałęzie są ostrzałkowane jednolicie - napięcie przeciwko prądowi. Orientację gałęzi wyznacza prąd. Zbiór wszystkich gałęzi został podzielony na 5 grup:

- 1) sterowane źródła prądowe w liczbie n'_i ,
- 2) autonomiczne źródła prądowe w liczbie n_i ,
- 3) gałęzie pasywne w liczbie g_p ,
- 4) autonomiczne źródła napięciowe w liczbie n_e ,
- 5) sterowane źródła napięciowe w liczbie n'_e .

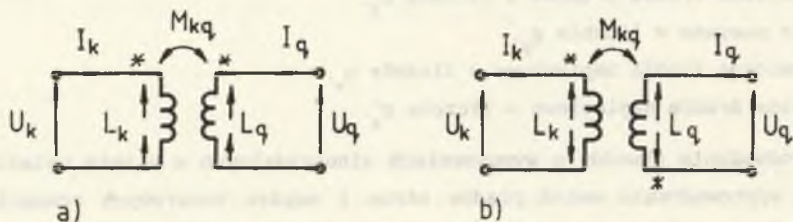
Przy rozważaniu obwodów o wymuszeniach sinusoidalnych w stanie ustalonym [2] przy wyprowadzaniu metod prądów strun i napięć konarowych równaniami wyjściowymi są: jedno z praw Kirchhoffa (I lub II), pozostałe prawo Kirchhoffa przekształcone do postaci transformacji oczkowej lub przekrojowej oraz prawo Ohma:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie Z_{33} jest kwadratową macierzą zespolonych impedancji gałęziowych o postaci

$$Z_{33} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} S_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Macierze rezystancji R_{33} i elastancji S_{33} są to macierze diagonalne, natomiast macierz indukcyjności L_{33} w przypadku występowania cewek sprzężonych jest macierzą niediagonalną. Na przekątnej głównej występują indukcyjności własne cewek, natomiast poza przekątną indukcyjności wzajemne, które mogą być parami dodatnie lub parami ujemne w zależności od tego, jak są ostrzałkowane prądy w cewkach w stosunku do zacisków jednoimiennych. Jeżeli prądy są zastrzałkowane jednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 1a), a napięcie całkowite na każdej cewce zastrzałkowane przeciwko prądowi (zgodnie z przyjętą na wstępie umową), wówczas z równań opisujących cewki sprzężone



Rys. 1.

$$U_k = j\omega L_k I_k + j\omega M_{kq} I_q \quad (3)$$

$$U_q = j\omega L_q I_q + j\omega M_{qk} I_k$$

wynika odpowiedni element macierzy L_{33}

$$L_{33} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots L_k \cdots M_{kq} \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots M_{qk} \cdots L_q \cdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

Jeżeli $M_{kq} = M_{qk}$ macierz L_{33} jest symetryczna.

Jeżeli prądy są zastrzałkowane niejednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 1b), wówczas z równań opisujących cewki

$$U_k = j\omega L_k I_k - j\omega M_{kq} I_q \quad (5)$$

$$U_q = j\omega L_q I_q - j\omega M_{qk} I_k \quad (6)$$

wynika odpowiedni element macierzy

$$L_{33} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots L_k \cdots -M_{kq} \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots -M_{qk} \cdots L_q \cdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6a)$$

Macierz L_{33} z uwzględnieniem sprzężeń magnetycznych nie wprowadza żadnych trudności przy wyprowadzaniu równań metody prądów strun. Trudności pojawiają się przy przekształcaniu równań wyjściowych w metodzie napięć konarowych. Dla potrzeb metody konieczne jest wprowadzenie macierzy zespolonych admitancji gałęziowych, która jest odwrotnością macierzy Z_{33} .

$$Y_{33} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} S_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} G_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega} \Gamma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

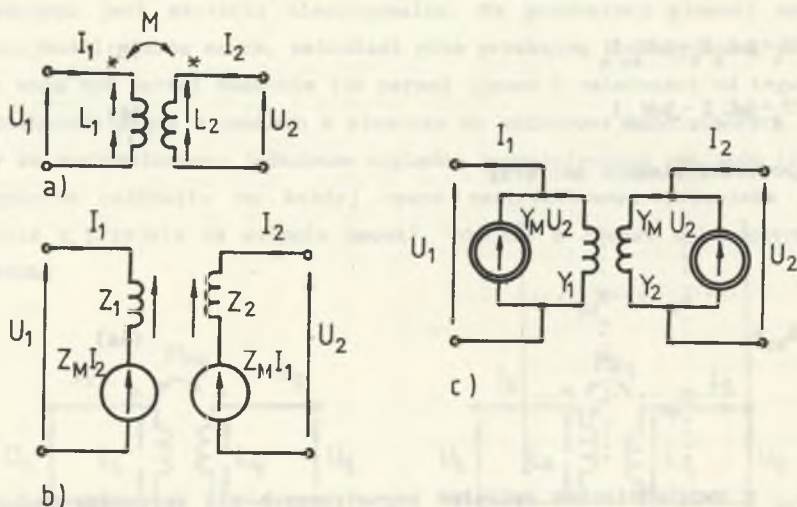
Warunkiem koniecznym istnienia macierzy Y_{33} jest, by w każdej parze cewek sprzężonych zachodziła nierówność (przy $M_{kq} = M_{qk}$)

$$L_k L_q > M_{kq}^2 \quad (8)$$

Macierz Γ_{33} jest niediagonalną macierzą kwadratową.

Rozważmy szczegółowo równania prowadzące do wyznaczenia macierzy Γ_{33} na przykładzie dwóch cewek sprzężonych L_1, L_2, M dla dwóch przypadków ostrzałkowania prądów cewek względem jednoimiennych zacisków.

A. Prądy ostrzałkowane jednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 2).



Rys. 2.

Równaniom opisującym układ z rys. 2a

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_1 I_1 + Z_M I_2, \\ U_2 &= Z_2 I_2 + Z_M I_1, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Z_2 = j\omega L_2, \quad Z_M = j\omega M, \quad (10)$$

można przyporządkować układ zastępczy ze źródłami sterowanymi napięciowymi przedstawiony na rys.2b. Rozwiązanie równań (9) ze względu na prądy przy spełnieniu warunku $L_1 L_2 > M^2$ prowadzi do równań

$$I_1 = Y_1 U_1 - Y_M U_2, \quad (11)$$

$$I_2 = Y_2 U_2 - Y_M U_1,$$

gdzie

$$Y_1 = \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad Y_2 = \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (12)$$

$$Y_M = \frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Równaniom (11) można przyporządkować układ zastępczy ze źródłami sterowanymi prądowymi przedstawiony na rys.2c.

Macierze L_{33} i Γ_{33} mają w tym przypadku postać

$$j\omega L_{33} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{j\omega} \Gamma_{33} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_M \\ -Y_M & Y_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

B. Prądy ostrzałkowane niejednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys.3).

Odpowiednie równania mają teraz postać

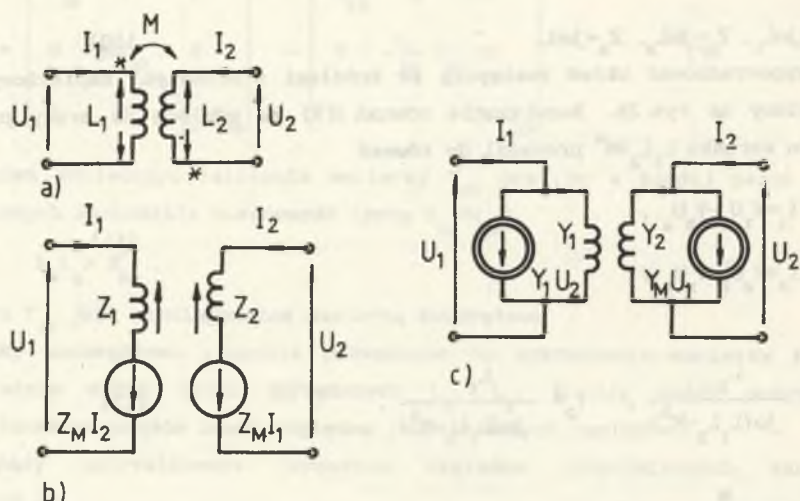
$$U_1 = Z_1 I_1 - Z_M I_2, \quad (14)$$

$$U_2 = Z_2 I_2 - Z_M I_1,$$

a po przekształceniu

$$I_1 = Y_1 U_1 + Y_M U_2, \quad (15)$$

$$I_2 = Y_2 U_2 + Y_M U_1.$$



Rys. 3.

Schematy zastępcze ze źródłami sterowanymi odpowiadające równaniom (14) i (15) przedstawiono na rys.3b i c.

Macierze L_{33} i Γ_{33} mają teraz postać

$$j\omega L_{33} = \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_M \\ -Z_M & Z_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{j\omega} \Gamma_{33} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_M \\ Y_M & Y_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Schematy zastępcze pokazane na rys.2b i c oraz 3b i c, w których występują po dwa napięciowe lub prądowe źródła sterowane, mogą stanowić podstawę do modyfikacji metody prądów strun i metody napięć konarowych. Modyfikacja ta polegająca na uwzględnieniu zastępczych źródeł sterowanych reprezentujących sprzężenia magnetyczne w grupie odpowiednich źródeł sterowanych (1 lub 5) prowadzi do diagonalizacji macierzy L_{33} i Γ_{33} . Każda para cewek sprzężonych wprowadza do rozważań dwie dodatkowe gałęzie do grupy 1 lub 5 gałęzi będących sterowanymi źródłami prądowymi (struny aktywne), lub sterowanymi źródłami napięciowymi (konary aktywne).

W przypadku rozważania obwodu z cewkami sprzężonymi przy dowolnych wymuszeniach w stanach nieustalonych schematy zastępcze wynikające z równań operatorowych zawierają oprócz źródeł sterowanych również źródła

autonomiczne reprezentujące warunki początkowe w chwili $t=0$. Zakładając ciągłość przebiegów prądów cewek w chwili $t=0$ mamy $i(0^-)=i(0^+)=i(0)$.

Równania dla przypadku A mają postać

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - L_1 i_1(0) - Mi_2(0), \quad (17)$$

$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) + sMI_1(s) - L_2 i_2(0) - Mi_1(0),$$

a po przekształceniu

$$I_1(s) = Y_1(s)U_1(s) - Y_M(s)U_2(s) + \frac{i_1(0)}{s}, \quad (18)$$

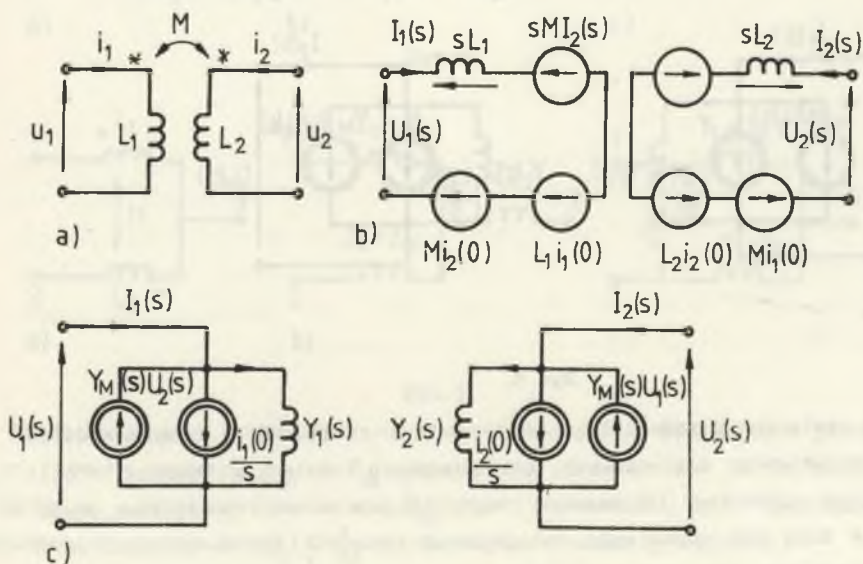
$$I_2(s) = Y_2(s)U_2(s) - Y_M(s)U_1(s) + \frac{i_2(0)}{s},$$

gdzie

$$Y_1(s) = \frac{L_2}{s(L_1 L_2 - M^2)}, \quad Y_2(s) = \frac{L_1}{s(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (19)$$

$$Y_M(s) = \frac{M}{s(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Schematy zastępcze odpowiadające równaniom (17) i (18) przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4.

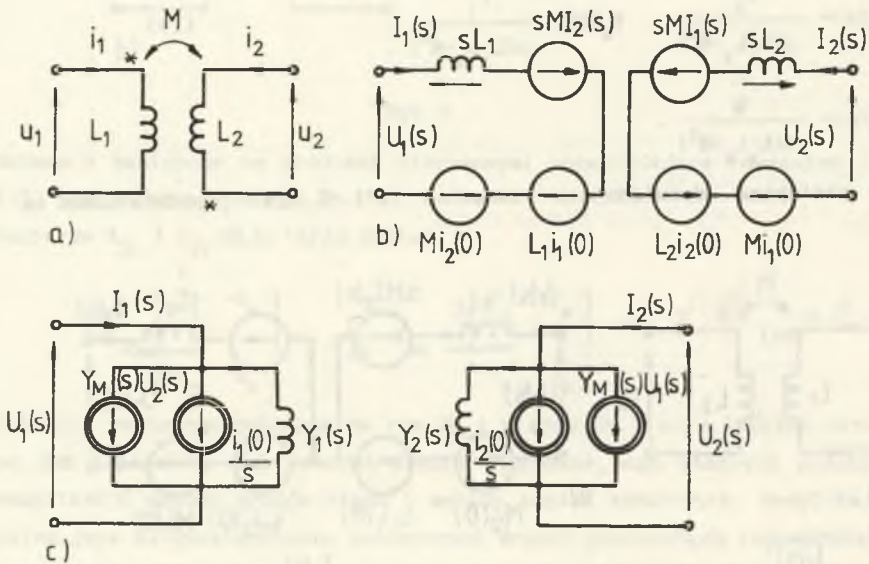
Równania dla przypadku B mają postać

$$\begin{aligned} U_1(s) &= sL_1 I_1(s) - sMI_2(s) - L_1 i_1(0) + MI_2(0), \\ U_2(s) &= sL_2 I_2(s) - sMI_1(s) - L_2 i_2(0) + MI_1(0), \end{aligned} \quad (20)$$

a po przekształceniu

$$\begin{aligned} I_1(s) &= Y_1(s)U_1(s) + Y_M(s)U_2(s) + \frac{i_1(0)}{s}, \\ I_2(s) &= Y_2(s)U_2(s) + Y_M(s)U_1(s) + \frac{i_2(0)}{s}. \end{aligned} \quad (21)$$

Schematy zastępcze odpowiadające równaniom (20) i (21) przedstawiono na rys. 5.

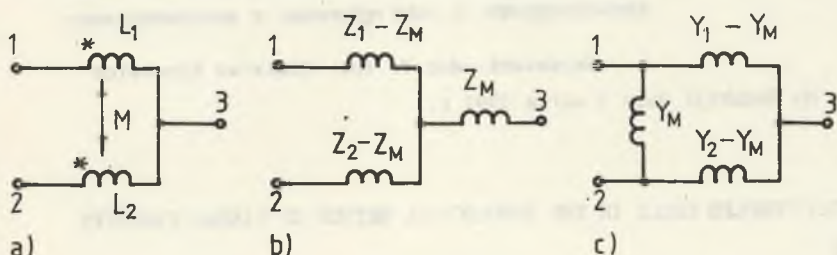


Rys. 5.

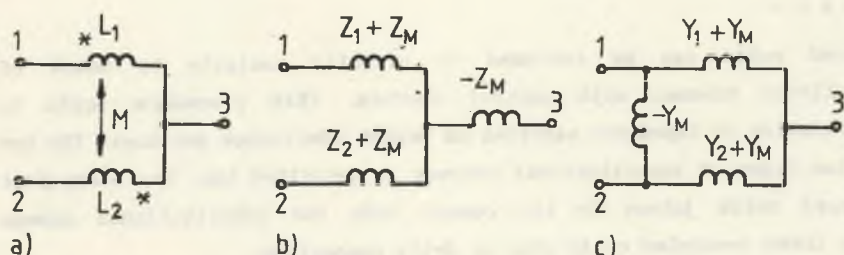
Schematy zastępcze przedstawione na rys. 4b i c oraz 5b i c oprócz dwóch źródeł sterowanych napięciowych lub prądowych zawierają również źródła autonomiczne napięciowe, lub prądowe reprezentujące warunki początkowe cewek. Źródła te mogą być odpowiednio dołączone do grupy 2 lub 4 autonomicznych źródeł prądowych, lub autonomicznych źródeł napięciowych, co prowadzi do

diagonalizacji macierzy $s\mathbf{L}_{33}$ oraz $\frac{1}{s}\mathbf{\Gamma}_{33}$. W przypadku takiej modyfikacji każda para cewek sprzężonych wprowadza dwie gałęzie do grupy 1 lub 5 (źródła sterowane) oraz dwie gałęzie do grupy 2 (autonomiczne źródła prądowe), lub cztery gałęzie do grupy 4 (autonomiczne źródła napięciowe).

Rozważmy jeszcze szczególny przypadek obwodu, w którym każda para cewek sprzężonych jest połączona we wspólnym węźle. W takim przypadku również można doprowadzić do diagonalizacji macierzy \mathbf{L}_{33} wprowadzając schematy zastępcze bez sprzężeń. Dla wymuszeń sinusoidalnych przekształcając równania (9) i (14) opisujące układ dwóch cewek sprzężonych dla każdego z dwóch przypadków połączenia zacisków jednoimiennych względem wspólnego węzła, można uzyskać po dwa schematy zastępcze (niezależnie od strzałkowania prądów) złożone z trzech cewek niesprzężonych przedstawione na rys. 6 b i c oraz 7b i c przy oznaczeniach określonych wzorami (10) i (12).



Rys. 6.



Rys. 7.

Każda para cewek sprzężonych zwiększa liczbę gałęzi pasywnych o jedną, a więc rozmiar macierzy \mathbf{L}_{33} i $\mathbf{\Gamma}_{33}$ odpowiednio wzrasta, ale są to macierze diagonalne. Istnienie macierzy $\mathbf{\Gamma}_{33}$, jak poprzednio, jest uwarunkowane spełnieniem nierówności $L_k L_q > M_{kq}^2$ dla każdej pary cewek sprzężonych.

Dla dowolnych wymuszeń schematy zastępcze wynikające z przekształconych równań operatorowych zawierają również odpowiednie źródła autonomiczne reprezentujące warunki początkowe.

LITERATURA

1. Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981.
2. Cichowska Z.: Topologiczna analiza obwodów elektrycznych liniowych. Skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej nr 1578, Gliwice 1990.
3. Cichowska Z.: Topologiczna analiza obwodów SLS. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka z.122, Gliwice 1991.
3. Juszczak A.: Równania teorii obwodów, cz.I. Skrypt uczelniany AGH nr 656, Kraków 1978.
4. Seshu S., Reed M.: Linear graphs and electrical networks. Addison - Wesley, 1961.
5. Wołski W., Uruski M.: Teoria obwodów, cz.I i II. Skrypty uczelniane Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982, 1983.

Recenzent: doc.dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 1 marca 1991 r.

MAGNETICALLY COUPLED COILS IN THE TOPOLOGICAL METHOD OF LINEAR CIRCUITS ANALYSIS

Summary

Coupled coils can be included in circuits analysis by means of substitutional schemes with control sources. This procedure leads to diagonalization of impedance matrices as branch admittance matrices. The use of the two types of substitutional schemes is described too. For every pair of coupled coils joined in the common node the substitutional scheme contains three decoupled coils star or delta connection.

**СОПРЯЖЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ КАТУШКИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ МЕТОДЕ
АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ****Р е з ю м е**

В работе описан способ учета во время анализа цепей сопряженных катушек путем введения эквивалентных схем с управляемыми источниками. Это приводит к диагонализации матрицы импеданса и ветвевых адмитансов. Описана также возможность использования двух типов эквивалентных схем. Для каждой пары сопряженных катушек соединенных в совместном узле эквивалентная схема содержит 3 несопряженные катушки соединенные в оверду или в треугольник.