

**ZESZYTY  
NAUKOWE  
POLITECHNIKI  
ŚLĄSKIEJ**

**TADEUSZ SKOCZKOWSKI**

**POLA SPRZĘŻONE  
ELEKTROMAGNETYCZNE I TEMPERATURY  
W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH RUR**



P. 3347 / 91

**ELEKTRYKA**

**Z. 121  
GLIWICE  
1991**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1119



P. 3347

91

TADEUSZ SKOCZKOWSKI

**POLA SPRĘŻONE**

**ELEKTROMAGNETYCZNE I TEMPERATURY**

**W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH RUR**

OPINIODAWCY:

Prof. dr hab. inż. Wojciech Lipiński

Doc. dr hab. inż. Andrzej Krawczyk

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY

— Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

— Doc. dr inż. Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI

— Mgr Elżbieta Leško

REDAKCJA

Mgr Anna Błażkiewicz

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

Druk z makiet przygotowanych przez Autora

PL ISSN 0072-4688

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

---

**Nakł.** 160+85    **Ark. wyd.** 10,5    **Ark. druk** 10,75    **Papier** offset, kl. III 70x100, 70g  
**Oddano do druku** 27.03.91    **Podpis. do druku** 27.03.91    **Druk ukończ.** w kwietniu 1991  
**Zam.** 145/91    **Cena** zł 8 900,—

---

Fotokopie, druk i oprawę

wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

P151 | 91

## SPIS TREŚCI

	Str.
WAŻNIEJSZE OZNACZENIA STOSOWANE W PRACY.....	15
1. WSTĘP.....	19
1.1. Celowość stosowania procesów elektrotermicznych.....	19
1.2. Grzanie indukcyjne przy produkcji rur bezszwowych.....	21
2. METODY BADANIA PÓL W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH. PRZEGLĄD LITERATURY.....	23
2.1. Wstęp.....	23
2.2. Badanie pola elektromagnetycznego.....	24
2.3. Badanie pola temperatury.....	28
2.4. Badanie pól sprzężonych.....	29
2.5. Wnioski.....	30
3. CEL I ZAKRES PRACY.....	33
4. OPIS MATEMATYCZNY ZJAWISK ELEKTROMAGNETYCZNYCH I TERMOKINETYCZNYCH W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH.....	37
4.1. Opis matematyczny pola elektromagnetycznego.....	37
4.1.1. Równania pola elektromagnetycznego.....	37
4.1.2. Modele wykorzystujące magnetyczny potencjał wektorowy A.....	38
4.1.2.1. Model nieliniowy.....	38
4.1.2.2. Model liniowy.....	38
4.1.2.3. Model harmoniczny.....	38
4.1.2.4. Model dwuwymiarowy.....	38
4.1.2.5. Model dla ciał znajdujących się w ruchu.....	39
4.1.3. Model wyrażony przez natężenie pola magnetycznego H... 4.1.4. Warunki graniczne dla pola elektromagnetycznego.....	39
4.2. Opis matematyczny pola temperatury.....	40

	Str.
4.2.1. Równanie przewodnictwa ciepła.....	40
4.2.2. Warunki graniczne dla pola temperatury.....	41
4.3. Opis stałych materiałowych.....	42
4.4. Założenia dodatkowe obowiązujące w całej pracy.....	42
5. OBLICZANIE POLA TEMPERATURY METODĄ ANALITYCZNA.....	45
5.1. Wstęp.....	45
5.2. Linearyzacja odcinkowa procesu nagrzewania.....	45
5.3. Obliczanie stanu quasi-ustalonego.....	49
5.4. Zastosowanie przekształcenia Hankela.....	50
5.5. Wnioski.....	59
6. OBLICZANIE POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO WYBRANYMI METODAMI ANALITYCZNYMI.....	61
6.1. Wstęp.....	61
6.2. Metoda wykorzystująca analogie obwodów magnetycznych i elektrycznych.....	61
6.2.1. Opis metody.....	61
6.2.2. Zastosowanie metody do analizy wsadów ferromagnetycznych.....	64
6.2.3. Zalety i wady metody.....	66
6.3. Zastosowanie metody całki Fouriera.....	69
6.3.1. Wprowadzenie.....	69
6.3.2. Podstawy matematyczne metody.....	69
6.3.3. Obliczenie stałych całkowania.....	71
6.3.4. Obliczenie impedancji układu.....	73
6.3.5. Wyznaczenie składowych pola elektromagnetycznego w ścianie rury.....	74
6.3.6. Zalety i wady metody.....	76
6.4. Podsumowanie.....	79
7. MODELE NUMERYCZNE PÓL SPRZĘŻONYCH.....	81
7.1. Wstęp.....	81
7.2. Model jednowymiarowy.....	81
7.2.1. Model matematyczny.....	81
7.2.2. Metoda uśredniania.....	90

7.2.3. Wpływ uśrednienia współczynników materiałowych na obliczenia rozkładu temperatury.....	93
7.3. Model dwuwymiarowy nagrzewnicy przelotowej.....	95
7.3.1. Uwagi wstępne.....	95
7.3.2. Ogólna koncepcja modelu.....	96
7.3.3. Model matematyczny pól sprzężonych.....	97
7.3.4. Zastosowanie metody różnic skończonych (MRS) do rozwiązywania modelu.....	101
7.3.4.1. MRS dla równań pola elektromagnetycznego.....	101
7.3.4.2. MRS dla równań pola temperatury.....	102
7.3.4.3. Problemy numerycznego rozwiązywania równania paraboliczno-eliptycznego.....	104
7.3.4.4. Zastosowanie metody naprzemiennych kierunków (ADI).....	106
7.3.4.5. Uwagi na temat stosowanych metod numerycznych	109
7.4. Wnioski.....	111
8. SYMULACJA PROCESU NAGRZEWANIA INDUKCYJNEGO PRZY ZASILANIU NAGRZEWNICY Z TYRYSTOROWEGO FALOWNIKA RÓWNOLEGŁEGO PRĄDU.....	113
8.1. Wstęp.....	113
8.2. Tyrystorowy falownik równoległy prądu (TFRP) jako źródło zasilania nagrzewnic indukcyjnych.....	114
8.2.1. Wprowadzenie.....	114
8.2.2. Zasady sterowania i regulacji TFRP.....	115
8.2.3. Metody analizy pracy TFRP.....	117
8.2.4. Symulacja pracy TFRP zasilającego nagrzewnicę indukcyjną.....	118
8.3. Algorytm symulacji procesu nagrzewania przy zasilaniu nagrzewnicy z TFRP.....	122
8.3.1. Zastosowanie metody "pierwszej harmonicznej".....	122
8.3.2. Algorytm symulacji procesu nagrzewania.....	126
8.4. Wnioski.....	130
9. WYBRANE WYNIKI BADAŃ LABORATORYJNYCH.....	133
10. PODSUMOWANIE I WNIOSKI Z PRACY.....	139

	Str.
ANEKSY.....	143
Aneks A1. ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE STRATY CIEPŁA Z NAGRZEWNICY.....	143
Aneks A2. ZALEŻNOŚĆ STAŁYCH MATERIAŁOWYCH WSADU I WYMURÓWKI OD TEMPERATURY.....	145
Aneks A3. ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE ROZKŁAD WEWNĘTRZNYCH ŹRÓDEŁ CIEPŁA....	151
Aneks A4. ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE IMPEDANCJĘ WSADU.....	152
LITERATURA.....	153
STRESZCZENIA.....	165

## CONTENTS

	Page
LIST OF SYMBOLS.....	15
1. INTRODUCTION.....	19
1.1. The usefulness of application of electrothermic processes.....	19
1.2. Induction heating in the production of seamless pipes.....	21
2. METHODS OF INVESTIGATION OF FIELDS IN INDUCTION HEATERS. LITERATURE REVIEW.....	23
2.1. Introduction.....	23
2.2. Investigation of electromagnetic field.....	24
2.3. Investigation of temperature field.....	28
2.4. Investigation of coupled fields.....	29
2.5. Conclusions.....	30
3. THE AIM AND THE RANGE OF THE WORK.....	33
4. MATHEMATICAL DESCRIPTION OF ELECTROMAGNETIC AND TERMOKINETIC PHENOMENA IN INDUCTION HEATERS.....	37
4.1. Mathematical description of electromagnetic field.....	37
4.1.1. Equations of electromagnetic field.....	37
4.1.2. Models making use of magnetic vectorial potential $A$ ....	38
4.1.2.1. Nonlinear problem.....	38
4.1.2.2. Linear model.....	38
4.1.2.3. Harmonic model.....	38
4.1.2.4. Two dimensional model.....	38
4.1.2.5. Model for moving bodies.....	39
4.1.3. Model described by magnetic field intensity $H$ .....	39
4.1.4. Boundary conditions for electromagnetic field.....	39
4.2. Mathematical description for temperature field.....	40
4.2.1. Heat transfer equation.....	40



	Page
4.2.2. Boundary conditions for temperature field.....	41
4.3. Description of material constants.....	42
4.4. Additional assumptions valid in the whole work.....	42
5. EVALUATION OF TEMPERATURE FIELD BY ANALYTICAL METHOD.....	45
5.1. Introduction.....	45
5.2. Piece-wise linearization of heating process.....	45
5.3. Evaluation of the steady-state.....	45
5.4. Application of the Hankel transform.....	50
5.5. Conclusions.....	59
6. EVALUATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD BY CHOSEN ANALYTICAL METHODS...	61
6.1. Introduction.....	61
6.2. Method based on analogies between magnetic and electrical circuits.....	61
6.2.1. Description of the method.....	61
6.2.2. Application of the method to analyzing ferromagnetic charges.....	64
6.2.3. Advantages and disadvantages of the method.....	66
6.3. Application of the method of the Fourier integral.....	69
6.3.1. Introduction.....	69
6.3.2. Mathematical bases of the method.....	69
6.3.3. Evaluation of integral constants.....	71
6.3.4. Evaluation of the impedance of the system.....	73
6.3.5. Evaluation of the components of electromagnetic field in the pipe wall.....	74
6.3.6. Advantages and disadvantages of the method.....	76
6.4. Summing up.....	79
7. NUMERICAL MODELS OF COUPLED FIELDS.....	81
7.1. Introduction.....	81
7.2. One dimensional model.....	81
7.2.1. Mathematical model.....	81
7.2.2. Averaging method.....	90
7.2.3. Influence of averaging of material coefficients on evaluation of temperature distribution.....	93
7.3. Two dimensional model of continuous heater.....	95

	Page
7.3.1. Introduction.....	95
7.3.2. General concept of the model.....	95
7.3.3. Mathematical model of coupled fields.....	97
7.3.4. Application of the method of finite differences (FDM) to solving of the model.....	101
7.3.4.1. FDM for equations of electromagnetic field....	101
7.3.4.2. FDM for equations of temperature field.....	102
7.3.4.3. Problems of numerical solution of parabolic- elliptic equation.....	104
7.3.4.4. Application of the method of alternating direction (ADI).....	106
7.3.4.5. Remarks on application on the used numerical methods.....	109
7.4. Conclusions.....	111
8. SIMULATION OF THE PROCESS OF INDUCTION HEATING WHEN THE HEATER IS SUPPLIED FROM THYRISTOR CURRENT FED PARALLEL INVERTER.....	113
8.1. Introduction.....	113
8.2. Thyristor current fed parallel inverter (TCFPI) as a supply source of induction heaters.....	114
8.2.1. Introduction.....	114
8.2.2. Principles of control and regulation of TCFPI.....	115
8.2.3. Methods of analysis of the work of TCFPI.....	117
8.2.4. Simulation of the work of TCFPI supplying the induction heater.....	118
8.3. Simulation algorithm of the heating process when the heater is supplied from TCFPI.....	122
8.3.1. Application of the method of "fundamental component"...	122
8.3.2. Simulation algorithm of the heating process.....	126
8.4. Conclusions.....	130
9. CHOSEN RESULTS OF LABORATORY INVESTIGATIONS.....	133
10. SUMMING UP AND CONCLUSIONS FROM THE WORK.....	139

	Page
APPENDICES .....	143
Appendix A1. EQUATIONS DESCRIBING HEAT LOSSES FROM THE HEATER.....	143
Appendix A2. DEPENDENCE OF MATERIAL CONSTANTS OF THE CHARGE AND THE LINING ON TEMPERATURE.....	145
Appendix A3. EQUATIONS DESCRIBING DISTRIBUTION OF INTERNAL HEAT SOURCE	151
Appendix A4. EQUATIONS DESCRIBING IMPEDANCE OF THE CHARGE.....	152
REFERENCES.....	153
SUMMARY.....	165

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В РАБОТЕ.....	15
1. ВВЕДЕНИЕ.....	19
1.1. Целенаправленность применения электротермических процессов.....	19
1.2. Индукционный нагрев в производстве бесшовных труб.....	21
2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЕЙ В ИНДУКЦИОННЫХ НАГРЕВАТЕЛЯХ. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	23
2.1. Введение.....	23
2.2. Исследование электромагнитного поля.....	24
2.3. Исследование температурного поля.....	28
2.4. Исследование сопряженных полей.....	29
2.5. Выводы.....	30
3. ЦЕЛЬ И ОБЪЕМ РАБОТЫ.....	33
4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕРМОКИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ИНДУКЦИОННЫХ НАГРЕВАТЕЛЯХ.....	37
4.1. Математическое представление электромагнитного поля	37
4.1.1. Уравнения электромагнитного поля.....	37
4.1.2. Модели использующие векторный магнитный потенциал $A$ .....	38
4.1.2.1. Нелинейная модель.....	38
4.1.2.2. Линейная модель.....	38
4.1.2.3. Гармоническая модель.....	38
4.1.2.4. Двумерная модель.....	38
4.1.2.5. Модель для тел находящихся в движении.....	39
4.1.3. Модель выраженная напряженностью магнитного поля $H$ .....	39

	Стр.
4.1.4. Граничные условия для электромагнитного поля...	39
4.2. Математическое представление температурного поля.....	40
4.2.1. Уравнение теплопроводности.....	40
4.2.2. Граничные условия для температурного поля.....	41
4.3. Физические свойства применяемых материалов.....	42
4.4. Дополнительные предложения применяемые в работе.....	42
5. РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.....	45
5.1. Введение.....	45
5.2. Отрезковая линейаризация процесса нагрева.....	45
5.3. Расчет псевдоустойчивого состояния.....	49
5.4. Применение преобразования Генкеля.....	50
5.5. Выводы.....	59
6. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ИЗБРАННЫМИ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ.....	61
6.1. Введение.....	61
6.2. Метод использующий аналогии магнитных и электрических цепей.....	61
6.2.1. Очерк метода.....	61
6.2.2. Использование метода до анализа ферромагнитных заготовок.....	64
6.2.3. Достоинства и недостатки метода.....	66
6.3. Применение метода интеграла Фурье.....	69
6.3.1. Введение.....	69
6.3.2. Математические основы метода.....	69
6.3.3. Расчет постоянных интегрирования.....	71
6.3.4. Расчет импеданса схемы.....	73
6.3.5. Определение составляющих электромагнитного поля в стенке трубы.....	74
6.3.6. Достоинства и недостатки метода.....	76
6.4. Заключение.....	79
7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛЕЙ.....	81
7.1. Введение.....	81
7.2. Одномерная модель.....	81

	Стр.
7.2.1. Математическая модель .....	81
7.2.2. Метод усреднения .....	90
7.2.3. Влияние усреднения материальных коэффициентов на вычисление распределения температуры .....	93
7.3. Двухмерная модель в непрерывном нагревателе .....	95
7.3.1. Введение .....	95
7.3.2. Общая концепция модели .....	96
7.3.3. Математическая модель сопряженных полей .....	97
7.3.4. Применение метода конечных разностей (МКР) для решения модели .....	101
7.3.4.1. МКР для уравнений электромагнитного поля .....	101
7.3.4.2. МКР для уравнений температурного поля ..	102
7.3.4.3. Проблемы численного решения уравнения параболическо-эллиптического типа .....	104
7.3.4.4. Применение метода переменных направлений (ADI) .....	106
7.3.4.5. Заметки относительно применяемых численных методов .....	109
7.4. Выводы .....	111

8. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ДЛЯ НАГРЕВАТЕЛЯ ПИТАЕМОГО ОТ ТИРИСТОРНОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ИНВЕРТОРА ТОКА .....	113
8.1. Введение .....	113
8.2. Тиристорный параллельный инвертор тока (ТПИТ) как источник питания индукционных нагревателей .....	114
8.2.1. Введение .....	114
8.2.2. Принципы управления и регулирования ТПИТ .....	115
8.2.3. Методы анализа работы ТПИТ .....	117
8.2.4. Моделирование работы ТПИТ питающего индукционный нагреватель .....	118
8.3. Алгоритм имитационного моделирования процесса нагрева для питания нагревателя от ТПИТ .....	122
8.3.1. Применение " метода "первой гармоник" .....	122
8.3.2. Алгоритм моделирования процесса нагрева .....	126

	Стр.
8.4. Выводы.....	130
9. ИЗБРАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	133
10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ.....	139
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	143
Приложение А1. Зависимости представляющие потери тепла в нагревателе.....	143
Приложение А2. Зависимости материальных коэффициентов заготовки и футеровки от температуры.....	145
Приложение А3. Зависимости представляющие распределение внутренних источников тепла.....	151
Приложение А4. Зависимости представляющие импеданс заготовки	152
Список литературы.....	153
Резюме.....	165

## WAŻNIEJSZE OZNACZENIA STOSOWANE W PRACY

- $a = \frac{\lambda}{\gamma_m c}$  - dyfuzyjność cieplna;
- $A$  - magnetyczny potencjał wektorowy;
- $A_m = A_m e^{j\omega t}$  - postać zespolona magnetycznego potencjału wektorowego, przy czym  $A_m = |A_m| e^{j\varphi}$
- $B$  - wektor indukcji magnetycznej;
- $c$  - ciepło właściwe;
- $c$  - prędkość światła;
- $c_k$  - współczynnik transformacji w metodzie oporów wniesionych;
- $C$  - pojemność kondensatora;
- $D$  - wektor indukcji elektrycznej;
- $D_{sr}$  - kontur całkowania;
- $E$  - wektor natężenia pola elektrycznego;
- $f$  - częstotliwość;
- $h_{sz}$  - szerokość szczeliny powietrznej;
- $H$  - wektor natężenia pola magnetycznego;
- $H(f)=f_H$  - transformata Hankela funkcji  $f$ ;
- $i, I$  - natężenie prądu elektrycznego, wartość chwilowa i skuteczna;
- $I_0, I_1$  - zmodyfikowane funkcje Bessela I rodzaju;
- $\mathbb{I}$  - macierz jednostkowa;
- $j$  - jednostka urojona;
- $J, J_0$  - gęstość liniowa prądu; gęstość prądu źródła;
- $J_n, Y_n$  - funkcje Bessela I i II rodzaju rzędu  $n$ -tego;
- $k=1/\Delta$  - stała tłumienia fali w metalu;
- $K_0, K_1$  - zmodyfikowane funkcje Bessela II rodzaju;
- $l$  - długość;
- $L, L_{sz}$  - indukcyjność; indukcyjność szczeliny powietrznej;
- $L$  - operator różniczkowy;
- $m=\sqrt{2} r/\Delta$  - parametr charakteryzujący efekt powierzchniowy;
- $M_0, M_1$  - jądro i równanie charakterystyczne przekształcenia Hankela;



- $n$  - normalna zewnętrzna do powierzchni;
- $n$  - przekładnia transformatora;
- $p_0$  - jednostkowa moc powierzchniowa (gęstość powierzchniowa mocy);
- $q$  - gęstość strumienia cieplnego;
- $Q$  - dobroć obwodu rezonansowego;
- $r$  - promień;
- $r_1, r_2$  - promień wewnętrzny i zewnętrzny nagrzewanej rury;
- $r_3, r_4$  - promień wewnętrzny i zewnętrzny wymurówki;
- $r_5$  - średni promień induktora;
- $R, R_M$  - rezystancja elektryczna i magnetyczna;
- $S=P+jQ$  - moc pozorna, przy czym:  $P$  - moc czynna,  $Q$  - moc bierna;
- $S$  - szereg nieskończony w rozkładzie temperatury;
- $S$  - wektor Poyntinga;
- $t, t_n$  - czas, czas nagrzewania;
- $t_d, t_q$  - czas dysponowany na wyłączenie; czas wyłączenia tyrystora;
- $T, T_o, T_p, T_a, T_{oo}, T_{req}, T_s$  - temperatura, bazowa, początkowa, otoczenia, średnia wody chłodzącej wzbudnik, żądana, na powierzchni granicznej  $S$ ;
- $u, U$  - napięcie elektryczne, wartość chwilowa, skuteczna;
- $U_w$  - napięcie na jednym zwoju wzbudnika;
- $v$  - prędkość liniowa;
- $w$  - przestrzenny rozkład wewnętrznych źródeł ciepła;
- $w_o$  - rozkład wewnętrznych źródeł ciepła;
- $w$  - liczba zwojów wzbudnika;
- $X$  - reaktancja;
- $Z, Z_o, Z_{ex}$  - impedancja; kwadratu jednostkowego, zewnętrzna;
- $\alpha_c, \alpha_r, \alpha_k$  - współczynnik przejmowania ciepła, przez radiację, przez konwekcję;
- $\alpha_L$  - współczynnik rozszerzalności liniowej;
- $\alpha = \Delta/r_2$  - współczynnik charakteryzujący efekt powierzchniowy;
- $\beta = (\lambda^2 + k^2)^{1/2}$  - zmienna w całce Fouriera;
- $\beta = r/r_2$  - bezwymiarowa współrzędna;
- $\beta_R$  - temperaturowy współczynnik rezystancji;
- $\beta$  - kąt komutacji;
- $\gamma_m$  - gęstość masy;
- $\gamma$  - przewodność elektryczna;
- $\delta(t)$  - pseudofunkcja Diraca;

- $\delta$  - odstrojenie względne od rezonansu;
- $\Delta = \left[ 2 / (\omega \mu \sigma) \right]^{1/2}$  - równoważna głębokość wnikania fali do metalu;
- $\Delta T, \Delta T_{req}$  - różnica temperatur; żądana różnica temperatur;
- $\Delta t, \Delta x$  - krok różnicowy czasowy i przestrzenny zmiennej  $x$ ;
- $\epsilon$  - emisyjność całkowita;
- $\epsilon$  - bezwzględna przenikalność dielektryczna;
- $\epsilon$  - błąd obliczeń; mała liczba  $\ll 1$ ;
- $\zeta = (m_2 - m_1) / \sqrt{2}$  - parametr funkcji aproksymującej z aneksu A.3;
- $\eta_T, \eta_E$  - sprawność cieplna; sprawność elektryczna;
- $\Theta_p, \Theta_q$  - temperatura wywołana mocą nagrzewania  $p_o$  i strumieniem strat ciepła  $q$ ;
- $\Theta = (T - T_p) / (T_o - T_p)$  - bezwymiarowa temperatura;
- $\Theta$  - parametr w metodzie "time stepping";
- $\theta$  - współrzędna kątowna;
- $\lambda$  - przewodność cieplna właściwa;
- $\lambda$  - parametr całkowania w całce Fouriera;
- $\Lambda$  - operator różnicowy;
- $\mu, \mu_d, \mu_o, \mu_{sr}$  - przenikalność magnetyczna względna, dynamiczna, próżni, średnia;
- $\mu_k$  - pierwiastek równania charakterystycznego  $M_1 = 0$  w jednostkach względnych;
- $\nu = 1/\mu$  - reluktywność magnetyczna;
- $\xi = r_1 / r_2$  - parametr charakteryzujący kształt rury;
- $\rho, \rho_w$  - gęstość ładunku; gęstość ładunku związanego;
- $\sigma$  - rezystywność;
- $\sigma_o$  - stała Stefana;
- $\tau$  - okres;
- $\varphi$  - odpowiedź skokowa na wymuszenie  $Ki = 1(t)$ ;
- $\varphi_o$  - charakterystyka przejściowa przy nagrzewaniu strumieniem zewnętrznym;
- $\varphi$  - kąt przesunięcia fazowego
- $\Phi_{2,w}$  - zastępczy współczynnik konfiguracji między ciałami 2 i w;
- $\Phi$  - potencjał skalarny;
- $\Phi$  - strumień magnetyczny;
- $\psi$  - strumień magnetyczny skojarzony;
- $\omega, \omega_o$  - pulsacja, pulsacja rezonansowa;

- $\omega, \omega_c$  - współczynnik relaksacji, rzeczywisty, zespolony  
w metodzie SOR;
- $\omega_k$  - współczynnik relaksacji w metodzie ADI;
- $1(t)$  - funkcja skokowa;

Kryteria podobieństwa:

- $Bi = (\alpha_c r_2)/\lambda$  - kryterium Biota;
- $F_o = at/r_2^2$  - kryterium Fouriera (bezwymiarowy czas);
- $Ki = (p_o r_2)/(\lambda(T_o - T_p))$  - kryterium Kirpiczewa (bezwymiarowa moc powierzchniowa);

Spis indeksów.

- d - wielkość wyprostowana;
- e - wartość na powierzchni zewnętrznej;
- i - wartość na powierzchni wewnętrznej;
- kw - wielkość quasi-stacjonarna;
- M - wielkość magnetyczna;
- p - wielkość początkowa;
- sr - wartość średnia
- t - wielkość styczna;
- T - wielkość przejściowa;
- \* - wielkość zespolona sprzężona;
- 1 - wielkość związana ze wzbudnikiem;
- 2 - wielkość związana ze wsadem;
- w - wielkość związana z wymurówką;

Stosowane skróty

- ADI - metoda naprzemiennych kierunków;
- ICCG - metoda sprzężonych gradientów z częściowym rozkładem Choleskiego;
- MEB - metoda elementów brzegowych;
- MES - metoda elementów skończonych;
- MHD - magnetohydrodynamiczny;
- MRS - metoda różnic skończonych;
- SOR - metoda kolejnych nadrelaksacji;
- TFRP - tyrystorowy falownik równoległy prądu.

## 1. WSTĘP

### 1.1. CELOWOŚĆ STOSOWANIA PROCESÓW ELEKTROTERMICZNYCH

Rozwój produkcji charakteryzuje się nie tylko stałym ulepszaniem jakości wyrobu i powiększaniem jego ilości, lecz również minimalizowaniem materiałochłonności i energochłonności. Narastający niedobór energii i surowców przy coraz bardziej zaostrzających się wymaganiach związanych z ochroną środowiska zmusza do poszukiwania nowych, lepszych rozwiązań konstrukcyjnych i technologicznych. W wielu procesach produkcyjnych, w tym również w termicznych procesach metalurgicznych, nagrzewanie ogniowe zastępuje się elektrycznym, stosując do tych celów nagrzewanie łukowe, indukcyjne, plazmowe, oporowe, dielektryczne, elektronowe i inne.

Wśród stosowanych metod elektrotermicznych na szczególną uwagę zasługuje nagrzewanie indukcyjne, które charakteryzują m.in. następujące cechy:

- duża koncentracja energii i związany z tym szybki wzrost temperatury we wsadzie;
- możliwość pełnej automatyzacji procesu i uzyskanie dużych wydajności produkcyjnych;
- łatwość zmian parametrów nagrzewania w celu uzyskania pożądanych efektów technologicznych;
- powtarzalność wyników procesu nagrzewania;
- wysoka sprawność;
- zmniejszenie zużycia jednostkowego energii w porównaniu z innymi procesami nagrzewania pośredniego np. w piecach oporowych;
- mniejsze niż przy nagrzewaniu płomieniowym utlenianie nagrzewanego materiału;
- łatwość usytuowania w istniejących procesach technologicznych;
- możliwość regulacji głębokości nagrzewania przez dobór częstotliwości;
- brak konieczności zetknięcia wsadu i źródła ciepła;

- precyzyjne umiejscowienie nagrzewanej powierzchni przez dobór sprzężenia ze wsadem.

Do wad grzejnictwa indukcyjnego zaliczano swego czasu wysoki koszt inwestycyjny tego typu urządzeń grzewczych, który przy obecnym rozwoju energoelektroniki i elektroniki poważnie zmalał. Głównym i przekonywającym wskaźnikiem, przemawiającym obecnie za stosowaniem nagrzewania indukcyjnego, jest mniejsze zużycie energii w stosunku do grzania w piecach płomieniowych. Elektrotermia jest więc synonimem oszczędności energii, wysokiej jakości produktów i małej uciążliwości dla środowiska naturalnego.

Przyczyny słabego rozwoju grzejnictwa indukcyjnego w Polsce można podzielić na dwie podstawowe grupy:

A. Trudności na etapie projektowania nagrzewnic wynikające m.in. z:

- występowania w nich złożonych, sprzężonych zjawisk elektromagnetycznych, termokinetycznych, termosprężystych i metalurgicznych;
- faktu, że nagrzewnice indukcyjne są opisane układami nieliniowych, niestacjonarnych równań różniczkowych lub całkowych;
- konieczności stosowania przy projektowaniu, nawet przy silnych założeniach upraszczających, skomplikowanego aparatu matematycznego;
- istnienia dużej różnorodności geometrycznej układów nagrzewnica-wsad, źródeł zasilania i operacji technologicznych, w których stosowane jest nagrzewanie indukcyjne;
- brakiem nowoczesnych metod projektowania nagrzewnic;
- problemów z wiarygodną weryfikacją laboratoryjną zaprojektowanych nagrzewnic indukcyjnych;
- brakiem właściwego zaplecza naukowo-badawczego.

B. Trudności techniczno-ekonomiczne wynikające m.in. z:

- dotychczasowego braku badzców ekonomicznych i ekologicznych zmuszających do wprowadzania nowych sposobów nagrzewania;
- słabego rozeznania technologów co do wymaganych optymalnych warunków nagrzewania;
- braku konsekwentnej, perspektywicznej polityki gospodarowania energią w kraju;
- zaniedbaniem krajowej bazy produkcji urządzeń elektrotermicznych.

Ze względu na przestarzałe urządzenia oraz ich nieprawidłową eksploatację w procesach elektrotermicznych w kraju zużywa się kilkadziesiąt procent

energii więcej, niż wynikałoby to z racjonalnej gospodarki energetycznej [46].

Grzejnictwo indukcyjne znalazło szerokie zastosowanie w przemyśle przy topieniu metali, obróbce powierzchniowej (hartowaniu, przesycaniu, azotowaniu, nawęglaniu, borowaniu), nagrzewaniu skrośnym przed obróbką plastyczną metali (kuciu, prasowaniu, wyciskaniu, tłoczeniu, walcowaniu, cięciu, gięciu, kalibrowaniu, spęcznianiu), łączeniu metali (zgrzewaniu, spawaniu, lutowaniu), obróbce cieplnej (odpuszczaniu, wyżarzaniu) i wielu innych, np. przy wytwarzaniu plazmy, suszeniu, nagrzewaniu proszków formierskich, rozmrażaniu żywności.

Współczesne pojedyncze nagrzewnice indukcyjne mogą mieć moc dziesiątków megawatów, a sumaryczna moc nagrzewnic zainstalowanych grupowo w jednym zakładzie przemysłowym może przekraczać 100 MW [40,157].

Spośród możliwych zastosowań nagrzewania indukcyjnego, bardzo atrakcyjna pod względem technicznym i ekonomicznym wydaje się być możliwość zastąpienia pieców płomieniowych nagrzewnicami indukcyjnymi przy produkcji rur bezszwowych.

## 1.2. GRZANIE INDUKCYJNE PRZY PRODUKCJI RUR BEZSZWOWYCH

Od pewnego czasu przy produkcji rur bezszwowych stosowane jest coraz częściej nagrzewanie indukcyjne. Ponieważ proces walcowania musi odbywać się w ściśle określonym przedziale temperatury wsadu, więc w skład potokowej linii produkcyjnej oprócz walcarek muszą wchodzić również urządzenia grzewcze utrzymujące określoną temperaturę elementu walcowanego. Wydajność i niezawodność urządzeń grzewczych musi odpowiadać wydajności i niezawodności walcarek.

Nowoczesne walcownie rur bezszwowych charakteryzują się dużą wydajnością sięgającą 400...600 tysięcy ton rocznie; przy pracy trójzmiarowej wynosi to 67...86 t wsadu na godzinę. W typowych walcowniach rur szybkość walcowania wynosi od 0,5 do 8,5 m/s, ale w nowoczesnych walcowniach dochodzi nawet do 16 m/s. Średnice produkowanych rur bezszwowych mieszczą się w granicach 17...950 mm, chociaż do rurociągów produkowane są rury bezszwowe o średnicach 2000 mm. Typowy stosunek grubości ścianki rury bezszwowej do wewnętrznego promienia rury waha się w granicach 0,07...0,012. Pod względem właściwości magnetycznych spotyka się dużą różnorodność materia-

łów walcowanych rur; mogą to być ferromagnetyki - stale węglowe, ferrytyczne, perlityczne lub nieferromagnetyki - stale austenitowe, żaroodporne, miedź, aluminium i stopy metali kolorowych.

Przedstawione podstawowe parametry technologiczne produkcji rur bezszwowych stanowią podstawę do zaprojektowania przemysłowej nagrzewnicy rur dla tego procesu produkcyjnego. Dalsze dane dotyczące samej technologii produkcji rur bezszwowych, jak i wymagania stawiane urządzeniom do grzania indukcyjnego stosowanym w tym procesie można znaleźć w literaturze [7,16, 33,68].

Nagrzewnice indukcyjne do nagrzewania rur mają wiele zalet w porównaniu z piecami płomieniowymi. Ocenia się, że do nagrzania stali do 1200 °C zużywa się około 325...360...440 kWh/t przy nagrzewaniu indukcyjnym i aż 2400 kWh/t przy nagrzewaniu gazowym, ubytki na zendrowanie zmniejszają się z 1,5...3% do 0,5% przy tej samej temperaturze nagrzewania [7]. Wśród zalet takiego zastosowania nagrzewnic indukcyjnych należy raz jeszcze wymienić szybki wzrost temperatury wsadu, łatwość rozruchu linii, dużą niezawodność i łatwą wymianę części nagrzewnicy, większą żywotność, a co najważniejsze łatwość poddawania się automatyzacji, gdyż można w nich w sposób skuteczny oddziaływać na parametry strugi energii doprowadzanej do wsadu. Istotnymi zaletami nagrzewnic indukcyjnych są również w tym przypadku: łatwość usytuowania w linii technologicznej, mniejsza uciążliwość dla środowiska naturalnego oraz możliwość uzyskania dużych wydajności technologicznych. Zasadniczą wadą nagrzewnic indukcyjnych usytuowanych w linii produkcji rur jest trudność utrzymania stałej temperatury wsadu w czasie krótkotrwałych postojów linii walcowniczej.

Przykładem nowoczesnej linii do nagrzewania indukcyjnego rur jest nagrzewnica dostarczona przez koncern ASEA w roku 1978 i pracująca w Wirsbo Bruks AB w Szwecji. Służy ona do nagrzewania rur o średnicach zewnętrznych 76...114 mm do temperatury 1000 °C przed walcowaniem w reduktorze pracującym z naciągami. Wydajność nagrzewnicy 11 t/h przy mocy zasilania 4,8 MW lub 20 t/h przy mocy 6 MW. Zasilana jest z falowników tyrystorowych, napięcie na wzbudnikach 1950 V przy 600 Hz, zużycie energii wynosi zaledwie 310 kWh/t [113].

## 2. METODY BADANIA PÓL - ELEKTROMAGNETYCZNEGO I TEMPERATURY - W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH. PRZEGLĄD LITERATURY

### 2.1. WSTĘP

Badanie zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w nagrzewnicach indukcyjnych jest zadaniem niezwykle atrakcyjnym z punktu widzenia teorii pola i zastosowań metod numerycznych. Nagrzewnice indukcyjne charakteryzują się m.in. następującymi, interesującymi nas przy badaniu, cechami:

- składają się z obszarów przewodzących i nieprzewodzących, mogą zawierać materiały ferromagnetyczne i części ruchome;
- wymuszenie pola elektromagnetycznego może mieć charakter prądowy lub napięciowy, a przebiegi wymuszające mogą być niesinusoidalne;
- dwa podstawowe pola - elektromagnetyczne i temperatury są bardzo silnie sprzężone;
- pola są silnie nieliniowe, a w materiałach ferromagnetycznych występuje bardzo silne nasycenie magnetyczne;
- zastępcze stałe czasowe obu pól różnią się o rzędy;
- zjawiska polowe opisane są mieszanymi równaniami eliptyczno-parabolicznymi;
- geometria nagrzewnic dopuszcza zazwyczaj analizę pól dwu- a czasami nawet jednowymiarowych;
- istnieją problemy z dokładnym określeniem warunków granicznych (dotyczy to głównie pola temperatury), jak i z późniejszą weryfikacją eksperymentalną uzyskanych wyników obliczeń;
- układ sterowania i regulacji źródła zasilania ma istotny wpływ na proces nagrzewania, szczególnie przy zasilaniu nagrzewnic z przekształtników tyrystorowych;
- nagrzewnice mogą wchodzić w skład złożonych procesów technologicznych.

Dobra metoda umożliwiająca badanie nagrzewnic indukcyjnych powinna:



- umożliwiać uwzględnienie powyższych cech, oczywiście tylko w przypadkach, gdy jest to konieczne;
- zapewniać dużą dokładność, krótki czas obliczeń, a zatem i ich niski koszt;
- wymagać niewiele danych wejściowych i obliczać użyteczne dane projektowe;
- zachowywać uniwersalność przy zamianie pewnych danych wejściowych;
- umożliwiać pełną analizę, a nawet optymalizację procesu nagrzewania;
- być dostosowana do wykonywania nawet na komputerach osobistych, np. w standardzie IBM/AT lub IBM/XT.

Przedstawione cechy obrazują złożoność zadania badania pól w nagrzewnicach indukcyjnych, zarówno na etapie budowy modelu matematycznego zjawisk fizycznych, jak i przy jego późniejszej algorytmizacji. Wybór jednej z licznych metod badania pól lub projektowania nagrzewnicy uzależniony jest od wielu czynników, m.in. od żądanych wyników (obraz pola, parametry całkowite nagrzewnicy) i ich dokładności, przyjętych warunków granicznych, założeń upraszczających, konfiguracji geometrycznej układu, dopuszczalnych kosztów rozwiązania, intuicji i doświadczenia badacza oraz dysponowanego sprzętu obliczeniowego.

Poniżej zostaną omówione zalety, wady i perspektywy rozwoju różnych metod badania pól w nagrzewnicach indukcyjnych podzielonych wg kryterium stosowanych metod badania pól. Pełniejszą charakterystykę tych metod zawiera praca [127].

## 2.2. BADANIE POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

### A. METODY ANALITYCZNE

Można zaproponować następujący podział tej bardzo obszernej grupy metod:

- rozwiązywanie analityczne równań różniczkowych jednowymiarowych;
- metoda rozdzielenia zmiennych;
- metoda całki i szeregu Fouriera;
- metody specjalne.

Zaletą tych metod jest niski koszt obliczeń i możliwość uzyskania wyników w stosunkowo krótkim czasie. Końcowe rozwiązanie otrzymuje się w postaci zależności analitycznych, co ułatwia dyskusję nad wpływem poszczegól-

gólnych parametrów i optymalizację procesu; opisują rozkład pola w całym badanym obszarze i nie ograniczają się do jego dyskretnych punktów; umożliwiają weryfikację wyników metod numerycznych [17,23,30,93,97,32,75,76,108,122,130,132, 151,160,161].

Wadą jest konieczność ich stosowania przy tak silnych założeniach upraszczających, że uzyskane wyniki obarczone są zazwyczaj dużym błędem; w ten sposób zniweczona zostaje największa zaleta - dokładność samej metody. Stosowane mogą być w układach o prostej geometrii lub w oddzielnych częściach układów złożonych; zazwyczaj wymagają założenia o liniowości i jednorodności środowiska, mogą być stosowane przy prostych warunkach brzegowych.

## B. MODELOWANIE ANALOGOWE

Podział tej grupy metod jest następujący:

- modelowanie w ośrodkach ciągłych;
- modele siatkowe;
- modelowanie przy użyciu maszyn analogowych.

Zaletami tej grupy metod są: pogładowość, duża szybkość działania, możliwość modelowania procesów stacjonarnych i niestacjonarnych, liniowych i nielinowych. Podstawowe wady to często mała dokładność wyników, trudności w uwzględnieniu nielinowości, szczególnie tych zmieniających się w czasie i przestrzeni, mały obszar zastosowań każdego modelu, awarie złożonego analogowego sprzętu obliczeniowego [97,117].

## C. MODELOWANIE FIZYCZNE

Można podzielić tę grupę metod na:

- modelowanie oparte na teorii podobieństwa;
- eksperyment planowany.

Modelowanie fizyczne jest jedną z podstawowych metod badania nagrzewnic indukcyjnych, obejmującą badania na modelach fizycznych i obiektach rzeczywistych. Modelowanie fizyczne stosowane jest do rozwiązywania zadań o charakterze konstrukcyjnym lub technologicznym, sprawdzania modeli matematycznych, określania wpływu przyjętych założeń, a także zjawisk nie uwzględnionych przy modelowaniu matematycznym. Wadami są wysoki koszt i trudności z wykonaniem modelu lub obiektu rzeczywistego, mała dokładność pomiaru wielu wielkości fizycznych, ograniczona obserwowalność. Stosowane

są zazwyczaj do obiektów, najczęściej trójwymiarowych, dla których nie istnieją efektywne metody obliczeniowe [12,97].

#### D. MODELOWANIE NUMERYCZNE

Podział tej grupy metod jest bez wątpienia najbardziej złożony. Można wyróżnić następujące metody [8,62,63,115]:

- metody obszarowe np. metoda różnic skończonych (MRS), metody oparte na metodzie residuów ważonych (metoda kolokacji punktowej i w podobszarach, metoda momentów, metoda Galerkina i jej realizacja numeryczna metoda elementów skończonych (MES), metoda najmniejszych kwadratów), metoda równań całkowych objętościowych;
- metody brzegowe, np. metoda kolokacji na brzegu, metoda Trefftza, metoda wykorzystująca rozwiązania osobliwe i jej realizacja numeryczna - metoda elementów brzegowych (MEB), metoda równań całkowych brzegowych;
- metody hybrydowe, np. analityczno-numeryczne, obszarowo-brzegowe, polowo-obwodowe.

Ogólna charakterystyka tych metod przedstawiona jest w wielu pracach np. [8,17,62,63,72,161]. Poniżej zostaną omówione tylko te metody numeryczne, które znalazły najszersze zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów grzejnictwa indukcyjnego.

Wśród metod obszarowych zdecydowanie dominują dwie metody - MRS [8,17,72,89,92,95,117,118,128,135,139,148,151,164,168] i MES [8,18,81,82,115,169]. Pozwalają one uwzględnić nieliniowości materiałowe, sprzężenie pól, pola niestacjonarne, złożone warunki brzegowe i geometryczne, prowadzą do układów równań algebraicznych numerycznie atrakcyjnych, tj. macierzy rzadkich i diagonalnie dominujących.

MRS była w latach niedostępności pakietów MES prostą metodą formułowania i rozwiązywania problemów polowych, najczęściej dwuwymiarowych. Obecnie uważa się, że MES z uwagi na możliwość uwzględnienia bardziej skomplikowanych kształtów badanego obszaru, łatwość wprowadzenia warunków granicznych jest lepsza w zastosowaniach do zagadnień polowych od MRS. Przewagę MES pogłębia dodatkowo jej bardzo szybki rozwój wynikający ze stosowania jej w wielu dziedzinach techniki, co doprowadziło do powstania komercyjnych pakietów wykorzystujących tę metodę.

W ostatnim dziesięcioleciu pojawiły się publikacje, w których do opisu

pola elektromagnetycznego w nagrzewnicach indukcyjnych zastosowano metodę równań całkowych. Zastosowanie do opisu zjawisk elektromagnetycznych metody źródeł wtórnych prowadzi do równania całkowego Fredholma II rodzaju [45,60]. Metoda źródeł wtórnych, stosunkowo prosta w przypadku wsadów niemagnetycznych, prowadzi do skomplikowanych, iteracyjnych obliczeń przy wsadach magnetycznych. Omawiana metoda generuje układy równań o pełnej macierzy współczynników, które przy odpowiedniej dyskretyzacji obszaru obliczeniowego niezbędnej do zachowania odpowiedniej dokładności są bardzo duże. Dlatego też w elektrotermii dąży się do takiego sformułowania opisu pola elektromagnetycznego za pomocą równań całkowych, który pozwala na podstawie interpretacji fizycznej równań, znanego obrazu pola lub symetrii układu znacznie uprościć algorytm rozwiązywania i skrócić czas obliczeń. Metody takie zostały opracowane szczególnie dobrze dla układów dwuwymiarowych o symetrii osiowej lub płaskiej [95,96,97].

Najczęściej spotykaną wersją metody całek objętościowych jest metoda obwodów sprzężonych stosowana w układach o symetrii osiowej lub płaskiej [95, 97]. W metodzie tej obszar przewodzący dzielony jest na odpowiednie podobszary. Następnie stosując odpowiednie zależności na rezystancję i indukcyjność własną każdego podobszaru i indukcyjność wzajemną wszystkich par podobszarów, tworzy się układ równań algebraicznych o postaci II prawa Kirchhoffa.

Dążąc do dalszego ułatwienia rozwiązywania równań Fredholma, można je algebraizować wprowadzając dyskretyzację badanego obszaru tylko w jednym wymiarze. Jest to możliwe, gdy znany jest rozkład pola wzdłuż jednej współrzędnej, np.  $r$  lub  $z$ . W praktyce rozkład ten jest szacowany na podstawie wyników jakiegokolwiek metody dla pola jednowymiarowego [97]. Postępowanie takie znacznie zmniejsza wymiar zadania algebraicznego, ale wprowadza znaczne trudności w obliczaniu współczynników układu równań, które można interpretować jako współczynniki indukcyjności wzajemnej między obwodami a cienkim dyskiem, w którym znany jest rozkład prądów.

W przypadku znajomości rozkładu pola w kierunku normalnym do powierzchni ciała przedstawiony sposób postępowania prowadzi do znanej metody obliczeń przy impedancyjnych warunkach granicznych [28,94,95,97]. Metoda ta ma największe znaczenie w połączeniu z innymi metodami numerycznymi, np. MRS, MES, zastosowanymi do problemu wewnętrznego i metodami całkowymi opisującymi pole zewnętrzne; połączenie obszarów zewnętrznego i wewnętrznego

można uzyskać wtedy właśnie przez zastosowanie impedancyjnych warunków granicznych.

Szeroka klasa problemów brzegowych może być sformułowana za pomocą równań całkowych na brzegu rozpatrywanego obszaru. W ogólności dotyczy to tych problemów, dla których rozwiązanie fundamentalne równania różniczkowego jest z góry znane [10,26,27]. W porównaniu z obszarowymi metodami analizy (MRS, MES lub metoda całek obszarowych) sformułowanie problemu za pomocą równań całkowych brzegowych ma cztery wydatne zalety:

- rozmiar zadania numerycznego jest efektywnie zmniejszany o jeden, zadania trójwymiarowe stają się zadaniami dwuwymiarowymi, zadania dwuwymiarowe wymagają całkowania tylko w jednym wymiarze, co prowadzi zazwyczaj do układów równań mniejszych niż układy otrzymywane w identycznych zadaniach przy zastosowaniu metod obszarowych;
- analiza może być w równym stopniu stosowana do problemów zewnętrznych, jak i wewnętrznych;
- sformułowanie zadania za pomocą równania Fredholma II rodzaju jest problemem numerycznym dobrze uwarunkowanym;
- umożliwia dokładne uwzględnienie zjawiska naskórkowości.

Do numerycznego rozwiązywania równań całkowych brzegowych można stosować wiele metod, np. metodę iteracyjną, ale obecnie metodą najpopularniejszą jest MEB [8,10,27,67].

Metody hybrydowe będące połączeniem metod obszarowych i brzegowych stosowane są w przypadku konieczności uwzględnienia nieograniczonego obszaru powietrznego. Stanowią one połączenie MES lub MRS z metodą elementów nieskończonych lub MEB [8,96].

Chęć uwzględnienia w obliczeniach urządzeń elektromagnetycznych wpływu źródła zasilania i jego układu regulacji zmusza do opisanego obwodu zasilania odpowiednimi równaniami obwodowymi, ograniczając opis polowy do samego urządzenia elektromagnetycznego [88]. W przypadku zasilania nagrzewnic ze źródeł półprzewodnikowych opis może się znacznie skomplikować przez konieczność uwzględnienia stanu załączenia lub wyłączenia poszczególnych zaworów [18,29,79,107,123,125,137,138,142,143].

### 2.3. BADANIE POLA TEMPERATURY

Prawie wszystkie opisane powyżej metody badania pola elektromagnetycznego są stosowane do badań pola temperatury, a przedstawione powyżej uwagi

ogólne dotyczące poszczególnych metod są w większości obowiązujące również w wypadku pola temperatury. Tak więc poniżej ograniczono się do przedstawienia tylko najbardziej charakterystycznych zastosowań poszczególnych metod w przypadku nagrzewania indukcyjnego rur.

Ogólnie można stwierdzić, że w tym zastosowaniu dominują metody analityczne, oparte na linearyzacji odcinkowej procesu nagrzewania [100]. Stosunkowo często do obliczania nieustalonych i ustalonych wielowymiarowych rozkładów temperatury stosowana jest metoda rozdzielania zmiennych [17, 30, 44]. Wprowadzenie w tej metodzie złożonych warunków wymiany ciepła i rzeczywistych rozkładów wewnętrznych źródeł ciepła może znacznie skomplikować obliczenia na EMC.

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a lub Hankela do jednowymiarowego równania przewodnictwa cieplnego we współrzędnych cylindrycznych pozwala sprowadzić to równanie do równania Bessela. W przypadku równań wielowymiarowych lub ruchu wsadu można stosować wielokrotne przekształcenia całkowe lub ich kombinacje, aż do sprowadzenia równania różniczkowego cząstkowego do równania różniczkowego zwyczajnego. I tak np. w pracy [153] rozpatrzono nagrzewanie walca o skończonych wymiarach, stosując dla współrzędnej  $r$  przekształcenie Hankela, a dla współrzędnej  $z$  przekształcenie Laplace'a.

Opis zastosowań metody MEB do analizy stacjonarnych i niestacjonarnych zagadnień termokinetyki można znaleźć w pracy [10], a zastosowania metod modelowania analogowego i hybrydowego opisano w pracach [44, 59, 78, 117].

#### 2.4. BADANIE PÓL SPRZEŻONYCH

Badanie pól sprzężonych powinno być wykonywane w zasadzie tylko metodami numerycznymi. Pomimo to od lat rozprzega się oba pola, dzieląc cały proces nagrzewania na przedziały, zazwyczaj trzy, i przyjmując w każdym z nich uśrednione wartości współczynników cieplnych i co istotniejsze uśrednione wartości wewnętrznych źródeł ciepła, prowadzi obliczenia metodami analitycznymi [100, 117, 121, 132]. Postępowanie takie musi nieuchronnie prowadzić do błędów zależnych głównie od ilości przedziałów, sposobu uwzględnienia rozkładów wewnętrznych źródeł ciepła i strat ciepła ze wsadu.

Prace omawiające nieliniowe pola sprzężone jedno- lub dwuwymiarowe, w których stosowano metody numeryczne, wykorzystują w zdecydowanej większo-

ci MRS [89, 92, 97, 117, 118, 128, 135]. Niewiele jest prac stosujących w tym celu MES [82]; przyczyną tego jest chyba nieprzystosowanie typowych pakietów do analizy pól sprzężonych; wyjątkiem jest program FLUX 2D [81].

Ostatnio przedmiotem modelowania są pola sprzężone w nagrzewnicach przelotowych [48, 128, 139, 148].

## 2.5. WNIOSKI

Przeprowadzony przegląd literatury pozwala sformułować następujące wnioski dotyczące wad, zalet i perspektyw stosowania metod badania pól w nagrzewnicach indukcyjnych:

- zastosowanie najnowszych metod obliczanie pól elektromagnetycznych w grzejnictwie indukcyjnym jest opóźnione w porównaniu z zastosowaniem tych metod do projektowania innych urządzeń i aparatów elektrycznych;
- wiele z opisanych metod stanowi wciąż bardziej "przykład obliczeniowy" w rękach "badaczy" niż użyteczne narzędzie projektowe;
- najważniejszym zadaniem obliczeniowym jest obecnie badanie sprzężonych pól dwuwymiarowych, waga tego problemu jest porównywalna z obliczeniami pól niesprzężonych w przestrzeni trójwymiarowej;
- budowane modele powinny uwzględniać wpływ warunków zasilania nagrzewnicy np. charakter źródła zasilania i jego układu regulacji, wpływ transformatora zasilającego, baterii kondensatorów, układy połączeń wzbudników itp. i powinny być częścią dużych programów symulujących pracę całej linii technologicznej, w skład której wchodzi nagrzewnica;
- do rozwiązania zewnętrznego problemu elektromagnetycznego celowe jest zastosowanie metody całkowej, a do obliczenia zadania elektromagnetycznego i termokinetycznego wewnątrz wsadu MRS lub MES, metody analityczne lub ich kombinacje;
- zdecydowanie największe znaczenie przy badaniu nieliniowych i niestacjonarnych pól sprzężonych mają obecnie MES i MRS;
- rozwiązania analityczne mogą być znalezione zazwyczaj tylko dla bardzo ograniczonej liczby przypadków liniowych i bardzo wyidealizowanych warunków granicznych;
- oceniając przydatność metod równań całkowych stosowanych samodzielnie w badaniu nagrzewnic indukcyjnych, można stwierdzić, że nie umożliwiają one badania pól sprzężonych, oceny wpływu nagrzania wsadu i jego włas-

ciwości ferromagnetycznych, nie uwzględniają odkształceń przebiegów wielkości elektromagnetycznych; ich zastosowanie powinno ograniczać się głównie do układów o słabym sprzężeniu pól, np. urządzeń magnetohydrodynamicznych (MHD) i nagrzewnic wsadów niemagnetycznych;

- największe perspektywy rozwoju wydają się mieć metody hybrydowe: obszarowo-powierzchniowe lub polowo-obwodowe z uwagi na fakt, że pozwalają one najpełniej uwzględnić polowe zjawiska we wsadzie i złożony niejednokrotnie układ zasilania nagrzewnicy;

- metody numeryczne wykorzystywane są zazwyczaj do oceny ilościowej pola w dyskretnych punktach, rzadziej do wyznaczania parametrów całkowych układu, np. mocy, rezystancji, sił, co stanowi odrębne, zazwyczaj pracochłonne zadanie numeryczne.



### 3. CEL I ZAKRES PRACY

Jest rzeczą oczywistą, że uczynienie z grzejnictwa indukcyjnego nowoczesnej, energooszczędnej i niezawodnej metody nagrzewania dla celów przemysłowych musi być poprzedzone licznymi pracami projektowymi, obejmującymi zarówno nagrzewnicę, źródła zasilania, jak również odpowiedni dobór parametrów nagrzewania. Prace te powinny zmierzać do optymalizacji procesu nagrzewania. Punktem wyjścia wszystkich prac projektowych w grzejnictwie indukcyjnym jest model matematyczny zjawisk fizycznych w nagrzewnicy. Zbudowaniu takich właśnie modeli, użytecznych przy tworzeniu programów komputerowo wspomaganego projektowania nagrzewnic indukcyjnych, poświęcona jest niniejsza praca.

Głównym celem pracy było opracowanie modeli matematycznych i odpowiadających im algorytmów numerycznego obliczania pól sprzężonych - elektromagnetycznego i temperatury - w nagrzewnicach indukcyjnych rur. Ponadto postawiono sobie za cel opracowanie algorytmu symulacji pracy nagrzewnicy przy zasilaniu z tyrystorowego falownika równoległego prądu.

Tak postawiony cel był realizowany poprzez aplikację znanych z literatury metod analizy zagadnień elektrodynamiki technicznej, termokinetyki i energoelektroniki. Zrealizowanie celu pracy powinno przyczynić się do wypełnienia luki pomiędzy znanymi, zaawansowanymi metodami obliczeniowymi teorii pól a praktyką projektową i problemami eksploatacyjnymi.

Rozwój metod numerycznych i zdolności obliczeniowych komputerów uczynił z modelowania matematycznego i symulacji komputerowej podstawowe narzędzie pracy inżyniera, powszechnie akceptowane zarówno na etapie projektowania jak i eksploatacji urządzeń elektrotermicznych. Informacje o zjawiskach zachodzących w procesie nagrzewania indukcyjnego rur, niezbędne przy projektowaniu, eksploatacji i optymalizacji, można uzyskać za pomocą symulacji numerycznej pracy nagrzewnicy indukcyjnej, uwzględniającej zarówno sprzężone zjawiska elektromagnetyczne i termokinetyczne, jak również wpływ źródła zasilania nagrzewnicy.

Zakres pracy był następujący. Na początku pracy, w rozdziale 1. wymieniono zalety i wady nagrzewania indukcyjnego oraz przedstawiono istotne, zdaniem autora, przyczyny słabego wciąż rozwoju grzejnictwa indukcyjnego w Polsce. Omówiono również możliwości zastąpienia nagrzewania płomieniowego nagrzewaniem indukcyjnym przy produkcji rur bezszwowych. Informacje zawarte w tym rozdziale mają uzasadnić celowość i istotność podjęcia poruszonej w pracy problematyki nagrzewania indukcyjnego rur. Rozdział 2. zawiera bardzo obszerny przegląd literatury dotyczącej badania pól w nagrzewnicach indukcyjnych. Omówienia dokonano wg kryterium stosowanych metod badania pól. Podano zalety, wady i perspektywy rozwoju poszczególnych metod. W rozdziale tym wymieniono również cechy charakteryzujące nagrzewnice indukcyjne, istotne przy badaniu oraz podano cechy, którymi powinna charakteryzować się dobra metoda badania omawianych pól. Cechy te są bardzo ważne, gdyż determinowały w dużej mierze wybór i budowę przedstawionych w dalszej części pracy metod badania pól. Przegląd zakończono wnioskami dotyczącymi obecnego stanu badania pól w nagrzewnicach indukcyjnych. W rozdziale 3. omówiono zakres rozprawy. Uzasadnienia wymaga zrezygnowanie w pracy z włączenia w jej zakres zagadnień związanych z zagadnieniami naprężeń termicznych i sił elektrodynamicznych występujących w nagrzewnicy. Uwzględnienie tych zjawisk uczyniłoby pracę na pewno pełniejszą. Jakże więc przyczyny zadecydowały o rezygnacji z analizy tego zagadnienia?. Było ich kilka:

- brak sprawdzonych metod doboru, przynajmniej w zastosowaniach do grzejnictwa indukcyjnego, współczynników równań termosprężystości pomimo istnienia bardzo zaawansowanej ogólnej teorii termosprężystości;
- osiągnięcie, a raczej przekroczenie przez dysponowany sprzęt granicy mocy obliczeniowej;
- brak możliwości i doświadczeń nawet w zakresie elementarnych pomiarów naprężeń termosprężystych.

Rozdział 4. zawiera ogólny opis matematyczny zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w nagrzewnicach indukcyjnych. Podano w nim podstawowe równania opisujące oba pola, główne założenia upraszczające obowiązujące w całej pracy oraz omówiono specyfikę warunków granicznych przyjmowanych w nagrzewnicach indukcyjnych. Z rozdziałem tym związane są dwa aneksy: A1 podający podstawowe zależności opisujące straty ciepła z nagrzewnicy i A2, w którym podano aproksymacje współczynników materia-

łowych wsadu i wymurówki w funkcji temperatury oraz opisano przyjmowaną w obliczeniach charakterystykę magnesowania stali. W kolejnych trzech rozdziałach pracy opisano wybrane, opracowane lub rozwinięte przez autora metody obliczania pól w nagrzewnicach indukcyjnych. I tak w rozdziale 5. opisano analityczną metodę obliczania pola temperatury w rurze o dowolnej grubości ścianki za pomocą przekształcenia Hankela. Pokazano sposób prowadzenia obliczeń w przypadku linearyzacji wieloodcinkowej procesu. Przedstawiono zależności pozwalające uzyskać wiele interesujących wiadomości o nagrzewaniu wsadu znajdującego się w stanie quasi-ustalonym. Uzupełnieniem rozdziału są zależności opisujące rozkład wewnętrznych źródeł ciepła podane w aneksie A3. Rozdział 6. zawiera opis dwóch wybranych metod analitycznego obliczania pola elektromagnetycznego. Pierwsza z nich to prosta metoda iteracyjna oparta na schematach zastępczych nagrzewnicy-magnetycznymi elektrycznym. Za jej pomocą można określić wpływ szeregu czynników konstrukcyjnych i eksploatacyjnych na impedancję wsadu ferromagnetycznego. Metoda druga to dobrze znana z literatury tzw. metoda całki Fouriera. Pozwala ona oszacować wpływ skończonej długości wzbudnika na parametry nagrzewnicy. O włączeniu tej metody, stosowanej w dalszym ciągu przez szereg ośrodków naukowych, w zakres pracy zdecydowała chęć szerszego omówienia jej zalet i wad. Rozdział 7., najobszerniejszy w pracy, zawiera opis dwóch modeli numerycznych pól sprzężonych: modelu jednowymiarowego i modelu dwuwymiarowego, uwzględniającego dodatkowo ruch wsadu we wzbudniku. Dla obu modeli podano podstawowe równania pól i warunki graniczne. Równania obu modeli rozwiązywano za pomocą MRS. W przypadku modelu jednowymiarowego rozwiązywano równanie dyfuzji dla pola elektromagnetycznego, a w modelu dwuwymiarowym w celu skrócenia czasu obliczeń przyjęto uproszczony model harmonicznych zjawisk elektromagnetycznych. Zaproponowano tzw. metodę uśredniania, która przyczyniła się do znacznego zwiększenia efektywności obliczeń w modelu jednowymiarowym. Pokazano również na przykładzie tego modelu, jaki wpływ na obliczenie końcowego rozkładu temperatury ma uśrednienie współczynników materiałowych wsadu, zasilanie przy stabilizacji prądu i napięcia wzbudnika, stała i zmienna częstotliwość prądu wzbudnika i jego różny kształt. Spośród wielu problemów numerycznych związanych z obydwoimi modelami omówiono szerzej zaledwie dwa: problemy numerycznego rozwiązywania równania paraboliczno-eliptycznego i zastosowanie metod naprzemiennych kierunków (ADI) do rozwiązywania równań parabolicznych i eliptycznych. W rozdziale 8. przedstawiono metodę symulacji procesu nagrzewania

przy zasilaniu nagrzewnicy z tyrystorowego falownika równoległego prądu (IFRP). Podano niezbędne informacje o działaniu, sterowaniu i regulacji tego typu falownika. Przedstawiono wyniki symulacji pracy tego falownika przy obciążeniu quasi-ustalonym, przy którym stan elektromagnetyczny falownika opisany był układem równań różniczkowych zwyczajnych, a parametry obciążenia były obliczane z prostych równań polowych (podanych w aneksie A4), które nie uwzględniały wpływu temperatury na zmiany parametrów obciążenia. Zaproponowano również algorytm symulacji całego procesu nagrzewania. Pracę falownika opisano tym razem wykorzystując metodę "pierwszej harmonicznej", a zmiany parametrów obciążenia pod wpływem temperatury opisano stosując do obliczenia procesu nagrzewania wsadu metodę linearyzacji odcinkowej tego procesu opartą na przekształceniu Hankela. Wybrane wyniki badań laboratoryjnych przedstawiono w rozdziale 9. Rozdział 10. zawiera podsumowanie i wnioski ogólne z pracy.

Przedstawione w pracy wyniki obliczeń wykonanych dla poszczególnych metod stanowią jedynie ilustrację najciekawszych, potencjalnych możliwości każdej z nich, a nie próbę analizy procesu nagrzewania, która wykracza poza zakres niniejszej pracy. Rozważania w pracy ograniczono głównie do nagrzewania skrośnego rur przed obróbką plastyczną.

W pracy pominięto prawie całkowicie problemy związane z numeryczną realizacją poszczególnych modeli, a w szczególności istotne zagadnienia stabilności, poprawności i dokładności numerycznej stosowanych metod. Przyjęto, że stronę teoretyczną tych zagadnień, przynajmniej w zastosowaniach liniowych, Czytelnik może znaleźć w obszernej literaturze [22,98, 110,111,149,164].

Niniejsza praca jest wynikiem prac własnych autora prowadzonych w latach 1980-85 w ramach Podproblemu Węzłowego 05.5A pt. "Wybrane podstawowe badania w dziedzinie elektrotechniki", a następnie kontynuowanych w latach 1986-90 w ramach RPBR 02.7 pt. "Analiza i synteza pola elektromagnetycznego".

#### 4. OPIS MATEMATYCZNY ZJAWISK ELEKTROMAGNETYCZNYCH I TERMOKINETYCZNYCH W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH

##### 4.1. OPIS MATEMATYCZNY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

##### 4.1.1. RÓWNANIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Zjawiska elektromagnetyczne w nagrzewnicach indukcyjnych opisane są równaniami Maxwella, które dla środowiska nieruchomego przybierają postać [18, 25, 65, 91, 114, 160, 161]:

$$\operatorname{rot} H = J, \quad (4.1a)$$

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.1b)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (4.1c)$$

$$\operatorname{div} D = \rho_w, \quad (4.1d)$$

$$\text{gdzie } J = \gamma E + \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \rho + J_o + \nabla \rho_w. \quad (4.1e)$$

Przyjmijmy dodatkowe związki:

$$B = \mu H, \quad (4.1f)$$

$$D = \epsilon E. \quad (4.1g)$$

W zależności od właściwości stosowanych materiałów wielkości  $\mu, \epsilon, \gamma$  mogą być albo wielkościami skalarnymi, jak w przypadku materiałów izotropowych albo tensorami pozwalającymi uwzględnić anizotropię.

Przekształcając odpowiednio powyższe równania oraz przyjmując dodatkowe założenia o przebiegu zjawisk lub założenia dotyczące rozpatrywanego środowiska można uzyskać cały szereg modeli zjawisk elektromagnetycznych. Poniżej zostaną przedstawione tylko te modele, które są najczęściej stosowane przy badaniu nagrzewnic indukcyjnych.

Już teraz poczyńmy pewne założenia, które wraz z założeniami z p.4.4. obowiązywać będą w całej pracy:

- środowiska są izotropowe;
- nie ma prądu konwekcji ( $\nabla \rho = 0$ );

- nie ma ładunków objętościowych ( $\rho_w=0$ );
- pole jest wolnozmiennie, co pozwala pominąć prądy przesunięcia;
- potencjał skalarny nie zależy od czasu;
- prądy wirowe nie występują w źródle prądu.

#### 4.1.2. MODELE WYKORZYSTUJĄCE MAGNETYCZNY POTENCJAŁ WEKTOROWY A

##### 4.1.2.1. Model nieliniowy

Wprowadzając potencjał wektorowy A określony znaną zależnością:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} , \quad (4.2)$$

korzystając z II równania Maxwella:

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi , \quad (4.3)$$

$$\text{oraz przyjmując skalowanie Coulomba } \text{div}\mathbf{A}=0 , \quad (4.4)$$

po odpowiednim przekształceniu równań (4.1) można otrzymać:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}\mathbf{A}\right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \text{grad}\phi = \mathbf{J}_0 . \quad (4.5)$$

Równanie to jest wspólne dla obszarów z prądami wirowymi i obszarów źródłowych. Przyjęcie dodatkowych założeń prowadzi do różnych modeli uzyskiwanych z równania (4.5).

##### 4.1.2.2. Model liniowy

Model ten uzyskuje się z modelu (4.5) przy założeniu, że  $\mu=\text{const}$ :

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \text{grad}\phi = \mathbf{J}_0 . \quad (4.6)$$

##### 4.1.2.3. Model harmoniczny

Zakładając, że wszystkie wielkości elektromagnetyczne zmieniają się harmonicznie w czasie, można zapisać równanie (4.5) w postaci:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}\mathbf{A}_m\right) + j\omega\gamma\mathbf{A}_m + \gamma \text{grad}\phi = \mathbf{J}_{0_m} . \quad (4.7)$$

##### 4.1.2.4. Model dwuwymiarowy

W przypadkach obiektów dostatecznie długich lub posiadających symetrię obrotową, prądy są skierowane zazwyczaj prostopadle do rozpatrywanej płaszczyzny. Wtedy A ma tylko jedną składową też prostopadłą do tej płaszczyzny i warunek  $\text{div}\mathbf{A}=0$  jest zawsze spełniony. Wtedy model (4.5) ma

postać np.

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}_z\right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} + \gamma \operatorname{grad} \Phi = \mathbf{J}_0 \quad (4.8)$$

i zawiera tylko jedną niewiadomą  $\mathbf{A}_z$ . Zastosowanie opisu wykorzystującego  $\mathbf{A}$  do pól dwuwymiarowych przekształca zagadnienie wektorowe w odpowiadające mu zagadnienie skalarne.

#### 4.1.2.5. Model dla ciał znajdujących się w ruchu

Gdy środowisko przewodzące porusza się w polu magnetycznym, powstaje dodatkowe pole elektryczne rotacji określone wyrażeniem  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ . Jeżeli prędkość środowiska  $V \ll c$ , to pole elektryczne rotacji sumuje się z polem elektrycznym transformacji i polem źródeł obcych. Równanie (4.5) przybiera wtedy postać:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}\right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \gamma \operatorname{grad} \Phi = \mathbf{J}_0 \quad (4.9)$$

#### 4.1.3. MODEL WYRAŻONY PRZEZ NATEŻENIE POLA MAGNETYCZNEGO $\mathbf{H}$

Model ten stosowany przy analizie ciał przewodzących umieszczonych w znanym zewnętrznym polu magnetycznym:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\gamma \mu_d \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} (\operatorname{grad} \gamma) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (4.10)$$

które można zapisać w postaci:

$$\Delta \mathbf{H} = \gamma \mu_d \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{\gamma} (\operatorname{grad} \gamma) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \operatorname{grad}(\mathbf{H} \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \mu) \quad (4.11)$$

W przypadku ciał niemagnetycznych lub magnetycznych liniowych o stałej konduktywności  $\gamma$  równanie (4.12) redukuje się do znacznie prostszej postaci:

$$\Delta \mathbf{H} = \gamma \mu_d \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.12)$$

#### 4.1.4. WARUNKI GRANICZNE DLA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Warunki graniczne dla równania (4.5) mogą przyjmować następujące postaci:

- Warunek początkowy

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{A}_p(x, y, z, t_p) \quad (4.13)$$

- Warunek pierwszego rodzaju (Dirichleta)

$$A(x, y, z, t) = A_S(x_S, y_S, z_S, t) . \quad (4.14)$$

Zazwyczaj przyjmowany jest on jako warunek jednorodny ( $A_S=0$ ) i wynika najczęściej z symetrii zagadnienia objawiającej się znikaniem składowej normalnej wektora natężenia pola magnetycznego lub jest przyjmowany na wprowadzonej granicy oddzielającej obszar rozpatrywany od zewnętrznego obszaru nieograniczonego.

- Warunek brzegowy drugiego rodzaju (Neumana)

$$\nu \left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_S = H_t . \quad (4.15)$$

Określa on składową styczną wektora natężenia pola magnetycznego na brzegu S obszaru. Wynika najczęściej z symetrii obszaru, obecności idealnych ferromagnetyków, prawa przepływu, odcięcia obszaru nieograniczonego.

- Warunek trzeciego rodzaju (Hankela)

Jest on stosowany w zagadnieniach quasi-stacjonarnych. Wymaga znajomości tzw. impedancji kwadratu jednostkowego  $Z_0 = E_t / H_t$ , która powinna być obliczona drogą jednoczesnego rozwiązania równań dla nagrzewanego wsadu (zadanie wewnętrzne) i na jego zewnątrz (zadanie zewnętrzne). W wielu przypadkach, np. dla wsadu niemagnetycznego, ferromagnetycznego z silnym efektem powierzchniowym, wsadu dwuwarstwowego, a czasami również przy słabym efekcie powierzchniowym,  $Z_0$  można obliczyć z dużą dokładnością rozwiązując tylko zadanie zewnętrzne.

- Warunki brzegowe przy niejednorodnościach materiałowych

W przypadku niejednorodności materiałowych na granicach obszarów konieczne jest zachowanie ciągłości odpowiednich składowych pola elektromagnetycznego [25, 65, 91, 114].

## 4.2. OPIS MATEMATYCZNY POLA TEMPERATURY

### 4.2.1. RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPŁA

Niustalony rozkład temperatury w nieruchomych ciałach stałych może być opisany równaniem przewodnictwa ciepła Fouriera-Kirchhoffa [13, 34, 44, 77]:

$$\gamma_m c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(-\lambda \text{grad} T) = w_0 . \quad (4.16)$$



W przypadku gdy ciało porusza się z prędkością  $V$ , to występuje jednocześnie zjawisko przewodzenia i konwekcji ciepła i równanie (4.17) przyjmuje postać:

$$\gamma_m c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) + \gamma_m c V \operatorname{grad} T = w_o \quad (4.17)$$

#### 4.2.2. WARUNKI GRANICZNE DLA POLA TEMPERATURY

Warunki graniczne dla równania (4.17) mogą przyjmować następujące postaci:

- Warunek początkowy.

$$T(x, y, z, t) = T_p(x, y, z, t_p) \quad (4.18)$$

Zazwyczaj początkowy rozkład temperatury przyjmujemy jako jednorodny; może on jednak mieć charakter złożony, np. w nagrzewnicach wielosekcyjnych, przy nagrzewaniu po piecu płomieniowym.

- Warunek brzegowy pierwszego rodzaju (Dirichleta).

$$T(x, y, z, t) = T_S(x_S, y_S, z_S, t) \quad (4.19)$$

Wymaga znajomości rozkładu temperatury  $T_S$  na brzegu  $S$  ograniczającym analizowany element  $A$  układu termokinetycznego. Stosowany jest przy stabilizacji temperatury wsadu we wzbudniku i przy nagrzewaniu programowym w obróbce cieplnej.

- Warunek brzegowy drugiego rodzaju (Neumana).

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = -q(t) \quad (4.20)$$

Wymaga znajomości rozkładu gęstości strumienia ciepła na brzegu  $S$  ograniczającym analizowany element  $A$  układu termokinetycznego. Szczególna postać tego warunku  $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0$  jest stosowana na osiach i płaszczyznach symetrii nagrzewnic i na powierzchniach dobrze izolowanych.

- Warunek brzegowy trzeciego rodzaju.

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = -\alpha_c (T - T_a) \quad (4.21)$$

Dotyczy on ciał zanurzonych w płynie. Może opisywać złożoną wymianę ciepła przez promieniowanie i konwekcję. Jest najczęściej stosowany.

- Warunek brzegowy czwartego rodzaju.

$$\lambda_A \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_A} = -\lambda_B \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_B} ; T_A = T_B \quad (4.22)$$

Występuje na granicy idealnego styku dwóch ciał stałych A i B, gdy przewodzenie ciepła między tymi ciałami jest opisane prawem Fouriera.

Zależności umożliwiające obliczenie strat ciepła w nagrzewnicy zawarto w Aneksie A1, a omówienie obrazu fizycznego powstawania strat zawiera praca [100].

#### 4.3. OPIS STAŁYCH MATERIAŁOWYCH

Równania (4.5) i (4.17) opisujące sprzężone pole elektromagnetyczne i temperaturowe w nagrzewnicach indukcyjnych są silnie nieliniowe. Nieliniowość spowodowana jest zależnością współczynników materiałowych wsadu od temperatury, tj. przewodności cieplnej właściwej  $\lambda(T)$ , ciepła właściwego  $c(T)$ , gęstości masy  $\gamma_m(T)$ , rezystywności  $\sigma(T)$ , a w przypadku ferromagnetyków dodatkowo jeszcze zależnością przenikalności magnetycznej  $\mu$  od natężenia pola magnetycznego, tj.  $\mu(H, T)$ . Duże programy CAD wyposażane są w banki danych materiałowych; przykładowa organizacja takiego banku opisana jest w pracy [18]. Dokładność podawanych w literaturze danych jest zazwyczaj rzędu 3...5%, ale ich rozrzut technologiczny może być, np. w przypadku właściwości magnetycznych, bardzo duży rzędu 20...30%. Ponieważ dostępność i kompletność danych materiałowych w warunkach krajowych jest niewystarczająca, celowe wydaje się być przedstawienie w Aneksie A2. pewnych aproksymacji uniwersalnych dla różnych gatunków stali.

#### 4.4. ZAŁOŻENIA DODATKOWE OBOWIĄZUJĄCE W CAŁEJ PRACY

W tym punkcie zostaną podane założenia ogólne, które będą obowiązywać w całej pracy, o ile nie zostanie to inaczej zaznaczone. Część tych założeń została już wprowadzona w p.4.1. A oto dalsze:

- rzeczywisty kształt ciał zastępuje się bryłami geometrycznymi o pełnej symetrii względem współrzędnej walcowej  $\theta$ ;
- wymiary liniowe ciał są stałe w czasie;

- pomija się polowe zjawiska elektromagnetyczne we wzбудniku, zastępując go folią o grubości pomijalnie małej, przy zachowaniu takiego samego układu prądowego; przyjęto, że zjawiska te są dostatecznie dobrze opisane za pomocą metod liniowych [86, 97, 106, 146];
- przy analizie zjawisk termokinetycznych pomija się wpływ uzwojeń wzбудnika;
- pomija się pętlę histerezy przyjmując do obliczeń jednoznaczny krzywą magnesowania; oszacowanie błędu wynikającego z tego założenia na podstawie teorii Nejmana zawiera praca [117].

## 5. OBLICZANIE POLA TEMPERATURY METODĄ ANALITYCZNA

### 5.1. WSTĘP

Poniżej zostanie przedstawiony sposób linearyzacji odcinkowej procesu nagrzewania, który pozwala stosować metody obliczania liniowych pól temperatury do procesu tak mocno nieliniowego, jakim jest nagrzewanie indukcyjne. Pokazane zostanie również zastosowanie przekształcenia Hankela do rozwiązania jednowymiarowego równania przewodnictwa cieplnego, co umożliwi obliczenie pola temperatury w rurze nieskończenie długiej od dowolnej grubości ścianki.

### 5.2. LINEARYZACJA ODCINKOWA PROCESU NAGRZEWANIA

Rozważmy przypadek nagrzewania indukcyjnego rury stalowej o dowolnej grubości ścianki (patrz rys.7.1).

Przyjmijmy następujące założenia:

- właściwości materiału rury są liniowe;
- wzbudnik i rura są nieskończenie długie i nie poruszają się;
- wpływ wymurówki cieplnej na pole temperatury jest pomijalny;
- znany jest rozkład wewnętrznych źródeł ciepła.

Dzieląc cały proces nagrzewania na przedziały, w których cieplne współczynniki materiałowe rury są przyjmowane jako stałe, równanie przewodnictwa ciepła staje się równaniem liniowym i może być rozwiązywane metodami właściwymi zagadnieniom liniowym. Pole temperatury w rurze może być przy przyjętych założeniach opisane liniowym równaniem Fouriera - Kirchhoffa:

$$\gamma_m c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] = w_o(r, t), \quad (5.1)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2.$$

Równanie to po wprowadzeniu liczb kryterialnych i jednostek bezwymiarowych (patrz wykaz oznaczeń), może być przedstawione w postaci wygodniejszej do dalszych rozważań:

$$\frac{\partial \theta(\beta, F_0)}{\partial F_0} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \beta \frac{\partial \theta(\beta, F_0)}{\partial \beta} \right] = Ki(F_0)w(\beta), \quad (5.2)$$

$$\xi \leq \beta \leq 1.$$

Warunki graniczne dla równania (5.2) są przyjmowane w postaci:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -Bi\theta \quad |_{\beta=1}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0 \quad |_{\beta=\xi}, \quad (5.4)$$

$$\theta(\beta, 0) = 0. \quad (5.5)$$

W przypadku gdy moc powierzchniowa jest stała w procesie nagrzewania, t.j.  $Ki(t) = Ki$ , rozwiązanie (5.2) może być przedstawione w postaci [100]:

$$\theta(\beta, F_0) = Ki\varphi(\alpha, \beta, F_0, Bi). \quad (5.6)$$

Gdy moc ta zmienia się w czasie nagrzewania, rozwiązanie może być zapisane za pomocą całki Duhamela [34, 100]:

$$\theta(\beta, F_0) = Ki(0)\varphi(F_0) + \int_0^{F_0} Ki'(\eta)\varphi(F_0 - \eta)d\eta, \quad (5.7)$$

gdzie  $\varphi(F_0)$  jest charakterystyką przejścia układu będącą odpowiedzią układu na nagrzewanie z jednostkową mocą powierzchniową  $Ki=1(F_0)$ , a

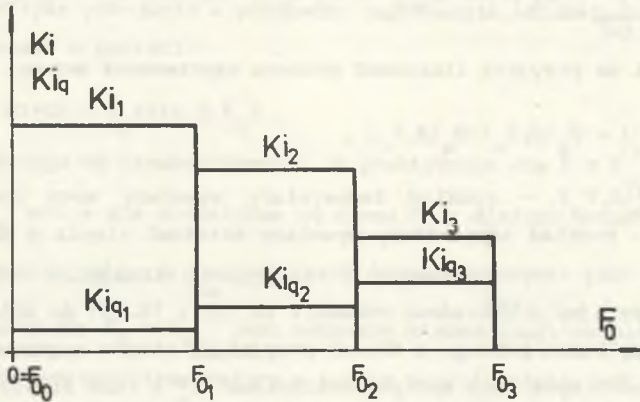
$$Ki'(F_0) = \frac{\partial Ki(F_0)}{\partial F_0}. \quad (5.8)$$

Rozważmy bliżej przypadek, gdy zmiana mocy nagrzewania daje się aproksymować funkcją schodkową (rys. 5.1) [100]:

$$Ki(F_0) = Ki_1 \left[ 1(F_0) - 1(F_0 - F_{0_1}) \right] + Ki_2 \left[ 1(F_0 - F_{0_1}) - 1(F_0 - F_{0_2}) \right] + \dots + \\ + Ki_N \left[ 1(F_0 - F_{0_{N-1}}) - 1(F_0 - F_{0_N}) \right]. \quad (5.9)$$

Zgodnie ze wzorem (5.8) pochodną (5.9) można zapisać jako:

$$Kl'(F_o) = Kl_1 [\delta(F_o) - \delta(F_o - F_{o_1})] + Kl_2 [\delta(F_o - F_{o_1}) - \delta(F_o - F_{o_2})] + \dots + Kl_N [\delta(F_o - F_{o_{N-1}}) - \delta(F_o - F_{o_N})] \quad (5.10)$$



Rys.5.1. Aproksymacja schodkowa mocy nagrzewania  $K_i$  i strat ciepła  $K_{i,q}$   
 Fig.5.1. Step approximation of the heating power  $K_i$  and heat losses  $K_{i,q}$

Wykorzystując własności funkcji delta:

$$\int_0^{F_o} f(\eta) \delta(\eta - F_{o_N}) d\eta = f(F_{o_N}) 1(F_o - F_{o_N}) \quad (5.11)$$

i biorąc pod uwagę wzory (5.8) i (5.9), można po przegrupowaniu wyrazów otrzymać:

$$\begin{aligned} \Theta(F_o) = & Kl_1 \varphi(F_o) 1(F_o) + (Kl_2 - Kl_1) \varphi(F_o - F_{o_1}) 1(F_o - F_{o_1}) + \\ & + (Kl_3 - Kl_2) \varphi(F_o - F_{o_2}) 1(F_o - F_{o_2}) + \dots + (Kl_N - Kl_{N-1}) \varphi(F_o - F_{o_{N-1}}) \\ & 1(F_o - F_{o_{N-1}}) - Kl_N \varphi(F_o - F_{o_N}) 1(F_o - F_{o_N}) = \sum_{n=0}^{N-1} (Kl_{n+1} - Kl_n) \varphi(F_o - F_{o_n}) \\ & 1(F_o - F_{o_n}), \quad Kl_o = F_o = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Jeżeli każdej zmianie mocy powierzchniowej odpowiada różna charakterystyka przejścia  $\varphi_n(\alpha, \beta, F_o, Bi_n)$ , to powtórnie przegrupowując wyrazy w szeregu (5.12) można otrzymać:

$$\Theta(F_o) = \sum_{n=1}^N Ki_n \left[ \varphi_n(F_o - F_{o_{n-1}}) 1(F_o - F_{o_{n-1}}) - \varphi_n(F_o - F_{o_n}) 1(F_o - F_{o_n}) \right]. \quad (5.13)$$

Z uwagi na przyjętą liniowość procesu nagrzewania możemy zapisać, że:

$$\Theta(\beta, F_o) = \Theta_p(\beta, F_o) - \Theta_q(\beta, F_o), \quad (5.14)$$

gdzie:  $\Theta_p(\beta, F_o)$  - rozkład temperatury wywołany mocą nagrzewania  $p_o$ ;  
 $\Theta_q(\beta, F_o)$  - rozkład temperatury wywołany stratami ciepła z zewnętrznej powierzchni rury reprezentowanymi przez gęstość strumienia ciepłego  $q$ .

Wykorzystajmy przykładowo równania (5.13) i (5.14) do obliczenia temperatury przy końcu każdego z trzech przyjętych etapów nagrzewania, jeżeli w każdym z nich była inna moc powierzchniowa  $Ki_n$  i inne straty ciepła  $Ki_{q_n}$ :

$$F_{o_1}: \quad \Theta_1(F_{o_1}) = Ki_1 \varphi(F_{o_1}) - Ki_{q_1} \varphi_o(F_{o_1}),$$

$$F_{o_2}: \quad \Theta_2(F_{o_2}) = Ki_2 \left[ \varphi_1(F_{o_2}) - \varphi_1(F_{o_2} - F_{o_1}) \right] + Ki_2 \varphi_2(F_{o_2} - F_{o_1}) - \\ - Ki_{q_1} \left[ \varphi_o(F_{o_2}) - \varphi_o(F_{o_2} - F_{o_1}) \right] + Ki_{q_2} \varphi_o(F_{o_2} - F_{o_1}),$$

$$F_{o_3}: \quad \Theta_3(F_{o_3}) = Ki_1 \left[ \varphi_1(F_{o_3}) - \varphi_1(F_{o_3} - F_{o_1}) \right] + Ki_2 \left[ \varphi_2(F_{o_3} - F_{o_1}) - \right. \\ \left. - \varphi_2(F_{o_3} - F_{o_2}) \right] + Ki_3 \varphi_3(F_{o_3} - F_{o_2}) - Ki_{q_1} \left[ \varphi_o(F_{o_3}) - \varphi_o(F_{o_3} - F_{o_1}) \right] - \\ - Ki_{q_2} \left[ \varphi_o(F_{o_3}) - \varphi_o(F_{o_3} - F_{o_2}) \right] + Ki_{q_3} \varphi_o(F_{o_3} - F_{o_2}), \quad (5.15)$$

gdzie  $\varphi_o$  jest charakterystyką przejścia przy nagrzewaniu zewnętrznym strumieniem ciepła o gęstości  $q$ .

Zazwyczaj proces nagrzewania skrośnego jest dzielony na 3 etapy, w których przyjmuje się uśrednione wartości  $Ki, Ki_{q_1}, \lambda, c, \gamma_m$ . Sposób przyjmowania tych wartości jest opisany w pracach [100, 146].

### 5.3. OBLICZANIE STANU QUASI-USTALONEGO

Rozpatrzmy teraz problem obliczania pola temperatury w każdym przedziale, na który podzielono cały proces nagrzewania.

Charakterystykę przejścia w przypadku nagrzewania adiabatycznego ( $Bi=0$ ) można przedstawić w postaci:

$$\varphi(\alpha, \beta, F_0, Bi=0) = F_0 + S(\alpha, \beta, F_0) \quad (5.16)$$

Dla  $F_0$  dążącego do nieskończoności, a praktycznie dla  $F \geq F_{0_{kw}}$  suma szeregu  $S(\alpha, \beta, F_0)$  staje się niezależna od czasu  $F_0$  i dlatego można zapisać:

$$S(\alpha, \beta, F_0) = S(\alpha, \beta, \infty) = S_{kw}(\alpha, \beta), \quad F \geq F_{0_{kw}} \quad (5.17)$$

Stan nagrzewania dla  $F_0 \geq F_{0_{kw}}$  jest nazywany stanem quasi-ustalonym. W tym stanie szybkość wzrostu temperatury w każdym punkcie ciała jest taka sama. Równanie (5.6) może być za pomocą wzorów (5.16) i (5.17) zapisane dla stanu quasi-ustalonego w postaci:

$$\Theta(\beta, F_0) = Ki \varphi_{kw}(\alpha, \beta, F_0), \quad F_0 \geq F_{0_{kw}} \quad (5.18)$$

gdzie:

$$\varphi_{kw}(\alpha, \beta, F_0) = F_0 + S_{kw}(\alpha, \beta) \quad (5.19)$$

Tak więc ze wzorów (5.18) i (5.19) można otrzymać:

$$\frac{\partial \Theta(F_0)}{\partial F_0} = Ki \quad (5.20)$$

Można zauważyć, że w stanie quasiustalonym rozkład temperatury można otrzymać z równania (5.2) zapisanego w postaci:

$$Ki - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \beta \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} \right) = Ki w(\beta) \quad (5.21)$$

Można przewidzieć, że przebieg temperatury musi posiadać dwie składowe - opisaną powyżej składową quasi-ustaloną i składową nieustaloną:

$$\Theta(\beta, F_0) = Ki \left[ \varphi_{kw}(\alpha, \beta, F_0) - \varphi_T(\alpha, \beta, F_0) \right] \quad (5.22)$$

Jak widać z równania (5.19), składowa  $\varphi_{kw}$  jest liniową funkcją czasu i dlatego funkcja  $\varphi_T$  musi zawierać składniki, które zależą od czasu w sposób nieliniowy.



Wyróżnienie w równaniu (5.22) części, która jest liniową funkcją czasu, a więc opisuje stan quasi-ustalony, jest bardzo wygodne w obliczeniach, ponieważ umożliwia znalezienie sumy szeregu  $\varphi_{kw}$  w postaci skończonej- $\varphi_{kw}$  musi być rozwiązaniem równania (5.21), które opisuje stan quasi-ustalony. Równanie to może być łatwo rozwiązane przez dwukrotne scałkowanie, a stałe całkowania mogą być wyznaczone z następujących warunków:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \varphi(\xi, F_0) = 0, \quad (5.23a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \varphi(1, F_0) = 0, \quad (5.23b)$$

$$2 \cdot \int_{\xi}^1 \varphi_{kw}(\beta) \beta d\beta = F_0. \quad (5.23c)$$

W przypadku nagrzewania zewnętrznym strumieniem ciepła charakterystyka przejścia  $\varphi_0$  może być zapisana w postaci:

$$\varphi_0(\beta, F_0) = F_0 + S_0(\beta, F_0). \quad (5.24)$$

i może być uzyskana z zależności na  $\varphi(\alpha, \beta, F_0)$  dla  $\alpha$  dążącego do 0. Chcąc uwzględnić straty ciepła należy posłużyć się zależnością (5.14).

Przedstawione powyżej rozważania mogą być łatwo uogólnione na większą liczbę zmiennych przestrzennych również w innych układach współrzędnych.

#### 5.4. ZASTOSOWANIE PRZEKSZTAŁCENIA HANKELA

Zastosowanie odpowiedniego przekształcenia całkowego, jak to zostanie pokazane na przykładzie przekształcenia Hankela, pozwala przekształcić równanie różniczkowe cząstkowe w równanie różniczkowe zwyczajne względem czasu. Przekształcenie Hankela pojawia się w sposób naturalny w różnych problemach w cylindrycznym układzie współrzędnych, pomimo że inne przekształcenia całkowe są również wtedy stosowane [13, 44, 77, 100].

Przekształcenie Hankela definiowane jest za pomocą pary zależności:

$$H \left[ f(\beta, F_0) \right] = f_H(\mu, F_0) = \int_{\xi}^1 \beta f(\beta, F_0) M_0(\mu_k \beta) d\beta, \quad (5.25)$$

$$H^{-1} \left[ f_H(\mu, F_0) \right] = f(\beta, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_H(\mu_k, F_0) M_0(\mu_k \beta)}{\int_{\xi}^1 M_0^2(\mu_k \beta) \beta d\beta} \quad (5.26)$$

Ogólną teorię przekształcenia Hankela można znaleźć w pracach [5, 24, 155]. Dla przemiany adiabatycznej jądro tego przekształcenia ma postać [117, 21]:

$$M_0(\mu_k \beta) = \frac{\Pi}{2} \left[ \frac{Y_1(\mu_k)}{J_1(\mu_k \xi)} J_0(\mu_k \beta) - Y_0(\mu_k \beta) \right], \quad (5.27)$$

gdzie  $J_0, J_1, Y_0, Y_1$  są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, a wartości  $\mu_k$  są dodatnimi pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$J_1(\mu) Y_1(\mu \xi) - J_1(\mu \xi) Y_1(\mu) = 0. \quad (5.28)$$

Obliczając transformatę Hankela z równania (5.2) z uwagi na  $\beta$  i zakładając dodatkowo, że  $p_0$  nie zależy od czasu, otrzymujemy równanie:

$$\frac{d\Theta_H(\mu_k, F_0)}{dF_0} + \mu_k^2 \Theta_H(\mu_k, F_0) = Ki w_H(\mu_k), \quad (5.29)$$

którego rozwiązaniem jest:

$$\Theta_H(\mu_k, F_0) = Ki \frac{w_H(\mu_k)}{\mu_k^2} \left[ 1 - \exp\left(-\mu_k^2 F_0\right) \right], \quad (5.30)$$

gdzie:

$$w_H(\mu_k) = \int_{\xi}^1 w(\beta) \beta M_0(\mu_k \beta) d\beta. \quad (5.31)$$

$\Theta_H(\mu_k, F_0)$  i  $w_H(\mu_k)$  są odpowiednio transformatami z jądrem  $M_0$  temperatury  $\Theta(\beta, F_0)$  i wewnętrznych źródeł ciepła  $w(\beta)$ . Wykorzystując zależność (5.26) na odwrotne przekształcenie Hankela, temperatura  $\Theta(\beta, F_0)$  może być obliczona z zależności [117, 121]:

$$\Theta(\beta, F_0) = Ki \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_H(\mu_k) M_0(\mu_k \beta)}{\mu_k^2 \int_{\xi}^1 M_0^2(\mu_k \beta) \beta d\beta} \left[ 1 - \exp\left(-\mu_k^2 F_0\right) \right]. \quad (5.32)$$

Szereg w zależności (5.22) jest bardzo wolno zbieżny z powodu obecności

czynnika  $(1-e^{-x})$ . W celu poprawienia zbieżności przedstawmy zależność (5.22) jako sumę dwóch szeregów, co pozwoli nam zapisać charakterystykę przejścia w postaci:

$$\varphi(\alpha, \beta, F_0) = F_0 + S(\alpha, \beta, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_H(\mu_k) M_0(\mu_k \beta)}{\mu_k^2 \int_{\xi}^1 M_0^2(\mu_k \beta) \beta d\beta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_H(\mu_k) M_0(\mu_k \beta)}{\mu_k^2 \int_{\xi}^1 M_0^2(\mu_k \beta) \beta d\beta} \cdot \exp\left(-\mu_k^2 F_0\right). \quad (5.33)$$

Porównując tę postać z równaniem (5.22), można zauważyć, że:

$$\varphi_{kW}(\alpha, \beta, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_H(\mu_k) M_0(\mu_k \beta)}{\mu_k^2 \int_{\xi}^1 M_0^2(\mu_k \beta) \beta d\beta}, \quad (5.34)$$

$$\varphi_T(\alpha, \beta, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_H(\mu_k) M_0(\mu_k \beta)}{\mu_k^2 \int_{\xi}^1 M_0^2(\mu_k \beta) \beta d\beta} \cdot \exp\left(-\mu_k^2 F_0\right). \quad (5.35)$$

Przedstawione zależności, jak to zostanie pokazane, mogą znaleźć szerokie zastosowanie w obliczeniach praktyki inżynierskiej. Wymaga to przyjęcia funkcji opisującej rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w rurze nagrzewanej indukcyjnie. Ogólnie funkcja ta może mieć postać:

$$w_0(\alpha, \beta, F_0) = \frac{p_0(F_0)}{r_2} w(\alpha, \beta). \quad (5.36)$$

Funkcja  $w_0$  jest określona, gdy znany jest rozkład pola elektromagnetycznego. Przy przyjętych założeniach i gdy moc powierzchniowa  $p_0$  nie zależy od czasu, rozkład wewnętrznych źródeł ciepła może być opisany zależnością (patrz Aneks A3):

$$w(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2} p_0 \left[ A^2 + B^2 \right]_{01}}{\Delta_2 \left[ AC + BC \right]_{21}}, \quad p_0 \neq f(F_0). \quad (5.37)$$

Obliczając wartość szeregu  $\varphi_{kW}$  danego zależnością (5.34), gdy wewnętrzne

źródła ciepła opisane są zależnością (5.37), rozkład temperatury może być obliczony wykorzystując (5.22):

$$\Theta(\beta, F_0) = \text{Ki} \left[ \varphi_{\text{kw}}(\alpha, \beta, F_0) - \varphi_{\text{T}}(\alpha, \beta, F_0) \right], \quad (5.38)$$

gdzie teraz:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{kw}}(\alpha, \beta, F_0) = & \frac{2\eta_{\text{T}}}{1-\xi^2} F_0 + \frac{\eta_{\text{T}}}{1-\xi^2} \left[ \frac{1}{2} \beta^2 - \xi^2 \left( \ln\beta + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \ln\xi + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{4} \right] + \\ & + \frac{[BC-AD]_{21} - \xi[BC-AD]_{11}}{(m_2^2 - m_1^2)[AC+BD]_{21}} - \frac{[C^2+D^2]_{01}}{2m_2[AC+BD]_{21}}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{T}}(\alpha, \beta, F_0) = & \Pi \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_1^2(\mu_k) J_1^2(\mu_k \beta)}{\mu_k J_1(\mu_k \xi) - J_1(\mu_k)} M_0(\mu_k \xi) \left[ (1-\eta_{\text{T}}) + w_{\text{H}}(\mu_k) \right] \cdot \right. \\ & \left. \cdot \exp\left(-\mu_k^2 F_0\right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$w_{\text{H}}(\mu_k) = \frac{m_2}{[AC+BD]_{21}} \frac{\Pi}{2} \int_{\xi}^1 \left[ A^2(\beta) + B^2(\beta) \right]_{01} M_0(\mu_k \beta) \beta d\beta, \quad (5.41)$$

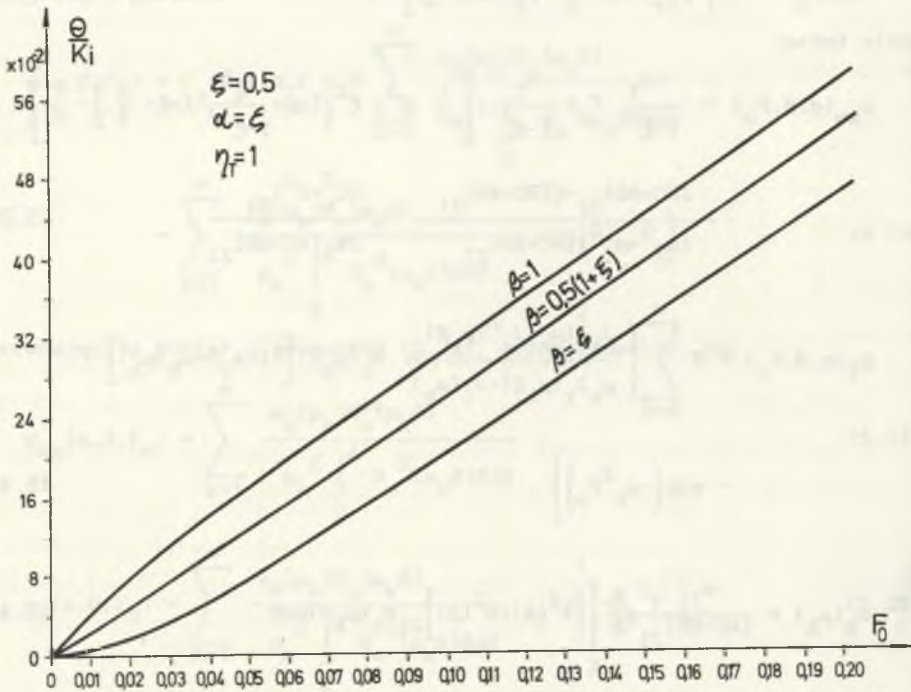
a  $\eta_{\text{T}}$  jest sprawnością cieplną procesu.

Wyrażenia (5.37)...(5.41) pozwalają obliczyć rozkład temperatury w ścianie rury o dowolnej grubości ścianki w dowolnej chwili czasu.

Na rys. 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 pokazano wybrane wyniki obliczeń temperatury w ścianie rury [117, 121]. Można zauważyć, że błędy wynikające z niedokładnego oszacowania strat ciepła z nagrzewnicy ( $\eta_{\text{T}}$ ) mogą być bardzo duże.

Obliczenia były wykonywane dla trzech pierwszych pierwiastków równania charakterystycznego (5.28). Zazwyczaj nie ma potrzeby brania pod uwagę tak wielu pierwiastków. W pracy [129] pokazano, że dla najbardziej niesprzyjającego przypadku rury grubościenniej ( $\xi=0,6$ ) i dla czasu  $F_0=0,01$ , który odpowiada 10% czasu całego procesu przejściowego, błąd w obliczeniach temperatury spowodowany uwzględnieniem w obliczeniach składowej przejściowej tylko pierwszego pierwiastka, jest mniejszy niż 5%.

Pierwsze pierwiastki równania (5.28) obliczone numerycznie dla różnych grubości ścianki rury ( $\xi$ ) podane są w tabeli 5.1.



Rys. 5.2. Wzrost temperatury w różnych punktach ścianki rury do czasu osiągnięcia stanu quasi-ustalonego

Fig. 5.2. Rise of temperature in different points of the pipe wall till the time of the steady-state has been reached

Duże wartości tego pierwiastka, nawet dla rur cienkościennych, wskazują że wpływ stanu przejściowego może być zazwyczaj pominięty. Kolejne pierwiastki mogą być również obliczane z poniższej zależności [99]:

$$\mu_k = \frac{k\pi}{1-\xi} \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (5.42)$$

Gdy stosuje się tę przybliżoną zależność dla  $k=1$  i  $\xi=0,3$  błąd w określeniu  $\mu_k$  jest mniejszy niż 5%, a dla większych wartości  $\xi$  błąd ten maleje gwałtownie i dla  $\xi=0,95$  wynosi 0,003% [129].

Tabela 5.1

Pierwsze pierwiastki równania charakterystycznego (5.28)

$$J_1(\mu)Y_1(\mu\xi) - J_1(\mu\xi)Y_1(\mu) = 0$$

$\xi=0,30$	$\mu_1=4,7054571$	$\xi=0,65$	$\mu_1=9,0379143$
$\xi=0,35$	$\mu_1=5,0162769$	$\xi=0,70$	$\mu_1=10,521667$
$\xi=0,40$	$\mu_1=5,3904333$	$\xi=0,75$	$\mu_1=12,605000$
$\xi=0,45$	$\mu_1=5,8425182$	$\xi=0,80$	$\mu_1=15,737500$
$\xi=0,50$	$\mu_1=6,3931000$	$\xi=0,85$	$\mu_1=20,963333$
$\xi=0,55$	$\mu_1=7,0731111$	$\xi=0,90$	$\mu_1=31,425000$
$\xi=0,60$	$\mu_1=7,9297500$	$\xi=0,95$	$\mu_1=62,830001$

Gdy czas nagrzewania jest większy niż  $0,8(1-\xi)^2$ , składowa przejściowa może być pominięta, ponieważ dla tych wartości  $F_0$  funkcja exponencjalna  $\exp(-\mu_k^2 F_0)$  maleje gwałtownie do 0 (ponieważ  $\mu_k^2 F_0 \geq 8$ ). Na rys.5.6. pokazano zależność pomiędzy czasem osiągnięcia stanu quasi-ustalonego a grubością ścianki rury.

Możliwość pominięcia stanu nieustalonego pozwala na uzyskanie wielu interesujących informacji o procesie nagrzewania korzystając tylko z zależności (5.18) zamiast z znacznie bardziej złożonej zależności (5.38). I tak dla stanu quasi-ustalonego można obliczyć [99,122]:

- różnicę temperatur pomiędzy zewnętrzną a wewnętrzną powierzchnią rury:

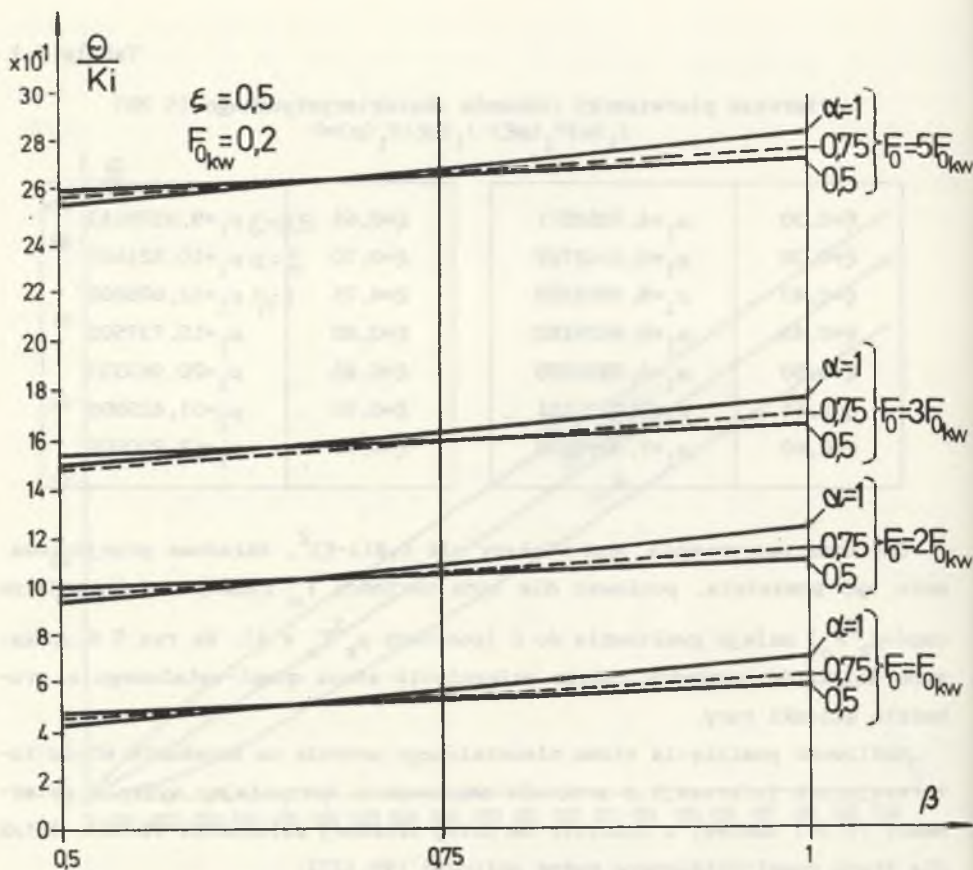
$$\Delta T = T(1, t) - T(\xi, t) = \frac{p_0 r_2}{\lambda} \left[ f_1(\xi) - f_2(m_1, m_2) \right], \quad (5.43)$$

- temperaturę powierzchni zewnętrznej rury:

$$T(1, t) = \frac{p_0 r_2}{\lambda} \left[ \frac{2\eta_T}{1-\xi^2} F_0 + f_3(\xi) + f_4(m_1, m_2) \right], \quad (5.44)$$

- moc powierzchniową  $p_0$ , dla której uzyska się żądany gradient temperatury  $\Delta T_{req}$  w ścianie rury:

$$p_0 = \frac{\lambda \Delta T_{req}}{r_2 \left[ f_1(\xi) - f_2(m_1, m_2) \right]}, \quad (5.45)$$



Rys.5.3. Rozkład temperatury w ścianie rury po osiągnięciu stanu quasi-ustalonego

Fig.5.3. Temperature distribution in the pipe wall after the quasi-steady-state has been reached

- czas nagrzewania powierzchni zewnętrznej rury do żądanej temperatury  $T_{req}$  z żądanym gradientem temperatury  $\Delta T_{req}$ :

$$t = \frac{r_2^2}{a} \cdot \frac{1-\xi^2}{2\eta_T} \left\{ \frac{T_{req}-T_o}{\Delta T_{req}} \left[ f_1(\xi)-f_2(m_1, m_2) \right] - f_3(\xi)-f_4(m_1, m_2) \right\}, \quad (5.46)$$

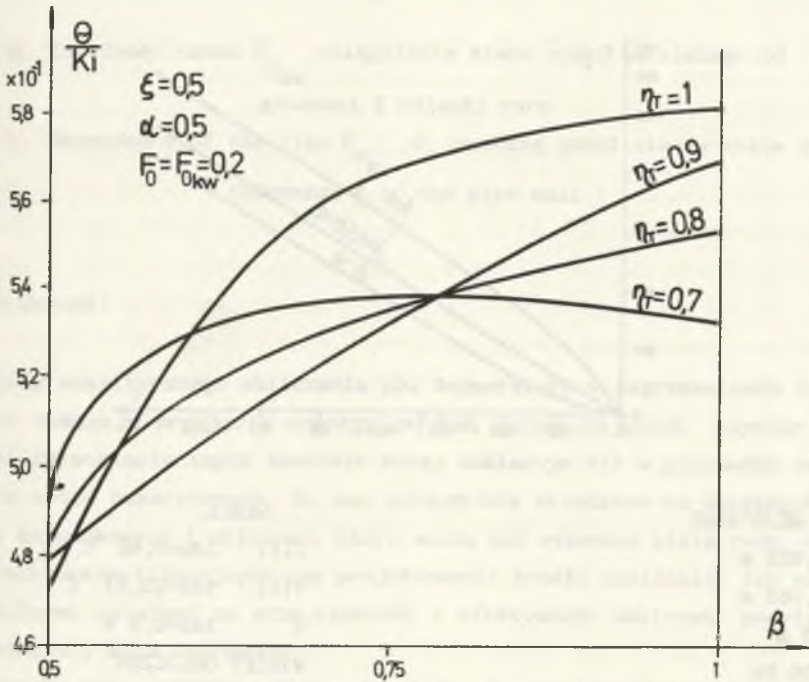
gdzie:

$$f_1(\xi) = \eta_T \left[ \frac{1}{2} + \frac{\xi^2 \ln \xi}{1-\xi^2} \right], \quad (5.47)$$

$$f_2(m_1, m_2) = \frac{[C^2+D^2]_{21} - [C^2+D^2]_{11}}{2m_2[AC+BC]_{21}} \quad (5.48)$$

$$f_3(\xi) = \frac{\eta_T}{1-\xi^2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{\xi^4}{1-\xi^2} \ln \xi - \frac{3}{4} \xi^2 \right] \quad (5.49)$$

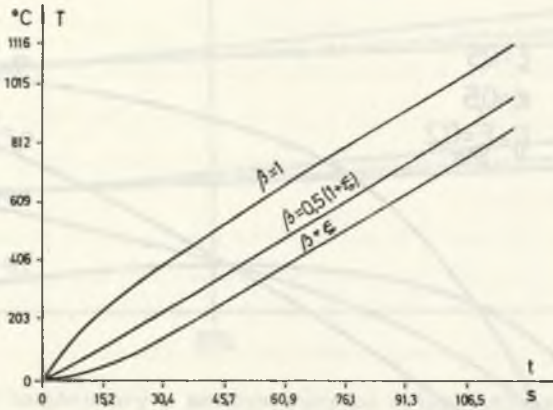
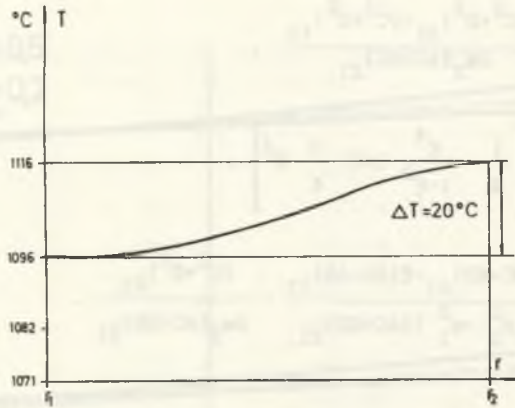
$$f_4(m_2, m_1) = \frac{[BC-AD]_{21} - \xi[BC-AD]_{11}}{(m_2^2 - m_1^2)[AC+BD]_{21}} - \frac{[C^2+D^2]_{21}}{2m_2[AC+BD]_{21}} \quad (5.50)$$



Rys.5.4. Wpływ sprawności cieplnej nagrzewania  $\eta_T$  na rozkład temperatury w ścianie rury

Fig.5.4. Influence of thermal efficiency of heating  $\eta_T$  on temperature distribution in the pipe wall





DANE WEJŚCIOWE

$r_1 = 0,055 \text{ m}$

$r_2 = 0,065 \text{ m}$

$l = 0,3 \text{ m}$

$f = 2000 \text{ Hz}$

$\lambda = 40 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C})$

$c = 477 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$

$\eta_T = 0,8$

SKALE

$T(r) \quad 1dz = 9,66 \text{ } ^\circ\text{C}$

$T(t) \quad 1dz = 10,67 \text{ } ^\circ\text{C}$

$t \quad 1dz = 0,6 \text{ s}$

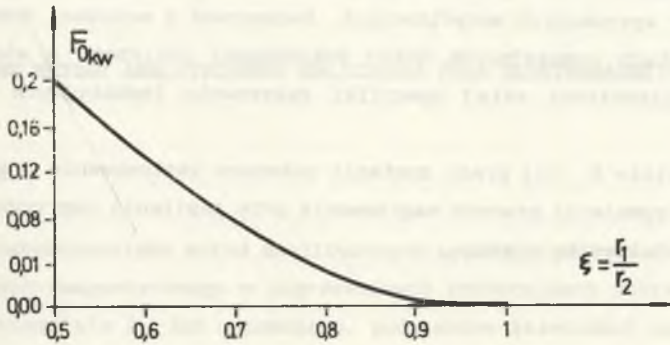
WYNIKI OBLICZEŃ

$P_1 = 50,56 \text{ kW}$

$t_n = 113 \text{ s}$

Rys.5.5. Rozkład temperatury w ścianie rury (a); wzrost temperatury w różnych punktach ścianki (b)

Fig.5.5. Temperature distribution in the pipe wall (a); rise of temperature in different points of the wall (b)



Rys.5.6. Zależność czasu  $F_{0kw}$  osiągnięcia stanu quasi-ustalonego od grubości  $\xi$  ścianki rury

Fig.5.6. Dependence of the time  $F_{0kw}$  of reaching quasi-steady-state on the thickness  $\xi$  of the pipe wall

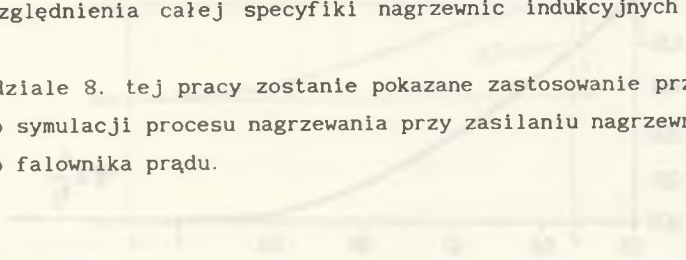
## 5.5. WNIOSKI

Metody analitycznego obliczania pól temperatury w nagrzewnicach indukcyjnych wymagają przyjęcia szeregu założeń upraszczających, czyniąc opis zjawisk termokinetycznych znacznie mniej dokładnym niż w przypadku zastosowania metod numerycznych. Są one szczególnie przydatne do wstępnych obliczeń szacunkowych i obliczeń, które muszą być wykonane wiele razy, np. w procesach optymalizacyjnych czy projektowaniu źródła zasilania. Ich niezaprzeczalnymi zaletami są przejrzystość i efektywność obliczeń, podstawową wadą niestety mała dokładność.

Przedstawiona metoda obliczania pola temperatury stanowi przykład ciągłej żywotności metod analitycznych w zastosowaniach polowych. Umiejętne posługiwanie się takimi metodami, polegające głównie na odpowiednim doborze współczynników równań i podziale procesu nagrzewania na dostateczną liczbę przedziałów, może prowadzić do zaskakująco dobrych wyników obliczeń. Metody analityczne w rękach doświadczonych projektantów to jedna z przyczyn powolnego wkraczania metod numerycznych do praktyki inżyniers-

kiej. Należy jednak stwierdzić, że już obecnie metody analityczne powinny być wykorzystywane we wspomnianych zastosowaniach specjalnych i nie mogą, nawet przy wyszukanych modyfikacjach, konkurować z metodami numerycznymi w zastosowaniach wymagających dużej dokładności obliczeń, a więc konieczności uwzględnienia całej specyfiki nagrzewnic indukcyjnych opisanej w p.2.1.

W rozdziale 8. tej pracy zostanie pokazane zastosowanie przedstawionej metody do symulacji procesu nagrzewania przy zasilaniu nagrzewnicy z tyristorowego falownika prądu.



## 6. WYBRANE METODY ANALITYCZNEGO OBLICZANIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

### 6.1. WSTĘP

Ogólna charakterystyka metod analitycznych wykorzystywanych do obliczania pola elektromagnetycznego w nagrzewnicach indukcyjnych została przedstawiona w rozdziale 2. Jak wspomniano, podstawowe zależności analityczne zawierają klasyczne prace Bodażkowa, Rodygina, Niemkova, Słuchockiego, Szamowa, Demidowicza, Langerera, Liwińskiego, Simpsona i Daviesa [7,97,71,74,106,146,20]. Wykorzystując przedstawione w nich metody napisano szereg programów wykorzystywanych w IETiP Politechniki Śl. do projektowania nagrzewnic indukcyjnych w systemie konwersacyjnym.

W tej pracy przedstawiono dwie wybrane metody analitycznego obliczania parametrów elektrycznych wsadu: metodę opartą na analogiach obwodowych i tzw. metodę całki Fouriera. O wyborze pierwszej z tych metod zdecydowała jej wyjątkowa przydatność do określenia wpływu szeregu czynników na impedancję wsadu ferromagnetycznego. W wyborze metody całki Fouriera główną rolę odegrała możliwość ocenienia za pomocą tej metody wpływu skończonej długości wzbudnika na impedancję nagrzewnicy.

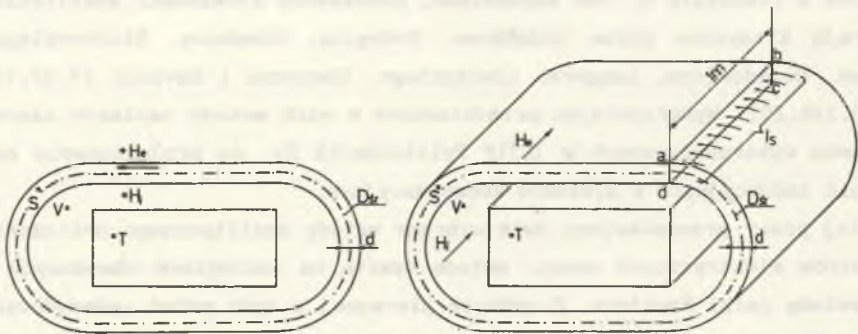
### 6.2. METODA OPARTA NA ANALOGIACH OBWODÓW MAGNETYCZNYCH I ELEKTRYCZNYCH

#### 6.2.1. OPIS METODY

Do wyznaczenia parametrów elektrycznych wsadu ferromagnetycznego nagrzewanego indukcyjnie można wykorzystać metodę, której idea polega na podziale elementu ferromagnetycznego na cienkie warstwy o ustalonej wartości stałych materiałowych  $\mu$  i  $\sigma$  i powiązaniu wartości natężenia pola magnetycznego na zewnętrznej ściance każdego elementu z parametrami jego magnetycznego, a następnie elektrycznego schematu zastępczego [93,120,136].

Problem i jego założenia można sformułować w sposób następujący:

wewnątrz ciała przewodzącego S o cienkich ściankach  $d$  ( $d \ll \Delta_e$ ) i dowolnym kształcie znajduje się ciało T o znanej impedancji  $Z_T$ . Zakładamy, że ciało S jest nieskończenie długie; wszystkie przebiegi są harmoniczne; na zewnętrznej powierzchni ciała S wymuszane jest pole magnetyczne  $H_e$ ; pomija się reakcję prądów wirowych ciała T. Celem obliczeń jest wyznaczenie wartości natężenia pola  $H_i$  na wewnętrznej powierzchni ciała S, prądu  $I_s$  płynącego w ciele S, mocy czynnej wydzielanej w S oraz impedancji układu ciał T-S. Szkic układu obliczeniowego przedstawiono na rys. 6.1. Dla uproszczenia zapisu założymy, że rozpatrujemy jedynie fragment o długości jednostkowej nieskończenie długiego ciała S.



Rys. 6.1. Szkic układu obliczeniowego

Fig. 6.1. Diagram of the considered system

Związek między natężeniami  $H_e$  i  $H_i$  na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni ciała S można znaleźć, stosując prawo Ampere'a:

$$\oint_{(abcd)} (H_e - H_i) dl = I_s \quad (6.1)$$

Zastąpmy teraz ciało S cienką powłoką o grubości  $d$ , średnicy  $D_{sr}$  i rezystancji  $R_s$ :

$$R_s = \oint_{D_{sr}} \frac{\sigma}{d} dl \quad (6.2)$$

Przy założeniu harmoniczności pola dla konturu  $D_{sr}$  można zapisać:

$$U_1 = j\omega\Phi_1 = j\omega(\Phi_T + \Phi_V + \Phi_{\text{wew}}) = j\omega \left[ \frac{1}{Z_{M_T}} + \frac{1}{Z_{M_V}} + \frac{1}{Z_{M_{S_{\text{wew}}}}} \right] H_i \quad (6.3)$$

Po uwzględnieniu związku między impedancją elektryczną i magnetyczną można zapisać równanie (6.3) w postaci [91]:

$$U_1 = (Z_T + jX_V + jX_{S_{\text{wew}}}) H_i \quad (6.4)$$

gdzie  $\Phi_1$  - całkowity strumień magnetyczny skojarzony z T, V i wewnętrzną częścią (od ścianki wewnętrznej do  $D_{sr}$ ) ciała S;  $\Phi_T, \Phi_V, \Phi_{S_{\text{wew}}}$  - składowe  $\Phi_1$  skojarzone odpowiednio z T, V i wewnętrzną częścią S;  $Z_{M_T}, Z_T$  - impedancja magnetyczna i elektryczna ciała T;  $R_{M_V}, R_V, R_{M_{S_{\text{wew}}}}, R_{S_{\text{wew}}}$  - odpowiednio rezystancja magnetyczna i elektryczna kolejno ciał V i wewnętrznej części S;  $U_1$  - napięcie indukowane wzdłuż konturu  $D_{sr}$  przez zmianę strumienia  $\Phi_1$ ;  $X_V$  - reaktancja szczeliny powietrznej V.

Napięcie  $U_1$  jest równoważone przez spadek napięcia wywołany przepływem prądu  $I_S$  przez rezystancję  $R_S$ :

$$R_S I_S = (Z_T + jX_V + jX_{S_{\text{wew}}}) H_i \quad (6.5)$$

Magnetyczny schemat zastępczy odpowiadający równaniom (6.1) i (6.3) w przypadku rury o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  przedstawiono na rys.6.2., a odpowiadający mu elektryczny schemat zastępczy na rys.6.3. Ścianka rury została podzielona na dwie części pewnym promieniem  $r_{sr}$ , warstwa wewnętrzna posiada rezystancję magnetyczną  $R_{M_{S_{\text{wew}}}}$ , warstwa zewnętrzna  $R_{M_{S_{zew}}}$ ;  $X_{M_S}$  odpowiada rezystancji elektrycznej  $R_S$ .

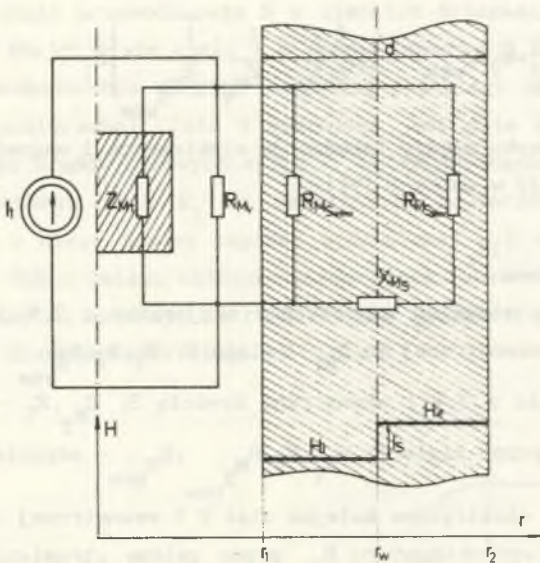
Z równań (6.1) i (6.5) można zapisać:

$$H_i = \frac{R_S}{R_S + Z_S} H_e \quad (6.6)$$

$$I_S = \frac{Z_S}{R_S + Z_S} H_e \quad (6.7)$$

$$Z_S = Z_T + jX_V + jX_{S_{\text{wew}}} \quad (6.8)$$

Impedancja wejściowa układu  $Z_{\text{wej}}$  widziana z zacisków a-b wynosi (rys.6.3):



Rys.6.2. Magnetyczny schemat zastępczy rozpatrywanej rury

Fig.6.2. Magnetic equivalent circuit of the considered pipe

$$Z_{we j} = \frac{R_S Z_S}{R_S + Z_S} + jX_{S_{zew}} \quad (6.9)$$

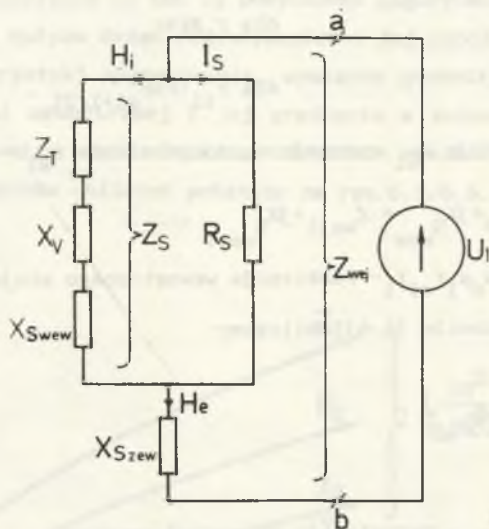
Moc czynna wydzielana w ciele S wynosi:  $P_S = R_S |I_S|^2$  . (6.10)

Moc czynna wydzielona w ciele T wynosi:  $P_T = \text{Re}(Z_T) |H_1|^2$  . (6.11)

### 6.2.2. ZASTOSOWANIE METODY DO ANALIZY WSADÓW FERROMAGNETYCZNYCH

Przedstawiony sposób obliczania parametrów elektrycznych bardzo cienkich warstw można stosować w przypadku cylindrycznych ciał ferromagnetycznych, dla których głębokość wnikania fali jest mniejsza lub porównywalna z grubością ścianki wsadu. Wystarczy wtedy podzielić ściankę cylindra na cienkie warstwy, z których każda spełnia warunek:

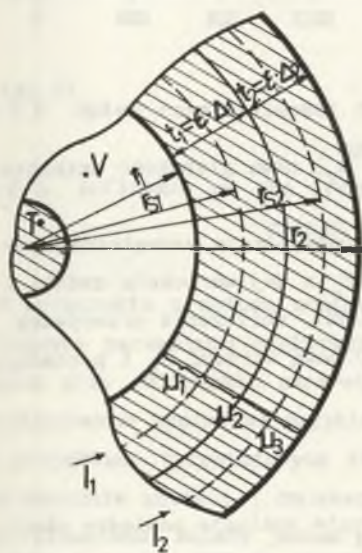
$d_i \ll \Delta_e$  ze stałymi parametrami  $\sigma_1, \mu_1$ , a następnie stosując kolejno zależności (6.6), (6.7) i (6.9) można obliczyć parametry układów ferromagnetycznych o dowolnej grubości ścianki. Należy wtedy postępować w następujący sposób.



Rys.6.3. Elektryczny schemat zastępczy rozpatrywanej rury

Fig.6.3. Electrical equivalent circuit of the considered pipe

Na rys.6.4. przedstawiono wycinek rury ferromagnetycznej, wewnątrz której znajduje się ciało T o znanej impedancji  $Z_T$ .



Rys.6.4. Podział rury na warstwy

Fig.6.4. Division of the pipes into layers

Rozkład temperatury  $T$ , a więc i rozkład rezystywności  $\sigma(T)$  w ścianie rury uważamy za znany. Zakładamy pewną wartość  $H_1$  na wewnętrznej ścianie rury i znajdujemy z krzywej magnesowania odpowiadającą jej przenikalność magnetyczną  $\mu_1$ , a następnie głębokość wnikania  $\Delta_1$ . Wprowadzamy warstwę o szerokości  $t_1 = \epsilon \Delta_1$ , gdzie  $\epsilon \ll 1$  i zakładamy, że na grubości  $t_1$  rezystywność ma stałą wartość  $\sigma_1$ . Przyjmujemy, że na promieniu  $r_{s1} = r_1 + 0,5t_1$  przepływa cały prąd  $I_1$ , jaki indukuje się w warstwie o szerokości  $t_1$ . Oznacza to, że natężenie pola zmienia się skokowo na promieniu  $r_{s1}$  od wartości  $H_1$  do  $H_{e1}$ . Przenikalność magnetyczna ma wartość:



$$\mu = \mu_1(H_1) \quad \text{dla } r_1 \leq r \leq r_{s1}, \quad (6.12a)$$

$$\mu = \mu_2(H_{e1}) \quad \text{dla } r_{s1} < r \leq r_{s1+1}/2t_1. \quad (6.12b)$$

Obliczmy impedancję  $Z_{S1}$  sprowadzoną do promienia  $r_{s1}$ :

$$Z_{S1} = Z_T + jX_V + jX_{S_{wew}} = Z_{wejl} + jX_{S_{wew1}}, \quad (6.13)$$

gdzie  $X_{S_{wew1}} = \pi\omega\mu_0\mu_1 r_{s1} t_1$  - reaktancja wewnętrznej warstwy.

Zgodnie z zależnością (6.6) obliczamy:

$$H_{e1} = H_1 \left(1 + \frac{Z_{S1}}{R_{S1}}\right), \quad (6.14)$$

gdzie:

$$R_{S1} = \frac{2\pi\sigma_1 r_{s1}}{t_1} \quad \text{- rezystancja pierwszej warstwy.}$$

Następnie obliczamy  $\mu_2 = f(H_{e1})$  i reaktancję zewnętrzną warstwy pierwszej warstwy:

$$X_{S_{zew}} = \pi\omega\mu_0\mu_2 r_{s1} t_1. \quad (6.15)$$

Obliczamy impedancję wyjściową dla promienia  $(r_1 + t_1)$  pierwszej warstwy zgodnie ze wzorem (6.9):

$$Z_{wyj1} = \frac{R_{S1} Z_{S1}}{R_{S1} + Z_{S1}} + jX_{S_{zew1}} = Z_{wejl2} \quad (6.16)$$

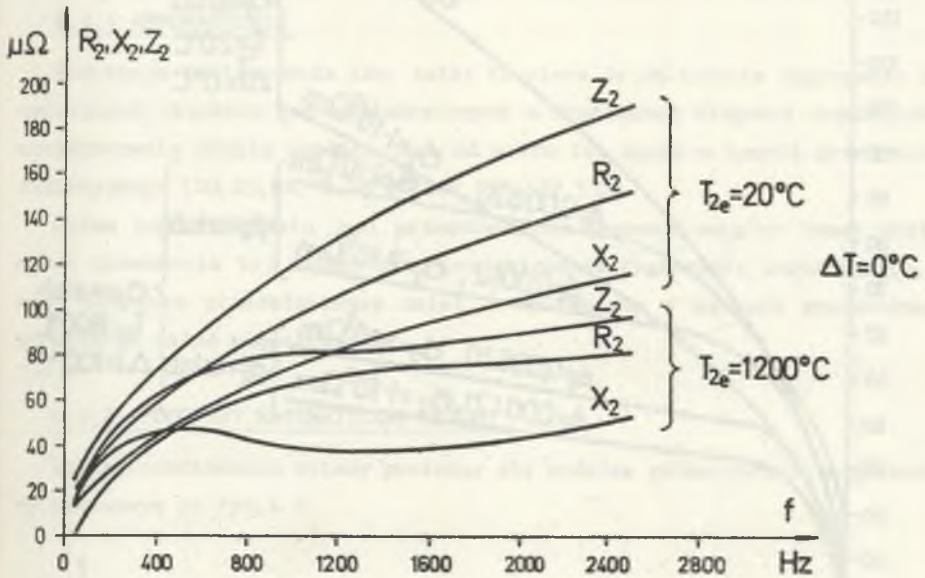
Dla promienia  $(r_1 + t_1)$  znajdujemy, znając  $\sigma_2$  i  $\mu_2$ , nową głębokość wnikania  $\Delta_2$  i szerokość nowej warstwy  $t_2 = \epsilon\Delta_2$ .

W podany sposób postępujemy aż do momentu osiągnięcia zewnętrznej powierzchni rury. Porównujemy obliczoną wartość  $H_e$  z jej wartością zadana i jeżeli te wartości różnią się nieznacznie (np. 5%), obliczenia przerywamy. Jeżeli błąd obliczeń jest zbyt duży, wybieramy nową wartość  $H_1$  i procedurę powtarzamy.

### 6.2.3. ZALETY I WADY METODY

Przedstawiona metoda wykorzystuje bardzo proste analogie pomiędzy obwodami magnetycznymi i elektrycznymi, jej realizacja na EMC dzięki bardzo dobrej zbieżności metody umożliwia obliczenie impedancji wsadu ferromagne-

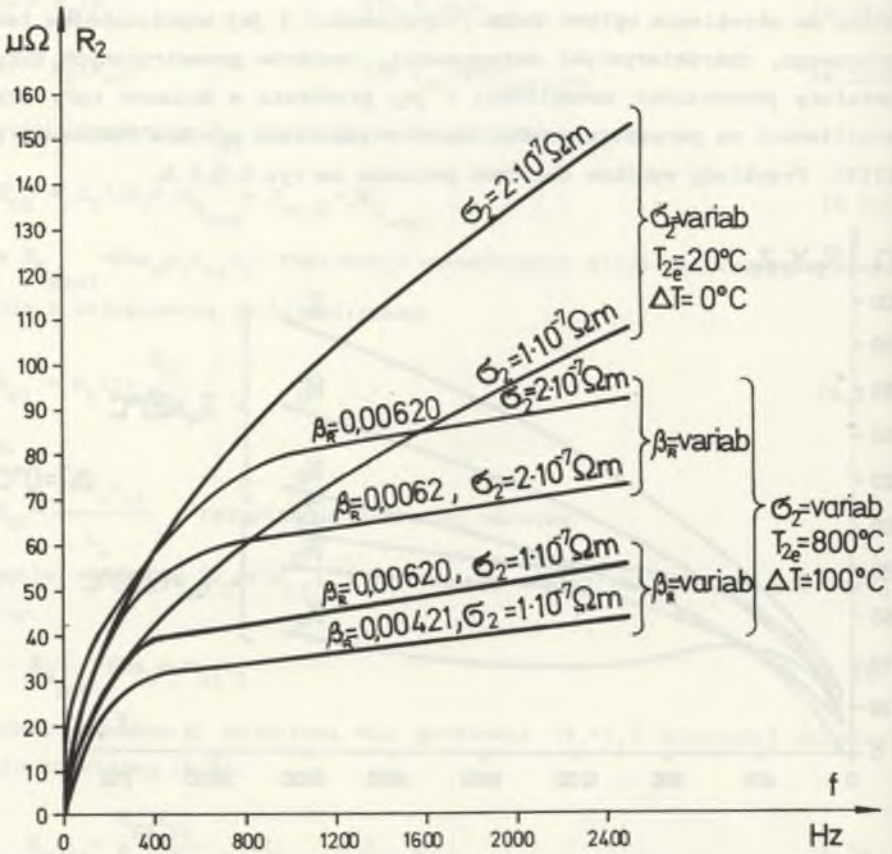
tycznego w zakresie szerokich zmian częstotliwości przy uwzględnieniu wielu czynników. Program napisany na EMC wg powyższego algorytmu został wykorzystany do określenia wpływu zmian rezystywności i jej współczynnika temperaturowego, charakterystyki magnesowania, wymiarów geometrycznych rury, temperatury powierzchni zewnętrznej i jej gradientu w ścianie rury oraz częstotliwości na parametry wsadu. Dokładne omówienie wyników zawiera praca [119]. Przykłady wyników obliczeń pokazano na rys. 6.5, 6.6.



Rys. 6.5. Wpływ częstotliwości  $f$  prądu wzbudnika na  $R_2, X_2, Z_2$  wsadu. Stan zimny i gorący.

Fig. 6.5. Influence of the frequency  $f$  of the coil on  $R_2, X_2, Z_2$  of the charge. Cold and hot state

W połączeniu z metodą schematów zastępczych, metoda ta, umożliwiającą obliczenie parametrów elektrycznych całej nagrzewnicy, jest szczególnie pomocna przy obliczaniu parametrów obciążenia falowników tyrystorowych a zaprezentowane wyniki są przykładem charakterystyk, jakie powinien posiadać projektant tyrystorowych źródeł zasilania nagrzewnic. Ich znajomość może znacznie ułatwić i zwiększyć dokładność projektowania obwodów siłowych falowników. Należy jednak podkreślić, że uzyskane w ten sposób wyniki mogą stanowić tylko wstępne oszacowanie a o ostatecznej poprawności pracy



Rys.6.6. Wpływ częstotliwości prądu zbudnika  $f$  na rezystancję wsadu  $R_2$  dla różnych wartości rezystywności  $\sigma_2$  i jej współczynnika temperaturowego  $\beta_R$ . Stan zimny i przejściowy

Fig.6.6. Influence of the frequency  $f$  of the coil on the resistance  $R_2$  of the charge for different values of resistivity  $\sigma_2$  and its temperature coefficient  $\beta_R$ . Cold and transient state

falownika i nagrzewnicy powinna zdecydować komputerowa symulacja procesu nagrzewania, np. taka jak w rozdziale 8. tej pracy, obejmująca stany pracy nieustalanej i quasi-ustalanej falownika oraz rzeczywisty rozkład temperatury we wsadzie.

Metoda może być również traktowana jako uzupełnienie klasycznych metod obliczania nagrzewnic indukcyjnych lub jako blok obliczeń elektromagnetycznych w modelach pól sprzężonych procesu nagrzewania indukcyjnego.

### 6.3. ZASTOSOWANIE METODY CAŁKI FOURIERA

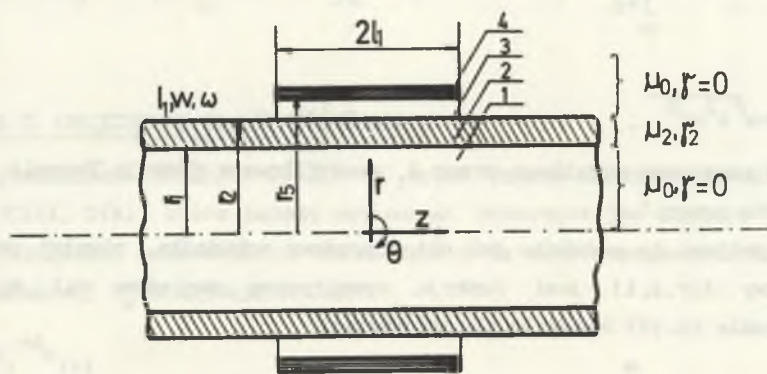
#### 6.3.1. WPROWADZENIE

Koncepcja zastosowania tzw. całki Fouriera do obliczania nagrzewnic indukcyjnych płaskich lub cylindrycznych o skończonej długości wzbudnika i nieskończenie długim wsadzie jest od wielu lat znana w teorii grzejnictwa indukcyjnego [30, 23, 64, 75, 76, 97, 108, 117, 122, 132].

Celem tego rozdziału jest przedstawienie pewnych uwag na temat możliwości stosowania tej metody przy projektowaniu nagrzewnic indukcyjnych, a przede wszystkim przedstawienie zalet i wad metody w czasach powszechnego stosowania metod numerycznych.

#### 6.3.2. PODSTAWY MATEMATYCZNE METODY

Do zaprezentowania metody posłużymy się modelem geometrycznym nagrzewnicy pokazanym na rys. 6.7.



Rys. 6.7. Przekrój podłużny nagrzewnicy o skończonej długości wzbudnika  
 Fig. 6.7. Longitudinal cross section of the heater with the coil of finite length

W modelu tym przyjmijmy następujące założenia:

- rura jest nieskończenie długa, wzbudnik ma długość skończoną, a cały układ jest nieruchomy;
- właściwości wszystkich materiałów są liniowe;
- wszystkie wielkości elektromagnetyczne zmieniają się harmonicznym w czasie.

Celem rozważań jest znalezienie rozkładu pola elektromagnetycznego, rezystancji i reaktancji układu oraz mocy czynnej generowanej w ścianie rury.

Przy powyższych założeniach równanie (4.9) przybiera dla jedynej niezerowej składowej  $A_{\theta}(r, z, t)$  potencjału wektorowego  $A$  postać:

$$\frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_{\theta} + \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial z^2} = k^2 A_{\theta} \quad (6.17)$$

gdzie  $k = \sqrt{\omega \mu_0 \mu r} \cdot \exp\left(j \frac{\pi}{4}\right)$  . (6.18)

Rozwiązania równania (6.17) będziemy szukać w postaci całki Fouriera:

$$A_{\theta}(r, z, t) = \int_0^{\infty} \left[ A(\lambda) I_1(\beta r) + B(\lambda) K_1(\beta r) \right] \left[ C(\lambda) \cos \lambda z + D(\lambda) \sin \lambda z \right] e^{j\omega t} d\lambda \quad (6.19)$$

gdzie  $\beta = \sqrt{\lambda^2 + k^2}$  ,  $Re\{\beta\} > 0$  . (6.20)

W p.6.3 oznaczamy wyjątkowo przez  $I_1$  zmodyfikowaną funkcję Bessela, a prąd wzbudnika przez  $I$ .

Przyjmijmy, że podobnie jak okład prądowy wzbudnika, również potencjał wektorowy  $A(r, z, t)$  jest funkcją symetryczną względem osi  $z$ . Wtedy rozwiązanie (6.19) redukuje się do postaci:

$$A_{\theta}(r, z, t) = \int_0^{\infty} \left[ A(\lambda) I_1(\beta r) + B(\lambda) K_1(\beta r) \right] \cos \lambda z e^{j\omega t} d\lambda \quad (6.21)$$

Chcąc znaleźć stałe całkowania w każdym z podobszarów (1), (2), (3), (4), można wybrać jedną z możliwych metod:

- wyliczyć je z warunku ciągłości składowych stycznych natężeń pola elek-

trycznego i magnetycznego na granicy każdego z podobszarów;

- założyć, że pole magnetyczne w obszarach powietrznych jest sumą dwóch pól: pola wymuszanego przez wzbudnik bez rury i pola reakcji prądów wirujących w rurze.

Ponieważ podejście drugie zmniejsza liczbę stałych niezbędnych do wyznaczenia, wybieramy to podejście. Pomijając w zapisie  $A_\theta$  zależność od czasu, możemy wyznaczyć składowe potencjału wektorowego dla wszystkich podobszarów:

$$\textcircled{1} \quad A_{\theta_1} = \int_0^{\infty} A(\lambda) I_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda, \quad (6.22)$$

$$\textcircled{2} \quad A_{\theta_2} = \int_0^{\infty} B(\lambda) I_1(\beta r) \cos \lambda z d\lambda + \int_0^{\infty} C(\lambda) K_1(\beta r) \cos \lambda z d\lambda, \quad (6.23)$$

$$\textcircled{3} \quad A_{\theta_3} = \frac{\mu_o I w r_5}{\pi I_1} \int_0^{\infty} K_1(\lambda r_o) I_1(\lambda r) \frac{\sin \lambda l_1 \cos \lambda z}{\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} D(\lambda) K_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \quad (6.24)$$

$$\textcircled{4} \quad A_{\theta_4} = \frac{\mu_o I w r_5}{\pi I_1} \int_0^{\infty} I_1(\lambda r_o) K_1(\lambda r) \frac{\sin \lambda l_1 \cos \lambda z}{\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} D(\lambda) K_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda. \quad (6.25)$$

6.3.3. OBLICZENIE STAŁYCH CAŁKOWANIA

W równaniach (6.22)...(6.25) są tylko cztery stałe całkowania  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$ ,  $D(\lambda)$ , które należy wyznaczyć. Wykorzystajmy dopiero teraz warunki ciągłości odpowiednich składowych pola elektromagnetycznego, które dla składowej  $A_\theta$  przyjmują postać:

$$A_{\theta_i} = A_{\theta_{i+1}} \quad (6.26a)$$

$$\frac{1}{\mu_i} \cdot \frac{\partial(r A_{\theta_i})}{\partial r} = \frac{1}{\mu_{i+1}} \cdot \frac{\partial(r A_{\theta_{i+1}})}{\partial r} \quad (6.26b)$$

$i=1, 2, 3.$

Wstawienie zależności (6.22)...(6.25) do warunków (6.26) daje następujący układ równań do wyznaczenia stałych  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$ ,  $D(\lambda)$ :

$$\begin{bmatrix} I_1(\lambda r_1) & -I_1(\beta r_1) & -K_1(\beta r_1) & 0 \\ \lambda I_0(\lambda r_1) & -\frac{1}{\mu_2} \beta I_0(\beta r_1) & \frac{1}{\mu_2} \beta K_0(\beta r_1) & 0 \\ 0 & I_1(\beta r_2) & K_1(\beta r_2) & -K_1(\lambda r_2) \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \beta I_0(\beta r_2) & -\frac{1}{\mu_2} \beta K_0(\beta r_2) & \lambda K_0(\lambda r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\lambda) \\ B(\lambda) \\ C(\lambda) \\ D(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 I_w r_5}{\Pi_1} K_1(\lambda r_0) I_1(\lambda r_2) \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} \\ \frac{\mu_0 I_w r_5 \lambda}{\Pi_1} K_1(\lambda r_0) I_0(\lambda r_2) \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy:

$$A = \frac{W_1}{\det}, \quad B = \frac{W_2}{\det}, \quad (6.28)$$

$$C = \frac{W_3}{\det}, \quad D = \frac{W_4}{\det},$$

gdzie:

$$W_1 = N_1 N_2, \quad (6.29a)$$

$$W_2 = N_2 N_3, \quad (6.29b)$$

$$W_3 = N_2 N_4, \quad (6.29c)$$

$$W_4 = N_4 N_5 - N_3 N_6, \quad (6.29d)$$

$$\det = N_4 N_7 - N_3 N_8, \quad (6.29e)$$

$$N_1 = -\frac{1}{\mu_2} \left[ \beta I_1(\beta r_1) K_0(\beta r_1) + \beta I_0(\beta r_1) K_1(\beta r_1) \right].$$

$$N_2 = \frac{\mu_0 I w r_5 \lambda}{\pi l_1} K_1(\lambda r_0) \left[ I_1(\lambda r_2) K_0(\lambda r_2) + I_0(\lambda r_2) K_1(\lambda r_2) \right] \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} ,$$

$$N_3 = -\lambda I_0(\lambda r_1) K_1(\beta r_1) - \frac{1}{\mu_2} \beta I_1(\lambda r_1) K_0(\beta r_1) ,$$

$$N_4 = -\frac{1}{\mu_2} \beta I_1(\lambda r_1) I_0(\beta r_1) + \lambda I_0(\lambda r_1) I_1(\beta r_1) ,$$

$$N_5 = \frac{\mu_0 I w r_5}{\pi l_1} K_1(\lambda r_0) \left[ \frac{\beta}{\mu_2} I_1(\lambda r_2) K_0(\beta r_2) + \lambda I_0(\lambda r_2) K_1(\beta r_2) \right] \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} ,$$

$$N_6 = \frac{\mu_0 I w r_5}{\pi l_1} K_1(\lambda r_0) \left[ \frac{\beta}{\mu_2} I_1(\lambda r_2) I_0(\beta r_2) - \lambda I_0(\lambda r_2) I_1(\beta r_2) \right] \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} ,$$

$$N_7 = \lambda K_1(\beta r_2) K_0(\lambda r_2) - \frac{\beta}{\mu_2} K_1(\lambda r_2) K_0(\beta r_2) ,$$

$$N_8 = -\frac{\beta}{\mu_2} I_0(\beta r_2) K_1(\lambda r_2) - \lambda I_1(\beta r_2) K_0(\lambda r_2) . \quad (6.30a \dots 6.30h)$$

#### 6.3.4. OBLICZENIE IMPEDANCJI UKŁADU

Impedancja zewnętrzna układu wynosi [65, 91]:

$$Z_{\text{ex}} = j \frac{2\pi r_5 w \omega}{l_1} \left\{ \frac{\mu_0 w r_5}{\pi l_1} \int_0^{\infty} K_1(\lambda r_0) I_1(\lambda r_0) \frac{(\sin \lambda l_1)^2}{\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} D(\lambda) K_1(\lambda r_0) \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} d\lambda \right\} . \quad (6.31)$$

Równanie (6.31) można zapisać w postaci [64]:

$$Z_{\text{ex}} = R_2 + jX_1 - j\Delta X_2 = R_2 + jX \quad (6.32)$$

gdzie:

$$R_2 = -\frac{2\pi r_5 w \omega}{l_1} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\infty} D(\lambda) K_1(\lambda r_0) \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} d\lambda \right\} , \quad (6.33)$$

$$\Delta X_2 = -\frac{2\pi r_5 w \omega}{l_1} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} D(\lambda) K_1(\lambda r_0) \frac{\sin \lambda l_1}{\lambda} d\lambda \right\} , \quad (6.34)$$



$$X_1 = \frac{2\pi r_5 w \omega}{l_1} \int_0^{\infty} K_1(\lambda r_0) I_1(\lambda r_0) \frac{(\sin \lambda l_1)^2}{\lambda} d\lambda. \quad (6.35)$$

Interpretacja fizyczna poszczególnych składników tego równania może być następująca [64]:

- $R_2$  jest rezystancją rury i reprezentuje straty mocy wywołane przez prądy wirowe w ścianie rury;
- $\Delta X_2$  jest reaktancją, która jest wynikiem rozmagnesowującego działania prądów wirowych;
- $X_1$  jest reaktancją pustego wzbudnika, tj. wzbudnika bez rury.

Należy zwrócić uwagę, że zależności (6.33)...(6.35) dają wartości  $R_2, \Delta X_1, X_1$  na jednostkę długości wzbudnika, tj. aby otrzymać wartości rzeczywiste dla wzbudnika o długości  $2l_1$ , należy je przemnożyć przez  $2l_1$ .

Najprostsza droga znalezienia strat mocy prądów wirowych jest wykorzystanie zależności:

$$P_2 = R_2 |I|^2. \quad (6.36)$$

### 6.3.5. WYZNACZENIE SKŁADOWYCH POLA MAGNETYCZNEGO W ŚCIANCE RURY

Składowe natężenia pola magnetycznego w najbardziej interesującym nas obszarze, tj. ścianie rury, mogą być wyliczone z zależności:

$$H_{z_2} = \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r A_{\theta_2} \right), \quad (6.37a)$$

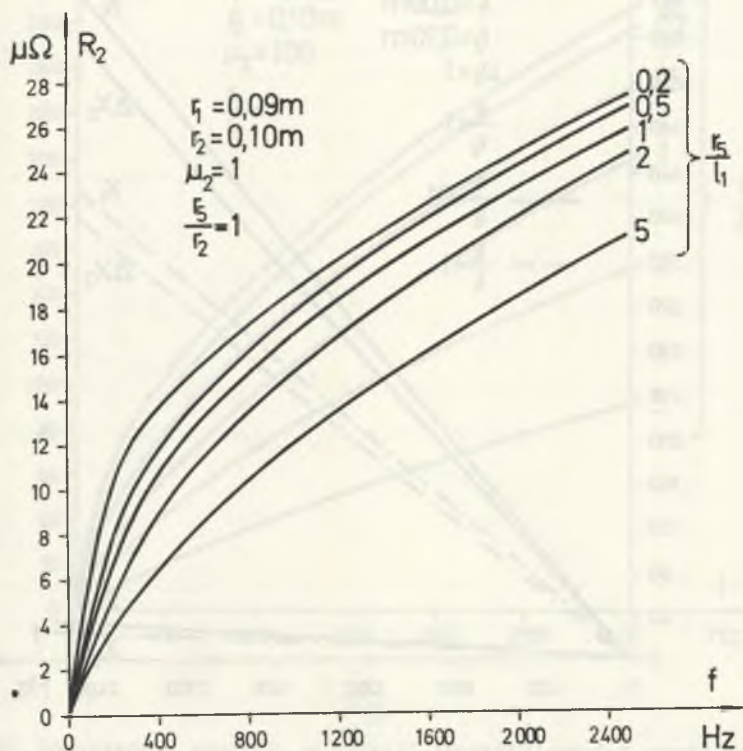
$$H_{r_2} = - \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \cdot \frac{\partial A_{\theta_2}}{\partial z}. \quad (6.38)$$

Wprowadzając zależność (6.23) do równań (6.37), otrzymamy na przykład dla składowej  $H_{r_2}$ :

$$H_{r_2} = \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \lambda \int_0^{\infty} \left[ B(\lambda) I_1(\beta r) + C(\lambda) K_1(\beta r) \right] \sin \lambda z d\lambda \quad (6.38b)$$

Stosując inne dobrze znane zależności, można obliczyć indukcję magnetyczną, zespolony wektor Poyntinga i współczynnik mocy układu.

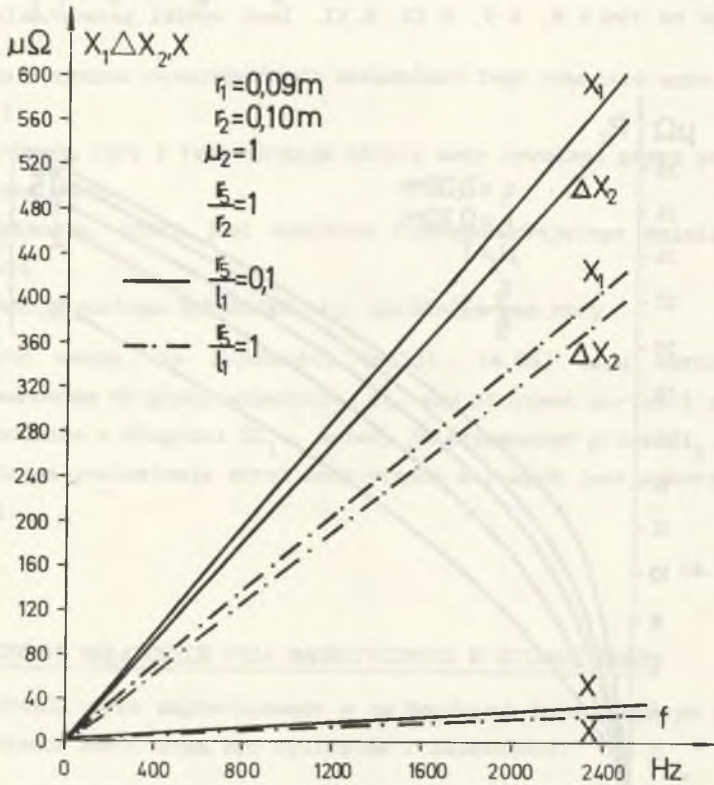
Przykładowe obliczenia wykonane na podstawie przedstawionych zależności pokazano na rys. 6.8, 6.9, 6.10, 6.11. Inne wyniki przedstawiono w pracy [122].



Rys. 6.8. Rezystancja wsadu  $R_2$  w funkcji częstotliwości  $f$  prądu wzbudnika dla  $\mu_2=1$

Fig. 6.8. Resistance  $R_2$  of the charge versus the frequency  $f$  of the coil current for  $\mu_2=1$

Obliczenia pokazały, że impedancja pustego wzbudnika obliczona prezentowaną metodą i za pomocą stosowanego powszechnie w teorii grzejnictwa indukcyjnego współczynnika Nagaoki nie różnią się więcej niż o 2...3% [117]. Można również wykazać, że stosowane powszechnie zależności dla układów z nieskończenie długim wzbudnikiem cylindrycznym mogą być stosowane, gdy spełniony jest warunek  $r_2 \leq 0,21_1$  dla dowolnej grubości ścianki rury.



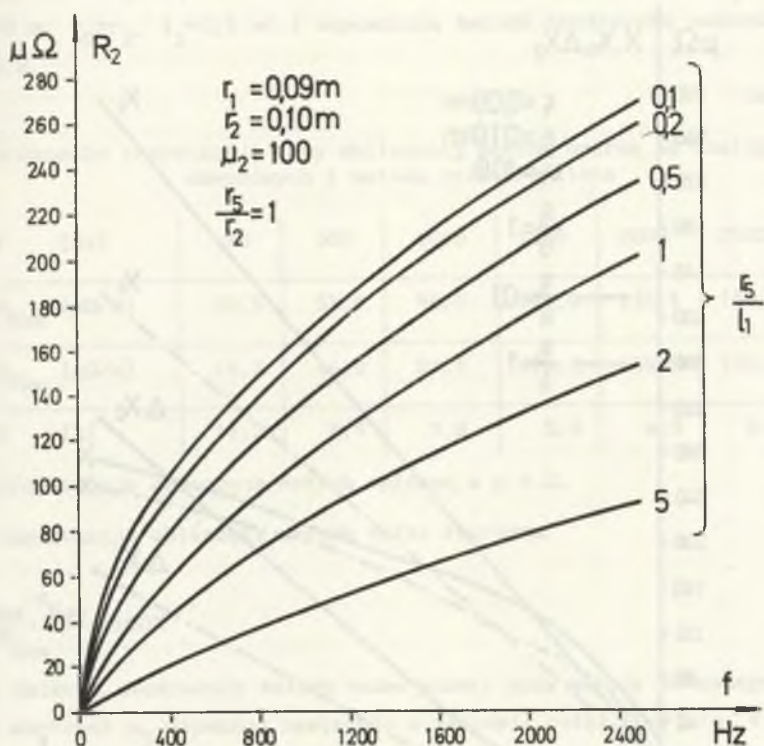
Rys.6.9. Reaktancja nagrzewnicy  $X$  i jej składowe  $X_1, \Delta X_2$  w funkcji częstotliwości  $f$  prądu wzbudnika dla  $\mu_2=1$

Fig.6.9. Reactance  $X$  of the heater and its components  $X_1, \Delta X_2$  versus the frequency  $f$  of the coil current for  $\mu_2=1$

### 6.3.6. ZALETY I WADY METODY

Podstawową zaletą metody jest możliwość uwzględnienia w obliczeniach skończonej długości wzbudnika. Do zalet metody można zaliczyć jeszcze jej elegancję matematyczną i zwięzłość. Niewątpliwą zaletą jest również możliwość obliczenia impedancji nagrzewnicy bez konieczności obliczania rozkładu pola w całym obszarze, jak to ma miejsce w metodach obszarowych MRS i MES.

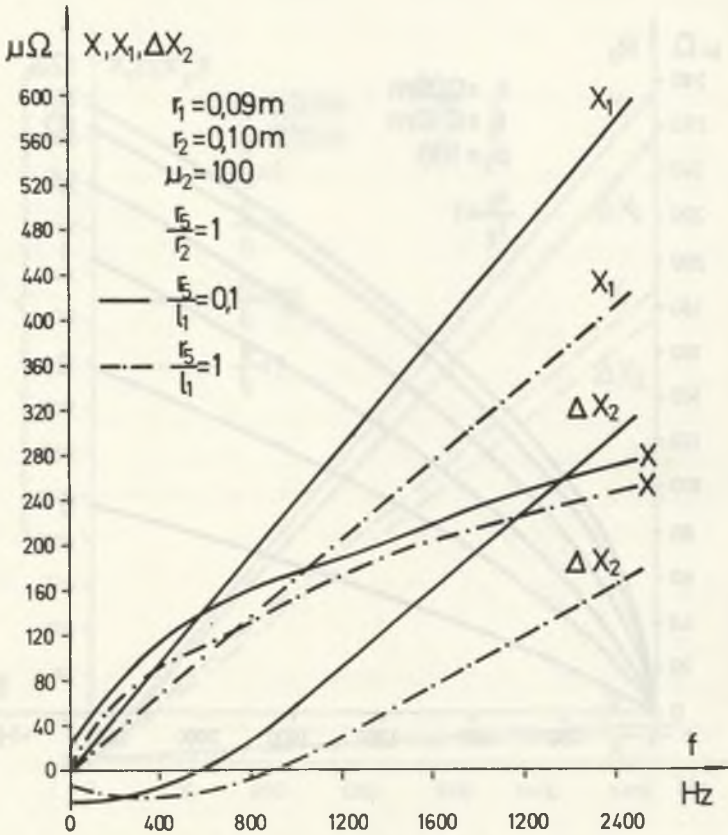
Należy zauważyć, że im większa jest liczba obszarów obliczeniowych, tym więcej stałych całkowania trzeba wyznaczyć. Z uwagi na długi czas obliczeń



Rys.6.10. Rezystancja wsadu  $R_2$  w funkcji częstotliwości  $f$  prądu wzbudnika dla  $\mu_2=100$

Fig.6.10. Resistance  $R_2$  of the charge versus the frequency  $f$  of the coil current for  $\mu_2=100$

nie ma sensu stosować metody do obliczania nagrzewnic ze wsadami ferromagnetycznymi, dzieląc wsad na bardzo dużą liczbę warstw i stosować metodę iteracji, podobnie jak w metodzie z p.6.2. Wadą metody jest założenie o harmoniczności przebiegów, co może utrudniać analizę przy zasilaniu z przekształtników tyrystorowych oraz zmusza do pominięcia rzeczywistego odkształcenia przebiegów w wypadku wsadów ferromagnetycznych. Metoda nie umożliwia również uwzględnienia stanu nierównomiernego nagrzania wsadu w jego przekroju poprzecznym.



Rys.6.11. Reaktancja nagrzewnicy  $X$  i jej składowe  $X_1$ ,  $\Delta X_2$  w funkcji częstotliwości  $f$  prądu wzbudnika dla  $\mu_2=100$

Fig.6.11. Reactance  $X$  of the heater and its components  $X_1$ ,  $\Delta X_2$  versus the frequency  $f$  of the coil current for  $\mu_2=100$

Problem doboru wartości przenikalności magnetycznej materiału rury  $\mu_2$  w przypadku wsadów ferromagnetycznych jest często pomijany przez wielu autorów a przecież wartość  $\mu_2$  wywiera znaczny wpływ na otrzymane wyniki. W pracy [117] zaproponowano przybliżony dobór wartości  $\mu_2$  wykorzystując metodę opisaną w p.6.2. Pozwala ona wyznaczyć pewną wartość  $\mu_{sr}$ , tak aby energia pola magnetycznego we wsadzie nieskończenie długim z rzeczywistym rozkładem  $\mu$  i z uśrednioną wartością  $\mu_{sr}$  były równe. Przykład wyników obliczeń wykonanych metodą całki Fouriera dla wsadu dostatecznie długiego,

tak aby można go było uważać za wsad nieskończenie długi ( $r_1=0,09$  m ,  $r_2=0,10$  m,  $r_5=r_2$ ,  $l_1=0,5$  m), i wspomnianą metodą numeryczną pokazano w tabeli 6.2.

Tabela 6.2

Porównanie rezystancji rury obliczonej metodą opartą na analogiach obwodowych i metodą całki Fouriera

f [Hz]	50	300	1000	1500	2000	2500
$R_{Num}$ [ $\mu\Omega/m$ ]	20,5	51,4	94,6	116,0	134,1	150,0
$R_{Fou}$ [ $\mu\Omega/m$ ]	18,2	46,8	89,1	110,2	128,0	143,7
$\epsilon$ [%]	11,2	8,9	5,8	5,0	4,5	4,2

$R_{Num}$  rezystancja obliczona metodą opisaną w p.6.2,

$R_{Fou}$  rezystancja obliczona metodą całki Fouriera,

$$\epsilon = \frac{R_{Num} - R_{Fou}}{R_{Num}} \cdot 100\%$$

Można zalecić stosowanie metody numerycznej jako metody wstępnego oszacowania wartości  $\mu_2$  używanej następnie w metodzie całki Fouriera, eliminując w ten sposób główne źródło błędów tej metody, jakim jest dość dowolny sposób przyjmowania wartości przenikalności  $\mu_2$  do obliczeń.

Zastosowanie metody całki Fouriera w projektowaniu nagrzewnic indukcyjnych, szczególnie wsadów ferromagnetycznych, traci na znaczeniu. Jest ona zastępowana metodami numerycznymi, które umożliwiają pełniejsze uwzględnienie wymienionych w p.2.1 cech nagrzewnic indukcyjnych. Powinna ona być stosowana do obliczania nagrzewnic wsadów niemagnetycznych, szczególnie w przypadkach konieczności dokładnego uwzględnienia skończonej długości wzbudnika.

#### 6.4. PODSUMOWANIE

Pominięcie w przedstawionych modelach analitycznych, całkowite lub tylko częściowe, wpływu rzeczywistego rozkładu temperatury na parametry elektryczne nagrzewnicy nie przesadza o ich nieprzydatności do projektowania nagrzewnic indukcyjnych. Zostały one zbudowane do analizy wpływu wymiarów

geometrycznych, stałych materiałowych i parametrów zasilania na parametry nagrzewnic i pod tym względem spełniają postawione przed nimi cele, pozwalając przy niskich kosztach obliczeń prześledzić zakres zmian impedancji nagrzewnic wsadów ferromagnetycznych oraz określić rozkład wewnętrznych źródeł ciepła, co ma podstawowe znaczenie przy obliczaniu pola temperatury.



## 7. MODELE NUMERYCZNE PÓL SPRĘŻONYCH

### 7.1. WSTĘP

Porównanie wymienionych w p.2.1 cech charakterystycznych nagrzewnic indukcyjnych i dotychczas przedstawionych modeli prowadzi do wniosku, że nie wszystkie z tych cech nie mogły być dokładnie uwzględnione. Dotyczy to przede wszystkim sprzężenia pól, ich nieliniowości i złożonej wymiany ciepła.

Dokonanie dalszych uściśleń opisu omawianych w pracy zjawisk fizycznych w nagrzewnicy prowadzi do konieczności budowy modeli numerycznych. Poniżej przedstawione zostaną dwa modele numeryczne sprzężonych zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w nagrzewnicach indukcyjnych rur. Model pierwszy jednowymiarowy opisuje pola sprzężone w nagrzewnicy nieskończenie długiej, model drugi opisuje dwuwymiarowe pola harmoniczne w nagrzewnicy o skończonych wymiarach i pełnej symetrii osiowej. Umożliwia on dodatkowo uwzględnienie ruchu rury przy tzw.nagrzewaniu przelotowym.

### 7.2. MODEL JEDNOWYMIAROWY

#### 7.2.1. MODEL MATEMATYCZNY

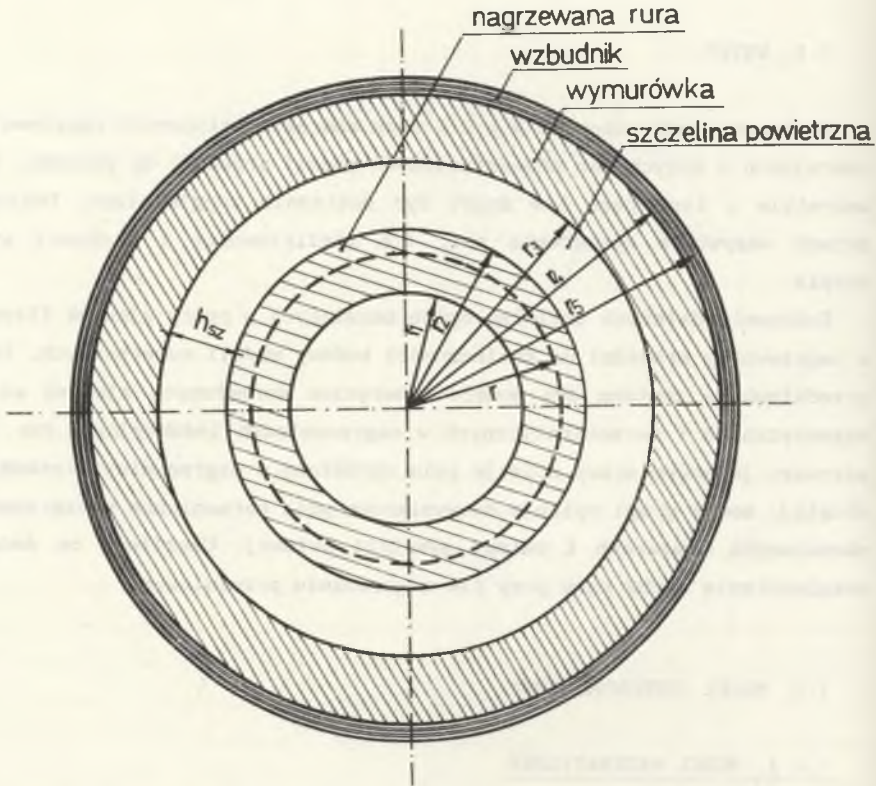
Pola sprzężone w nieskończenie długiej nagrzewnicy indukcyjnej (rys.7.1)) składającej się z nagrzewanej rury, wymurówki cieplnej i wzbudnika opisane są układem równań (4.11) i (4.17), który przy przyjętych założeniach przybiera postać [117,118,135]:

$$\frac{\partial [\mu_2(H, T)H_2(r, t)]}{\partial t} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r\sigma_2(T) \frac{\partial}{\partial r} (H_2(r, t)) \right] = 0, \quad (7.1)$$



$$\gamma_{m_2}(T)c_2(T) \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_2(T) \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \right) = \sigma_2(T) \left[ \frac{\partial H_2(r, t)}{\partial r} \right]^2, \quad (7.2)$$

$$\gamma_{m_w}(T)c_w(T) \frac{\partial T_w(r, t)}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_w(T) \frac{\partial T_w(r, t)}{\partial r} \right) = 0. \quad (7.3)$$



Rys.7.1. Przekrój poprzeczny rozpatrywanej nagrzewnicy indukcyjnej rur  
 Fig.7.1. Cross section of the considered induction heater of pipes

Warunki graniczne, które określają w dużej mierze dokładność wyników zostały przyjęte w następujący sposób:

- dla pola elektromagnetycznego
- warunek początkowy

$$H_2(r, 0) = H_2(r), \quad (7.4)$$

- warunek brzegowy na zewnętrznej powierzchni rury

Gdy napięcie zasilania wzbudnika  $u_1(t)$  jest znane, obwód elektryczny nagrzewnicy może być opisany wyrażeniem postaci:

$$u_1(t) = R_k i_1(t) + (L_1 + L_{sz}) \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{d\Psi_2(t)}{dt}, \quad (7.5)$$

gdzie  $R_k$  jest całkowitą rezystancją nagrzewnicy;  $L_1$  jest indukcyjnością wzbudnika, a  $L_{sz}$  szczeliny powietrznej;  $\Psi_2$  jest strumieniem magnetycznym w rurze.

Stosując prawa Ampere'a i Faradaya można zapisać:

$$u_1(t) = \frac{R_k l_1}{w} H_2(t) + \frac{(L_1 + L_{sz}) l_1}{w} \cdot \frac{\partial H_2(t)}{\partial t} + \frac{2\pi r_2 w}{\gamma_2} \cdot \frac{\partial H_2(t)}{\partial r}. \quad (7.6)$$

Ponieważ rezystancja i indukcyjność nagrzewnicy nie są znane, na początku obliczeń muszą one być wyznaczone na podstawie zależności klasycznej teorii grzejnictwa indukcyjnego (zależności z aneksu A4).

Gdy znany jest prąd  $i_1(t)$  wzbudnika, to natężenie  $H_2(t)$  może być wyznaczone z prostej zależności:

$$H_2(t) = \frac{i_1(t) w}{l_1} \quad (7.7)$$

- warunek brzegowy na wewnętrznej powierzchni rury ma postać:

$$\frac{r_1 \mu_0}{2} \frac{\partial H_2(t)}{\partial t} = \sigma_2 \frac{\partial H_2(t)}{\partial r}, \quad (7.8)$$

- dla pola temperatury w rurze:

- warunek początkowy

$$T_2(r, 0) = T_{2p}(r), \quad (7.9)$$

- warunki brzegowe

$$-\lambda_2(T) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \sigma_0 \varphi_{2,w} \left( (T_{2e} + 273)^4 - (T_{wi} + 273)^4 \right) + \alpha_{c_2} (T_{2e} - T_{wi}) \quad (7.10)$$

$$\lambda_2(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_{c_1} (T_2 - T_a) \quad (7.11)$$

- dla pola temperatury w wymurówce:

- warunek początkowy

$$T_w(r, 0) = T_{w_p} \quad (7.12)$$

- warunki graniczne

$$T_{w_e} = T_{oo} \quad (7.13)$$

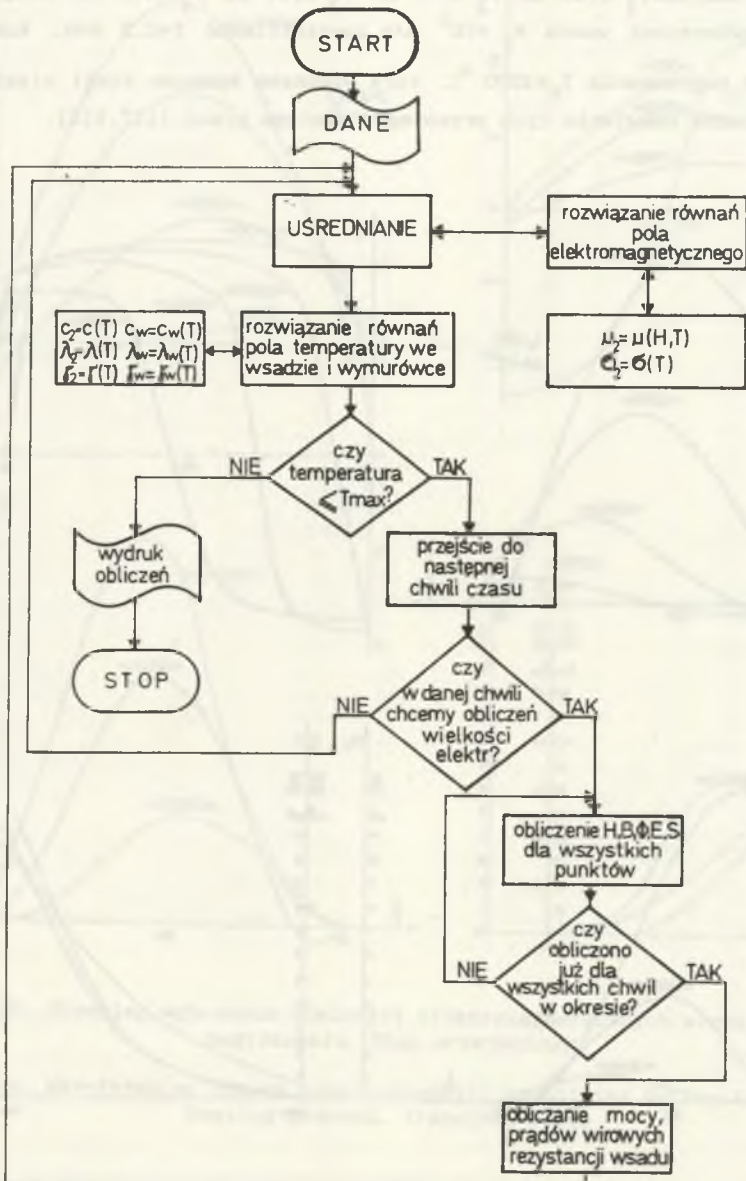
gdzie  $T_{oo}$  jest średnią temperaturą wody chłodzącej wzbudnik, która była przyjmowana jako 50 °C.

$$-\lambda_w(T) \frac{\partial T_w}{\partial t} = \sigma_o \varphi_{w,2} \left[ (T_2 + 273)^4 - (T_{w_i} + 273)^4 \right] + \alpha_{c_w} (T_2 - T_{w_i}) \quad (7.14)$$

Warunek brzegowy opisujący nagrzewanie przy znanej mocy powierzchniowej  $p_o$  można uważać za kombinację warunków (7.5) i (7.7), ale z uwagi na rzadkie zastosowanie tego typu nagrzewania w praktyce przemysłowej nie był on rozważany w pracy.

W obliczeniach przyjmowano nieliniowe współczynniki materiałowe wg. zależności z aneksu A2. Największe trudności sprawiał dobór współczynników występujących w równaniach opisujących wymianę ciepłą, tj.  $\alpha_{c_1}, \alpha_{c_2}, \alpha_{c_w}, \epsilon_2$  i  $\epsilon_w$ . Wartości  $\alpha_c$  obliczono wg zależności podanych w literaturze [44, 112], a wartości  $\epsilon$  odczytano z tablic [109].

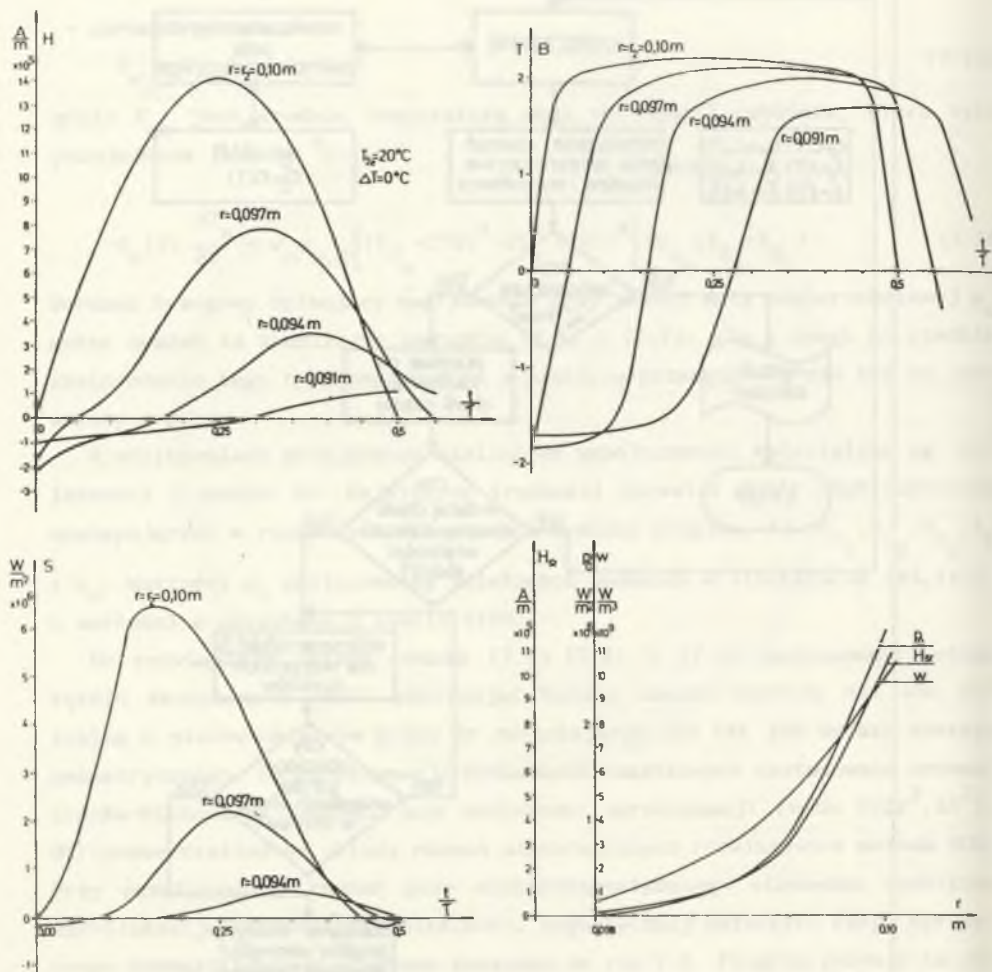
Do rozwiązania układu równań (7.1), (7.2) i (7.3) zastosowano metodę różnic skończonych (MRS) pokrywając badany obszar wspólną dla obu pól siatką o nierównomiernym kroku  $\Delta r$  zmieniającym się tak jak wyrazy szeregu geometrycznego. Do aproksymacji pochodnych cząstkowych zastosowano schemat Cranka-Nicholsona zapewniający dokładność aproksymacji rzędu  $O(\Delta r^2, \Delta t^2)$ . Otrzymane nieliniowe układy równań algebraicznych rozwiązywano metodą SOR. Przy rozwiązywaniu równań pola elektromagnetycznego stosowano dodatkowo nadrelaksację wartości przenikalności magnetycznej materiału rury. Uproszczony schemat blokowy programu pokazano na rys. 7.2. Program pozwala na obliczenie podstawowych wielkości elektromagnetycznych w układzie, tj. chwilowych wartości  $H, B, E, S$ , mocy czynnej traconej w rurze, uśrednionych w czasie wartości mocy powierzchniowej  $p_o$ , natężenia pola  $H_{sr}$  i rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła w. Przebiegi wybranych wielkości elektromagnetycznych dla różnych stanów nagrzania wsadu przy stabilizacji prądu wzbudnika



Rys. 7.2. Uproszczony schemat blokowy programu obliczania pól sprzężonych z zastosowaniem metody uśredniania

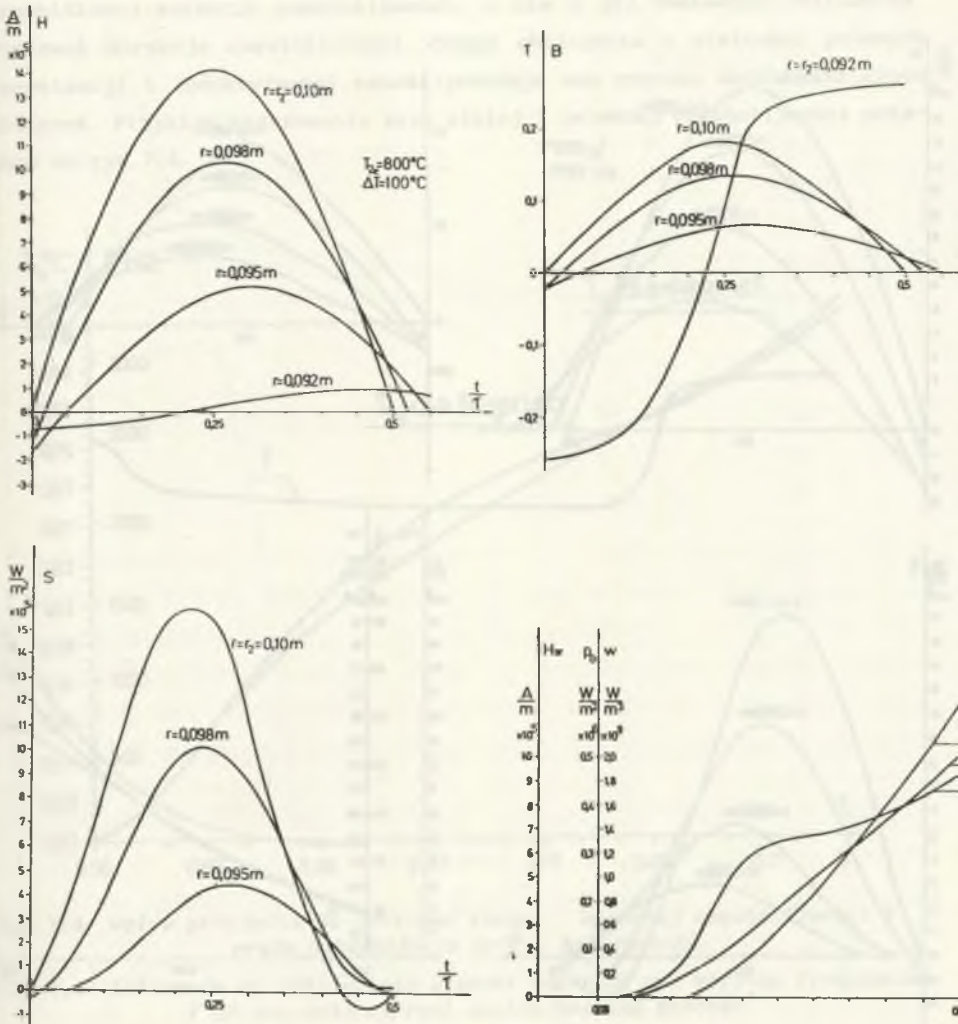
Fig. 7.2. Simplified flow chart of the program of computing coupled fields when the averaging method has been applied

$I_1$  (zadana wartość  $H_{2e}$ ) pokazano na rys.7.3. Obliczenia wykonano dla następujących danych:  $r_1=0,09$  m,  $r_2=0,10$  m,  $r_3=0,11$  m,  $r_4=0,12$  m, natężenie pola na powierzchni wsadu  $H_{2e}=10^5$  A/m, częstotliwość  $f=2,5$  kHz, końcowa temperatura nagrzewania  $T_k=1000$  °C, rura wykonana była ze stali niskowęglowej. Dokładne omówienie tych przebiegów zawiera praca [117,118].



Rys.7.3a. Przebieg wybranych wielkości elektromagnetycznych w czasie nagrzewania. Stan zimny

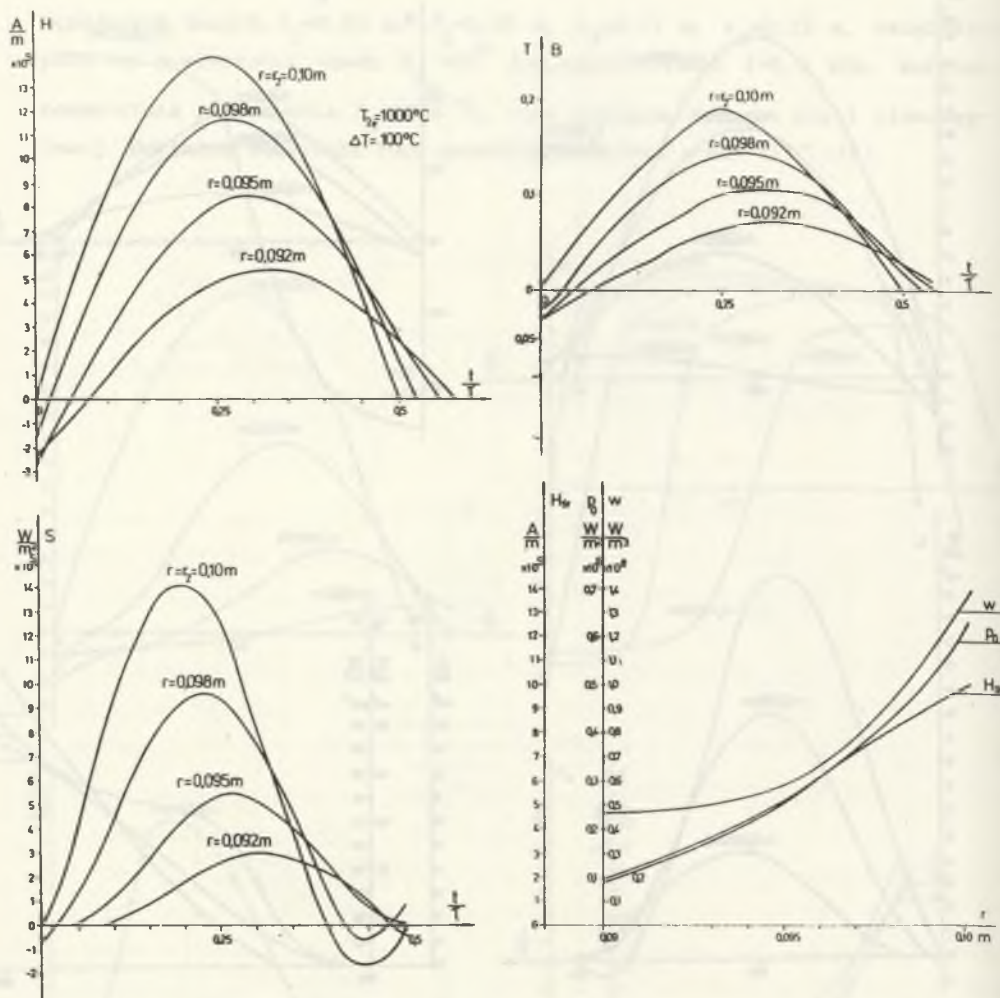
Fig.7.3a. Waveforms of chosen electromagnetic quantities during the heating process. Cold state



Rys. 7.3b. Przebieg wybranych wielkości elektromagnetycznych w czasie nagrzewania. Stan przejściowy

Fig. 7.3b. Waveforms of chosen electromagnetic quantities during the heating process. Transient state

Program może pracować przy przyjęciu stałej i zmiennej częstotliwości prądu wzbudnika. W tym drugim przypadku zawiera on blok korekcji częstotliwości, w którym oblicza się nową wartość częstotliwości korzystając z wartości R, L, C obwodu obciążenia domniemanego falownika równoległego prą-

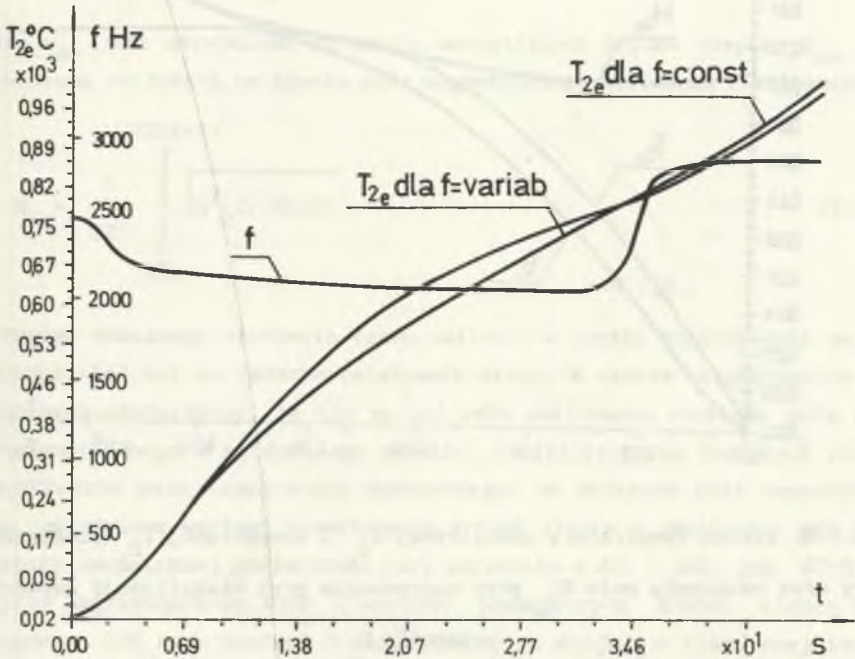


Rys.7.3c. Przebieg wybranych wielkości elektromagnetycznych w czasie nagrzewania. Stan gorący

Fig.7.3c. Waveforms of chosen electromagnetic quantities during the heating process. Hot state

du. Ponieważ do obliczenia nowej wartości częstotliwości, która będzie stosowana w obliczeniach w następnym przedziale temperatury, używa się wartości  $R, L, C$  z przedziału poprzedniego i nie oblicza się wartości częstotliwości w sposób iteracyjny (patrz rozdział 8), można mówić tylko o

przybliżonej korekcji częstotliwości, a nie o jej dokładnym obliczeniu. Ponieważ korekcja częstotliwości wymaga obliczenia z wielkości polowych rezystancji i indukcyjności wsadu, powoduje ona znaczne wydłużenie czasu obliczeń. Przykład nagrzewania przy stałej i zmiennej częstotliwości pokazano na rys. 7.4.

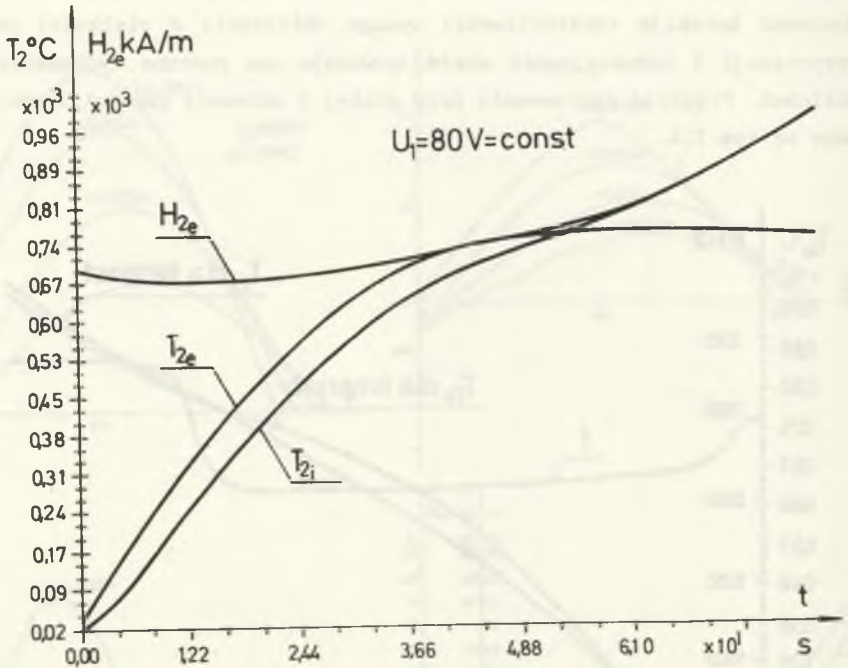


Rys. 7.4. Wpływ przyjęcia do obliczeń stałej i zmiennej częstotliwości  $f$  prądu wzbudnika na proces nagrzewania

Fig. 7.4. Influence of taking into account constant and varying frequencies  $f$  of the coil current on the heating process

Na kolejnym rysunku (rys. 7.5) pokazano przebieg nagrzewania rury, ale przy stabilizacji napięcia wzbudnika ( $U_1=80$  V). Zaskakująca jest mała zmiana natężenia pola  $H_{2e}$  (prądu wzbudnika  $I_1$ ) w trakcie procesu nagrzewania. Zakładając prostokątny kształt przebiegu  $H_{2e}(t)$  stwierdzono również niewielki wpływ odkształcenia pola wymuszającego od sinusoidy na końcowy rozkład temperatury.





Rys.7.5. Wzrost temperatury zewnętrznej  $T_{2e}$  i wewnętrznej  $T_{2i}$  powierzchni rury oraz natężenia pola  $H_{2e}$  przy nagrzewaniu przy stabilizacji napięcia wzbudnika  $U_1$

Fig.7.5. Rise of temperature of the external  $T_{2e}$  and internal  $T_{2i}$  surfaces of the pipe and magnetic field intensity  $H_{2e}$  in induction heating with the stabilized coil voltage  $U_1$

### 7.2.2. METODA UŚREDNIANIA

Porównanie zastępczych stałych czasowych procesów termokinetycznych i elektromagnetycznych pokazuje, że różnią się one co najmniej o dwa rzędy. Dlatego też rozwiązywanie równań dla obu pól z tym samym krokiem czasowym jest nieefektywne. Chcąc skrócić czas obliczeń zastosowano znaną z mechaniki nieliniowej metodę "uśredniania" [37]. Główna idea tej metody polega na wydzieleniu dwóch zjawisk - "szybkich" (w naszym przypadku elektromagnetycznych) i "wolnych" (termokinetycznych). Zakłada się, że pole elektromagnetyczne jest okresowe pomiędzy dwoma chwilami czasowymi, w których ob-

licza się pole temperatury. Prowadzi to do częściowego rozprzęgnięcia pola elektromagnetycznego i pola temperatury i zastąpienia w równaniu (7.2) chwilowej wartości wewnętrznych źródeł ciepła ich wartością uśrednioną:

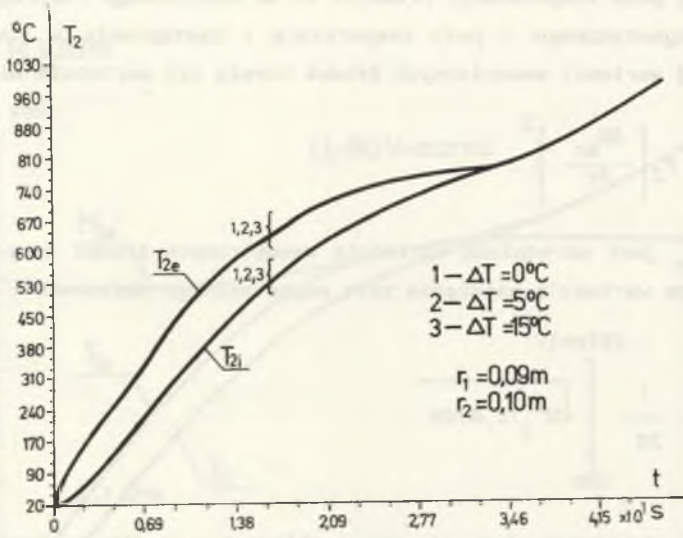
$$w_{sr} = \sigma_2 \left( \frac{\partial H_{sr}}{\partial r} \right)^2 \quad (7.15)$$

gdzie  $w_{sr}$  jest uśrednioną wartością wewnętrznych źródeł ciepła;  $H_{sr}$  jest uśrednioną wartością natężenia pola magnetycznego obliczoną z zależności:

$$H_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \sqrt{H_2^2(r, \theta)} d\theta \quad (7.16)$$

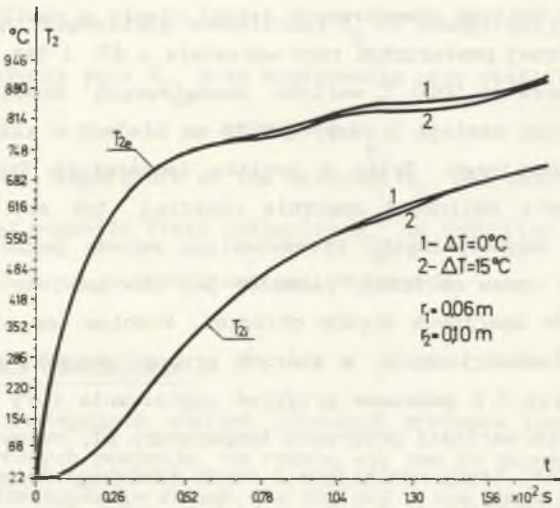
$n=0, 1, 2, \dots$

Pomimo znacznego skrócenia czasu obliczeń w wyniku zastosowania metody "uśredniania" był on jeszcze relatywnie długi. W czasie eksperymentów numerycznych stwierdzono, że nie ma potrzeby obliczania rozkładu pola elektromagnetycznego w każdym jego okresie; nie stwierdzono znacznych różnic w rozkładzie pola temperatury wprowadzając do obliczeń pola temperatury nową, uśrednioną wartość wewnętrznych źródeł ciepła w chwilach, gdy temperatura zewnętrznej powierzchni rury wzrastała o  $\Delta T$ . I tak, gdy  $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ , to przy nagrzewaniu do  $1000^\circ\text{C}$  wartość wewnętrznych źródeł ciepła była korygowana 200 razy zamiast 3 razy, jak to ma miejsce w klasycznej teorii grzejnictwa indukcyjnego. Tylko w pobliżu temperatury Curie wewnętrzne źródła ciepła były obliczane znacznie częściej, tak aby nie przeoczyć punktu przemian magnetycznych. Przedstawiona metoda pozwala na 8...10-krotne skrócenie czasu obliczeń, niemniej jej nieodpowiednie zastosowanie może prowadzić do znacznych błędów obliczeń. Problem ten nie występuje w przypadku rur cienkościennych, w których grubość ścianki nie przekracza 10...20 mm. Na rys.7.6 pokazano przykład nagrzewania rury (o danych jak wyżej) dla różnych wartości przyrostu temperatury  $\Delta T$ , równych  $5^\circ\text{C}$ ,  $10^\circ\text{C}$  i  $15^\circ\text{C}$ . Jak widać, błędy wynikające z coraz rzadszego korygowania wartości wewnętrznych źródeł ciepła są pomijalnie małe. W przypadku wzrostu grubości ścianki rury ( $r_1=0,10\text{ m}$ ,  $r_2=0,06\text{ m}$ ) obserwuje się większe różnice w obliczonych dla różnych  $\Delta T$  temperaturach w ściance rury (rys.7.7). Błędy te spowodowane są tym, że rozkład wewnętrznych źródeł ciepła jest zmieniający w zależności od temperatury zewnętrznej powierzchni rury i przy coraz



Rys. 7.6. Wpływ parametru uśrednienia  $\Delta T$  na dokładność obliczeń rozkładu temperatury. Rura cienkościenna

Fig. 7.6. Influence of averaging parameter  $\Delta T$  on accuracy of computations of temperature distribution. Thin wall pipe



Rys. 7.7. Wpływ parametru uśrednienia  $\Delta T$  na dokładność obliczeń rozkładu temperatury. Rura grubościenna

Fig. 7.7. Influence of averaging parameter  $\Delta T$  on accuracy of computations of temperature distribution. Thick wall pipe

rzadszym jego korygowaniu, zaczyna on w głębszych warstwach rury coraz bardziej odbiegać od rozkładu rzeczywistego. W tych przypadkach pole elektromagnetyczne nie powinno być obliczane rzadziej niż co 15 °C.

### 7.2.3. WPLYW UŚREDNIENIA WSPÓLCZYNNIKÓW MATERIAŁOWYCH NA OBLICZANIE ROZKŁADU TEMPERATURY

Przedstawiony model został wykorzystany do określenia wpływu uśrednienia poszczególnych współczynników materiałowych wsadu na proces nagrzewania i określenia błędów, jakie popełniamy przyjmując do obliczeń uśrednione wartości niektórych z nich [126, 140].

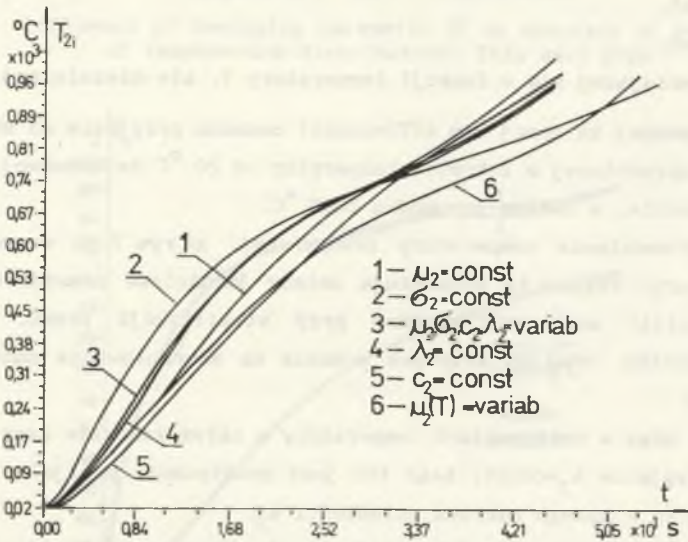
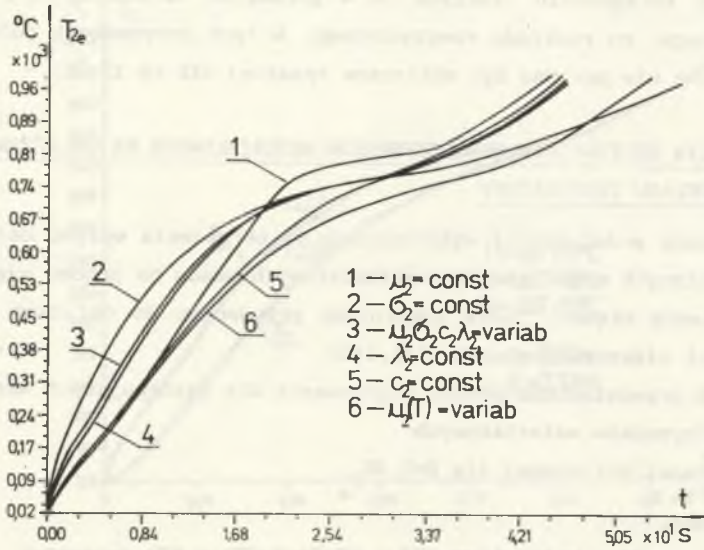
Na rys. 7.8 przedstawiono wyniki nagrzewania dla następujących wariantów wyboru współczynników materiałowych:

- 1 -  $\mu_2(H, T) = \text{const}$  obliczonej dla  $H=0,9H_{2e}$ ;
- 2 -  $\sigma_2(T) = \text{const}$ ;
- 3 - wszystkie współczynniki tj.  $\sigma_2(T), \mu_2(H, T), \lambda_2(T), c_2(T)$  zmienne;
- 4 -  $\lambda_2(T) = \text{const}$ ;
- 5 -  $c_2(T) = \text{const}$ ;
- 6 -  $\mu_2(T)$  zmieniającej się w funkcji temperatury  $T$ , ale niezależnej od  $H$ .

Ustalenie pewnej zmiennej (np.  $\lambda(T) = \text{const}$ ) oznacza przyjęcie do obliczeń jej wartości uśrednionej w zakresie temperatur od 20 °C do końcowej temperatury nagrzewania, w naszym przypadku 1000 °C.

Rys. 7.8a przedstawia temperatury zewnętrznej, a rys. 7.8b wewnętrznej powierzchni rury. Krzywe te prezentują zmiany jakościowe prawidłowe przy nagrzewaniu stali węglowych zarówno przy stabilizacji prądu, jak i napięcia wzbudnika. Analiza krzywych pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

- najmniejszy błąd w obliczeniach temperatury w całym zakresie nagrzewania powoduje przyjęcie  $\lambda_2 = \text{const}$ ; błąd ten jest praktycznie pomijalny a jego wartość wynika z małego zakresu zmienności  $\lambda_2$ ;
- przyjęcie  $c_2 = \text{const}$  powoduje duże błędy przed osiągnięciem punktu Curie;
- przyjęcie  $\sigma_2 = \text{const}$  powoduje bardzo duże błędy w całym zakresie nagrzewania;
- przyjęcie  $\mu_2(H, T) = \text{const}$  i  $\mu_2(H) = \text{const}$  powoduje odpowiednio duże i bardzo duże błędy w całym zakresie nagrzewania;
- błędy w obliczeniach temperatury wewnętrznej powierzchni rury są nieco mniejsze niż przy obliczeniach temperatury powierzchni zewnętrznej.



Rys. 7.8. Wpływ uśrednienia współczynników materiałowych wsadu na dokładność obliczeń temperatury zewnętrznej  $T_{2e}$  (a) i wewnętrznej  $T_{2i}$  powierzchni rury

Fig. 7.8. Influence of averaging material coefficients of the charge on accuracy of computations of temperature of external  $T_{2e}$  (a) and internal  $T_{2i}$  (b) surfaces of the pipe

Jedynie przyjmowanie  $\lambda(T)_2 = \text{const}$  nie prowadziło do powstawania dużych błędów obliczeń. Uśrednienie pozostałych wartości, przynajmniej w tak szerokim zakresie temperatur, należy uznać za niedopuszczalne. Dalsze prace związane z tym zagadnieniem powinny zmierzać do określenia niezbędnej liczby przedziałów temperatury, na które należy podzielić proces nagrzewania, tak aby błąd obliczeń temperatury nie przekroczył pewnej określonej wartości.

### 7.3. MODEL DWUWYMIAROWY NAGRZEWNICY PRZELOTOWEJ

#### 7.3.1. UWAGI WSTĘPNE

Modelowanie sprzężonych zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w przelotowych nagrzewnicach indukcyjnych jest zadaniem znacznie trudniejszym niż modelowanie tych samych zjawisk w nagrzewnicach okresowych. Wymaga ono uwzględnienia w opisie matematycznym wpływu ruchu na procesy elektromagnetyczne i termokinetyczne, co jak zostanie pokazane; powoduje poważne trudności przy uzyskaniu numerycznie stabilnego rozwiązania. Wymaga również przyjęcia znacznie bardziej złożonych algorytmów pozwalających zamodelować nagrzewanie wsadu przesuwającego się przez szereg wzbudników zasilanych z niezależnych źródeł wywołujących różne warunki wymuszenia pola elektromagnetycznego w każdym wzbudniku. Prowadzi to do konieczności zastosowania wielokrotnych procedur iteracyjnych i w konsekwencji do bardzo długich czasów obliczeń.

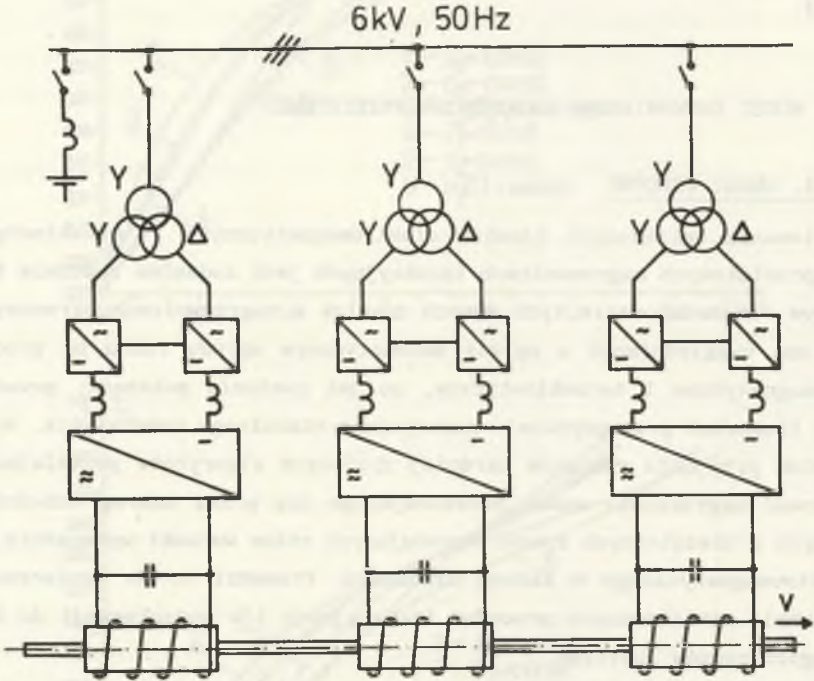
Program symulacji pracy nagrzewnicy przemysłowej powinien umożliwić śledzenie nie tylko normalnej pracy nagrzewnicy, ale również wszystkich jej awaryjnych stanów pracy.

Modelowanie tego typu zjawisk, szczególnie w przypadku wsadów ferromagnetycznych, pomimo znacznego rozpowszechnienia w przemyśle nagrzewnic przelotowych, opisano dotychczas w bardzo niewielu publikacjach [48,61, 87,148]. Omówione w nich modele matematyczne procesu nagrzewania uwzględniają wpływ ruchu wsadu jedynie na pole temperatury bez modyfikacji pola elektromagnetycznego. Umiejętność oceny wpływu prędkości przesuwu na końcowy rozkład temperatury we wsadzie jest podstawowym zagadnieniem przy rozpatrywaniu nagrzewnicy przelotowej jako obiektu regulacji-prędkość obok mocy źródła zasilania jest podstawową zmienną sterującą.

W pracy [130] autora zbudowano szereg modeli, w których uwzględniono

wpływ ruchu na zjawiska elektromagnetyczne i termokinetyczne. Modele te wykorzystywały w przypadku pola temperatury m.in. metodę źródła ruchomego i metody przekształceń Laplace'a i Hankela, a w przypadku pola elektromagnetycznego metodą równań całkowych. Nie uwzględniały one sprzężenia i nieliniowości pól.

Szkic zasilania nagrzewnicy przelotowej rur pokazano na rys.7.9.



Rys.7.9. Szkic zasilania nagrzewnicy przelotowej

Fig 7.9. Schematic diagram of the supply system of the continuous heater

### 7.3.2. OGÓLNA KONCEPCJA MODELU

Przy nagrzewaniu przelotowym parametry materiałowe wsadu i warunki graniczne dla pola temperatury i pola elektromagnetycznego zmieniają się wzdłuż wzbudnika, np. rura wchodząca ma własności ferromagnetyczne, a opuszczająca go już je utraciła, inne są warunki wymiany ciepła na długości wzbudnika. Osobnym problemem jest wstępne ustalenie warunków zasilania nagrzewnicy. Do obliczenia wymuszenia pola elektromagnetycznego potrzebna jest znajomość prądu lub napięcia wzbudnika, a można je ustalić dopiero wtedy, gdy znamy parametry elektrycznego schematu zastępczego nagrzewnicy.

Chcąc je obliczyć, musimy na początku obliczeń założyć pewien rozkład temperatury wzdłuż długości nagrzewnicy  $T(z)$ , a po zakończeniu obliczeń porównać rozkład otrzymany z tym wstępnie założonym. Prowadzi to do czasochłonnych, wymagających obliczeń całego cyklu nagrzewania, iteracji. Bardzo pomocne w ustaleniu pierwotnego rozkładu temperatury mogą być dane eksperymentalne.

Prostszym podejściem do problemu jest "śledzenie" w trakcie obliczeń pewnego wybranego przekroju wsadu. Założenie to jest do przyjęcia w liniach przemysłowych składających się zazwyczaj z wielu krótkich wzbudników, w których przyrost temperatury i związane z nim zmiany parametrów wsadu są ograniczone.

Założono, że program powinien pozwalać obliczać rozkład potencjału wektorowego  $A$  w stanach quasi-ustalonych oraz temperatury we wsadzie i wymurówce dla zadanych warunków początkowych  $T$  dla wsadu nieruchomego i ruchomego ( $\pm v$ ) w stanach cieplnie ustalonych i nieustalonych.

Uproszczony schemat blokowy programu pokazano na rys.7.10. Istotą przedstawionego algorytmu są cztery jego podstawowe bloki:

- blok obliczeń sprzężonych pól dwuwymiarowych dla przyjętej wcześniej wartości napięcia  $U_1$  lub prądu wzbudnika  $I_1$ ;
- blok obliczeń rezystancji i reaktancji nagrzewnicy oparty na obliczonym z rozkładu pola elektromagnetycznego zespolonym wektorze Poyntinga;
- blok obliczania rzeczywistych wartości napięcia  $U_1$  lub prądu wzbudnika  $I_1$  oparty na metodzie oporów magnetycznych [146];
- blok korekcji napięcia  $U_1$  lub prądu wzbudnika  $I_1$  w przypadku, gdy wartość zadana do obliczeń i wartość rzeczywista różnią się więcej niż zostało to dopuszczone.

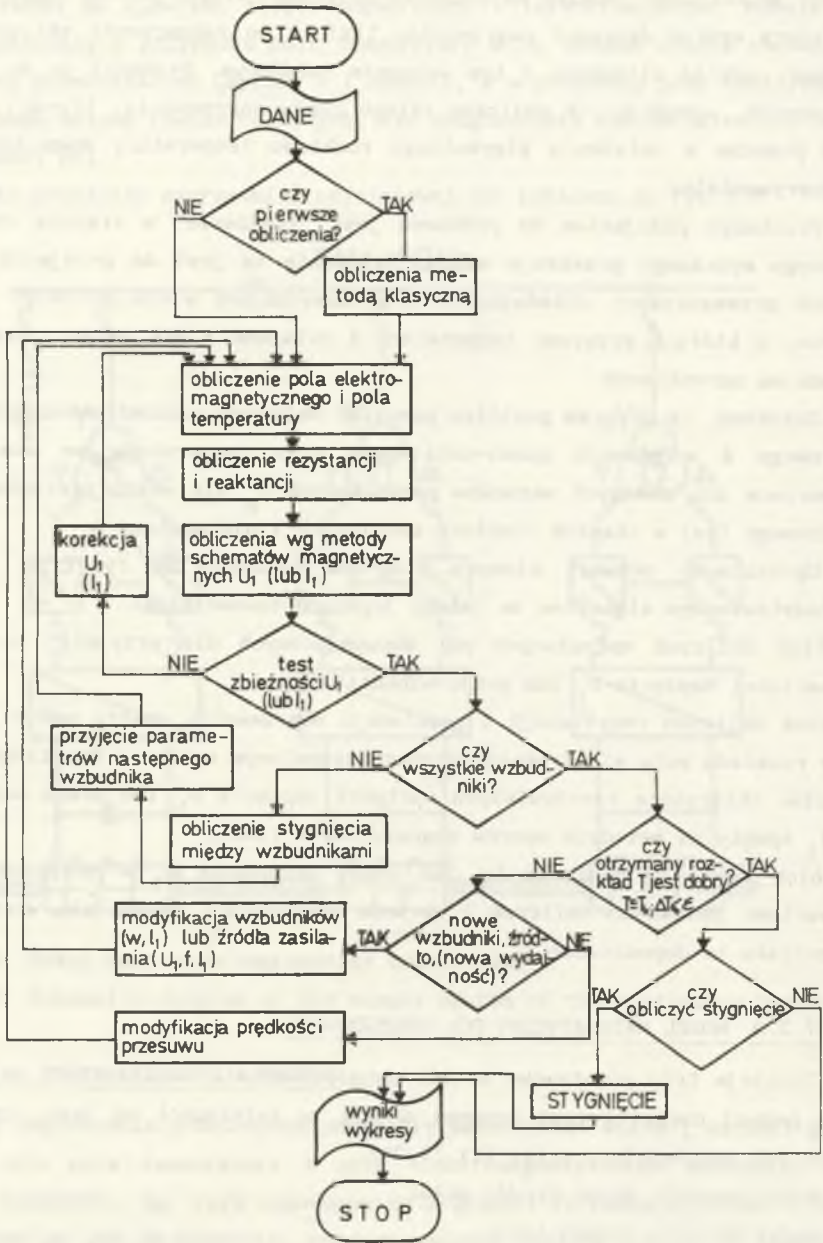
### 7.3.3. MODEL MATEMATYCZNY PÓL SPRZEŻONYCH

Istnieją trzy podstawowe metody uwzględnienia w obliczeniach pola, ruchu pewnej części rozpatrywanego układu, w zależności od tego, czy ruch może być uwzględniony przez [11,19,31].

- zmodyfikowanie opisu źródła pola;
- zmodyfikowanie równań pola;
- odpowiednią dyskretyzację równań pola.

Rozpatrywany problem pozwala na odpowiednią modyfikację równań pola i rozpatrywanie zagadnienia w nieruchomym układzie współrzędnych związanym ze wzbudnikiem.





Rys. 7.10. Uproszczony schemat blokowy programu obliczania pól w nagrzewnicy przelotowej rur

Fig. 7.10. Simplified flow chart of the program of computing fields in continuous heating of pipes

Pole elektromagnetyczne w nagrzewnicy przelotowej może być opisane równaniami Maxwella, które po wprowadzeniu potencjału wektorowego  $A$  przyjmą postać (4.10):

$$\nabla \times \left( \nu (\nabla \times A) \right) - \gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \gamma \nabla \times (\nabla \times A) = J_0 \quad (7.17)$$

Pole temperatury w układzie: nagrzewany wsad-wymurówka opisuje równanie Fouriera-Kirchhoffa (4.18):

$$\gamma_m c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\lambda \nabla T) + \gamma_m c \nabla T = w_0 \quad (7.18)$$

Można zwrócić uwagę na mieszany, paraboliczno-eliptyczny typ tych równań.

Przyjmijmy dodatkowo następujące założenia upraszczające:

- wszystkie elektryczne i magnetyczne wielkości polowe są harmoniczne;
- pola elektromagnetyczne kolejnych wzbudników nie oddziałują na siebie wzajemnie;
- prąd  $J_0$  źródła ma tylko jedną składową w kierunku  $\theta$  walcowego układu współrzędnych;
- wektor prędkości liniowej  $V$  ma tylko jedną składową  $[0, 0, v_z]$ ;
- zakładamy, że do analizy "zadania zewnętrznego" można zastosować metodę oporów magnetycznych;
- rozpatrujemy przypadek, gdy każdy ze wzbudników zasilany jest z indywidualnego źródła zasilania o stałej częstotliwości, znanym napięciu lub znanym prądzie wyjściowym;
- pomija się nieustalony stan prędkości rury;
- zakłada się, że pomiędzy wzbudnikami następuje oddawanie ciepła do otoczenia o stałej temperaturze  $T_a$  oraz pomija się oddawanie ciepła do samotoku.

W ten sposób problem wektorowy trójwymiarowy opisany równaniami (7.17) i (7.18) staje się problemem skalarnym dwuwymiarowym na płaszczyźnie  $(r, z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \nu \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] + j \omega \gamma A_\theta + \gamma v_z \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = J_{0\theta} \quad (7.19)$$

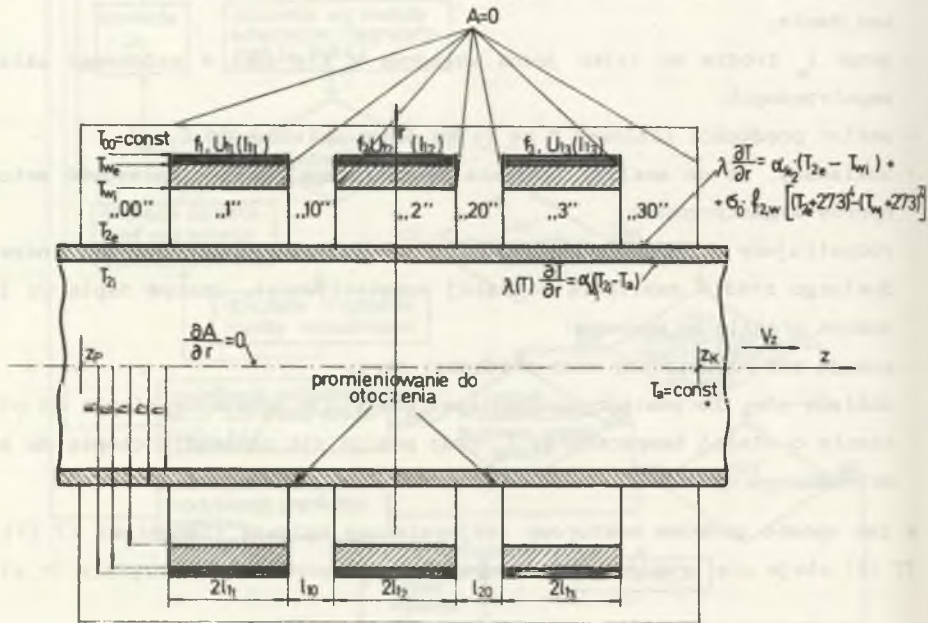
$$\gamma_m c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \gamma_m c v_z \frac{\partial T}{\partial z} = w_0 \quad (7.20)$$

gdzie na mocy założenia o harmoniczności przebiegów:

$$w_0 = \sigma \omega^2 \underline{A}_\theta \underline{A}_\theta^* \quad (7.21)$$

$\underline{A}_\theta^*$  jest wielkością sprzężoną z  $\underline{A}_\theta$ ;  $\omega$  jest częstością kołową źródła zasilania (w dalszej części pracy pomijać będziemy indeks  $\theta$ ).

Warunki graniczne dla równań (7.19) i (7.20) zostały pokazane na rys.7.11. Odpowiadają one przyjęciu założeń o zaniku pola magnetycznego w dostatecznie dużej odległości od wzbudnika ( $A=0$ ) i wykorzystaniu warunku symetrii na osi wzbudnika. Dla pola temperatury warunki brzegowe opisują wymianę ciepła przez promieniowanie i konwekcję w układzie rura-wymurówka-otoczenie. Zależność stałych materiałowych wsadu od temperatury została omówiona w aneksie A2. Przykład wyników modelowania nagrzewania przelotowego rur pokazano na rys.7.12.



Rys.7.11. Warunki graniczne dla modelu matematycznego nagrzewnicy przelotowej

Fig.7.11. Boundary conditions for the mathematical model of the continuous heater

7.3.4. ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH (MRS) DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ MODELU

7.3.4.1. MRS DLA RÓWNAŃ POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Do rozwiązania równań (7.19) i (7.20) zastosowano metodę różnic skończonych (MRS). Wprowadzono następujące siatki:

- względem współrzędnej r:  $r_1=0, r_2, \dots, r_1, \dots, r_M=r_5$  ze zmiennym w poszczególnych podobszarach krokiem  $h_i=r_i-r_{i-1}$  oraz  $h_1=0,5(h_1+h_{i+1})$
- względem współrzędnej z:  $z_1=z_p, z_2, \dots, z_k, \dots, z_N=z_k$  ze zmiennym w poszczególnych podobszarach krokiem  $l_k=z_k-z_{k-1}$  oraz  $l_k=0,5(l_k+l_{k+1})$ ;
- względem współrzędnej t: równomierną  $t_j=j\Delta t$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) z krokiem  $\Delta t$  i siatkę małych kroków  $t_{j+1/2}=t_j+0,5\Delta t$ .

Rozwiązania równań szukać będziemy w obszarze:

$$Q = G \left( 0 \leq t \leq t_k \right), \quad (7.22)$$

gdzie  $G = \left( 0 \leq r \leq r_5, z_p \leq z \leq z_k \right)$ .

Poszukiwane wielkości polowe A i T obliczać będziemy w punktach siatki podstawowej  $(r_1, z_k)$ , a wartości współczynników materiałowych w węzłach siatki przesuniętej  $(r_{i \pm 1/2}, z_{k \pm 1/2})$ .

Zastosowanie MRS do równania (7.19) opisującego pole potencjału A prowadzi przy użyciu schematu pięciopunktowego do układu równań różnicowych postaci (w równaniu tym oznaczono poszukiwany potencjał A przez U):

$$A(I,K)U(I-1,K) - B(I,K)U(I,K) + C(I,K)U(I+1,K) + D(I,K)U(I,K-1) - E(I,K)U(I,K) + F(I,K)U(I,K+1) = G(I,K), \quad (7.23)$$

w którym poszczególne współczynniki są opisane w pracy [131].

Wartości  $\nu$  obliczane były dla stali z krzywej magnesowania  $\nu=f(|B|)$ :

$$|B| = |\text{rot}A| = \sqrt{|B_r|^2 + |B_z|^2},$$

$$|B_r|^2 = B_r^* B_r^* ; \quad |B_z|^2 = B_z^* B_z^*, \quad (7.24)$$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} ; \quad B_z = \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r}$$

Równania typu (7.23) zapisane dla wszystkich punktów siatki przestrzennej  $(r_1, z_k)$  tworzą układ (MN) nieliniowych równań algebraicznych o zespo-

lonej macierzy współczynników. W przypadku rozwiązywania układu w dziedzinie liczb rzeczywistych konieczne jest zapisanie macierzy zespolonych w postaci macierzy rzeczywistych. Macierz współczynników  $S$  ma wtedy strukturę pasmową o szerokości pasma  $2M$ , w którym jedynie  $5$  przekątnych zawiera elementy niezerowe. W każdym układzie współrzędnych macierz  $S$  jest diagonalnie dominująca i ma własność (A) Younga [167]. Do zapamiętania tej macierzy zastosowano metodę nazywaną w technice macierzy rzadkich jako RR (C) O [103]. Można zauważyć, że wprowadzenie do obliczeń zmodyfikowanego potencjału wektorowego  $A = A_0 r$  prowadzi do symetrii operatorów różniczkowych względem zmiennych przestrzennych  $r, z$ , jednak obecność w równaniu (7.17) członu  $\nabla \times (\nabla \times A)$  powoduje po dyskretyzacji i tak niesymetrię macierzy współczynników.

#### 7.3.4.2. MRS DLA RÓWNAŃ POLA TEMPERATURY

Zagadnienie termokinetyczne w omawianej nagrzewnicy przelotowej rur przy podanych w p.2.3. założeniach opisuje równanie (7.20):

$$\gamma_m c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \gamma_m c v_z \frac{\partial T}{\partial z} = w_0 \quad (7.25)$$

Równanie w postaci (7.25) obowiązuje dla ruchomego wsadu, a po przyjęciu  $w_0 = 0$  i  $v_z = 0$  również dla wymurówki nagrzewnicy.

Równanie (7.25) można zapisać w postaci:

$$\gamma_m c \frac{\partial T}{\partial t} = L_1 T + L_2 T + w_0 \quad (7.26)$$

gdzie operatory różniczkowe  $L_1, L_2$  mają postać:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \gamma_m c v_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.27)$$

$$L_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (7.28)$$

Do rozwiązania równania (4.1) zastosowano MRS aproksymując operatory różniczkowe względem współrzędnych  $r$  i  $z$  odpowiednimi analogami różnicowymi  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$ :

$$\Lambda_1 T_1 = \left\{ \frac{1}{l_k} \left[ \frac{\lambda_{i,k+1/2} (T_{i,k+1} - T_{i,k})}{l_{k+1}} - \frac{\lambda_{i,k-1/2} (T_{i,k} - T_{i,k-1})}{l_k} \right] - v_z \frac{T_{i,k+1} - T_{i,k-1}}{l_{k+1} + l_k} \right\} \quad (7.29)$$

$$\Lambda_2 T_2 = \frac{1}{r_i h_i} \left\{ r_{i+1/2} \frac{\lambda_{i+1/2,k} (T_{i+1,k} - T_{i,k})}{h_{i+1}} - r_{i-1/2} \frac{\lambda_{i-1/2,k} (T_{i,k} - T_{i-1,k})}{h_i} \right\} \quad (7.30)$$

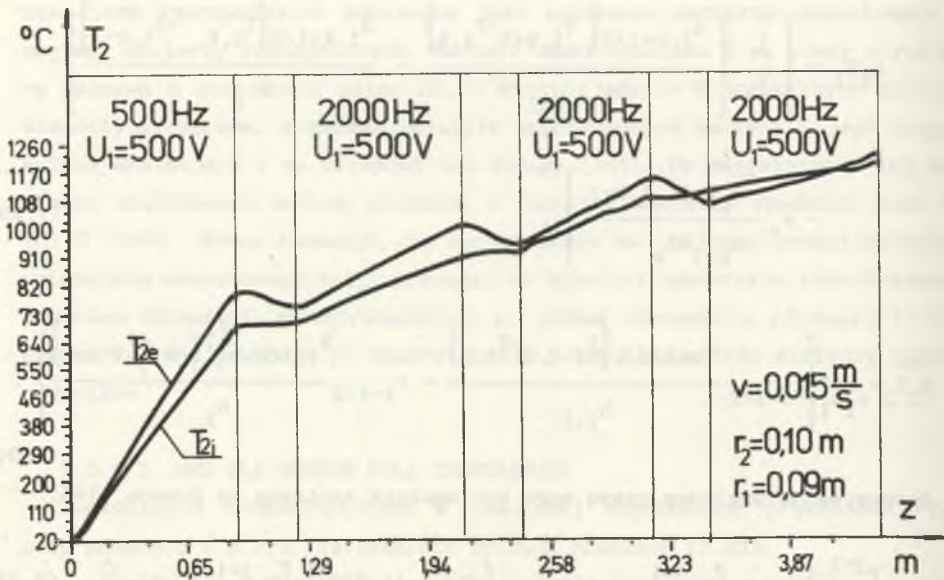
Aproksymacja względem czasu może być ogólnie zapisana za pomocą [165]:

$$\gamma_{c_m} \frac{T^{j+1} - T^j}{\Delta t} = \Lambda_1 [\Theta T^{j+1} + (1-\Theta) T^j] + \Lambda_2 [\Theta T^{j+1} + (1-\Theta) T^j] + [\Theta w^{j+1} + (1-\Theta) w^j] \quad (7.31)$$

Przyjmując w tym równaniu  $\Theta=0$ , otrzymamy schemat jawny,  $\Theta=1$  daje schemat niejawny, a dla  $\Theta=1/2$  otrzymamy oczywiście schemat Cranka-Nicolsona, najczęściej chyba stosowany z uwagi na swoją bezwzględną stabilność i dokładność rzędu  $O(\Delta t^2)$ . Otrzymywane jednak układy równań algebraicznych są pięciodiagonalne i do ich rozwiązywania nie można zastosować algorytmu Thomasa dla macierzy trójdiagonalnych [22, 98, 149, 163]. Opracowano więc tzw. metody ekonomiczne, np. naprzemiennych kierunków (ADI) lub metody lokalnie jednowymiarowe, których główna idea w stosowaniach do zagadnień parabolicznych polega na takim przejściu do kolejnej chwili czasu, aby możliwe było rozwiązywanie jedynie równań jednowymiarowych pozwalających na zastosowanie algorytmu Thomasa i skrócenie czasu obliczeń [110, 111].

Spośród wielu problemów związanych z rozwiązaniem przedstawionego modelu do szerszego omówienia zostały wybrane tylko dwa, stosunkowo słabo znane z zagadnień praktycznych:

- problemy numerycznego rozwiązywania równania paraboliczno-eliptycznego,
- zastosowanie metody ADI do zagadnień parabolicznych i eliptycznych.



Rys. 7.12. Rozkład temperatury wzdłuż długości nagrzewnicy przelotowej  
 Fig. 7.12. Temperature distribution along the length of the continuous heater

### 7.3.4.3. PROBLEMY NUMERYCZNEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNIANIA PARABOLICZNO-ELIPTYCZNEGO

Równanie typu (7.17), a więc ogólnej postaci:

$$\nabla \times \left[ \nu (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = \mathbf{J}_o - \gamma \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (7.32)$$

gdzie  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$  (7.33)

zawiera operator eliptyczny dla rozkładu przestrzennego  $\mathbf{A}$  i operator paraboliczny dla opisu prądów wirowych. Ten typ równania jest dobrze znany w mechanice płynów, przepływie ciepła i meteorologii, gdzie opisuje on mieszany problem konwekcji i dyfuzji.

Paraboliczny operator różniczkowy może być rozważany za pomocą procedury krokowej (time stepping), tak jak we wzorze (7.31).

Rozwiązanie numeryczne tego typu równań w przypadku, gdy konwekcja dominuje i równanie przybiera charakter równania hiperbolicznego, jest zazwyczaj

skomplikowane, ponieważ wtedy w rozwiązaniu numerycznym pojawiają się oscylacje. W pracy [104] stwierdzono po raz pierwszy, że trudności w rozwiązaniu są spowodowane głównie przez dyskretyzację przestrzenną. W pracach [14, 41, 43, 49, 98, 162, 169] podano warunki braku oscylacji w rozwiązaniu dla różnych sposobów aproksymacji pochodnych przestrzennych w MRS i w MES.

W przypadku równań wielowymiarowych można stwierdzić z dużym przybliżeniem, że użycie schematów jawnych wymaga dwukrotnego zmniejszenia kroku czasowego w przypadku dwuwymiarowym i potrójnego dla zagadnień trójwymiarowych. Schemat Cranka-Nicolsona jest zawsze bezwzględnie stabilny i rozwiązywalny (warunek dominacji wyrazów na przekątnej), gdy spełniony jest warunek podany w pracy [98]. Zastosowanie do aproksymacji członu konwekcyjnego różnicy "upwind" prowadzi do schematu bezwzględnie stabilnego i zawsze rozwiązywalnego [98].

Można stwierdzić, że do rozwiązania równania dyfuzyjno-konwekcyjnego mogą być stosowane wszystkie konwencjonalne schematy numeryczne, ale wszystkie one muszą używać dużej liczby elementów, węzłów i przedziałów czasowych w przypadku, gdy konwekcja dominuje. Można dodać, że proste schematy stosowane do równań jednowymiarowych nie dają się łatwo stosować do równań wielowymiarowych lub nieliniowych. Dlatego podejmuje się rozwiązanie tego typu równania w ruchomym układzie współrzędnych [162]. W cytowanych w literaturze przypadkach osiągnięto nawet dziesięciokrotne zmniejszenie kosztów obliczeń [49].

Innym sposobem uniknięcia oscylacji w równaniach zawierających czynnik uwzględniający ruch jest nieco inna dyskretyzacja pochodnych przestrzennych członu konwekcji. W pracy [1] stwierdzono, że dyskretyzacja Cranka-Nicolsona może powodować oscylacje dla problemów silnie nieliniowych. Zastosowano więc w niej aproksymację pochodnej czasowej  $\partial A/\partial t$  w postaci:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A^{J+1} - A^J}{\Delta t} \quad (7.34)$$

zaś pochodną  $\partial A/\partial x$  aproksymowano dla wartości z chwili poprzedniej:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{k+1}^J - A_{k-1}^J}{2\Delta x} \quad (7.35)$$

Zaletą zapisu  $\partial A/\partial x$  dla starej warstwy czasu jest zachowanie symetrii macierzy współczynników, ale powoduje to oczywiście pewien błąd obliczeń. Z uwagi jednak na fakt, że składowa "rotacji" w generowaniu prądów wirowych



jest znacznie mniejsza niż składowa "transformacji", błąd ten będzie miał niewielki wpływ na efekt nagrzewania. Wydaje się więc, że ten typ aproksymacji jest w pełni dopuszczalny w zagadnieniach nagrzewania przelotowego, chociaż nie był on stosowany w tej pracy.

#### 7.3.4.4. ZASTOSOWANIE METODY NAPRZEMIENNYCH KIERUNKÓW (ADI)

Naturalnym zastosowaniem metod ADI są oczywiście problemy niestacjonarne zawierające operator  $\partial \backslash \partial t$  [84]. Można jednak traktować rozwiązanie równania eliptycznego typu (7.19) jako stan ustalony równania o postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda_1 T + \Lambda_2 T. \quad (7.36)$$

Taka interpretacja pozwala na zastosowanie metody ADI do zagadnień opisanych równaniami eliptycznymi. Parametr  $\Delta t$  traci oczywiście w tym wypadku sens przyrostu czasu i staje się parametrem iteracji dobieranym z uwagi na minimalną liczbę iteracji, potrzebną do rozwiązania otrzymanego po dyskretyzacji przestrzennej układu równań algebraicznych.

Można przypomnieć, że zastosowanie metody ADI do równań parabolicznych wiąże się z podziałem każdego elementarnego kroku czasowego  $\Delta t$  na mniejsze kroki o długości związanej z ilością zmiennych przestrzennych. Pozwala to zapisać równanie (7.26) w postaci układu równań:

$$\gamma_m c \frac{T^{j+1/2} - T^j}{0,5\Delta t} = \Lambda_1 T^{j+1/2} + \Lambda_2 T^j + w_o^j, \quad t_j < t \leq t_{j+1/2}, \quad (7.37)$$

$$\gamma_m c \frac{T^{j+1} - T^{j+1/2}}{0,5\Delta t} = \Lambda_1 T^{j+1/2} + \Lambda_2 T^{j+1} + w_o^j, \quad t_{j+1/2} < t \leq t_{j+1}. \quad (7.38)$$

Zaletą metody naprzemiennych kierunków jest fakt, że w każdym przedziale czasowym  $\Delta t/2$  wymagane jest rozwiązanie jedynie trójdobnego układu równań algebraicznych. Wielu autorów uważa, że stosowanie metody ADI do rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowych jest ekonomicznie uzasadnione [97, 98, 111].

Rozważmy równanie rzędu drugiego w ogólnej postaci:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + eu = f. \quad (7.39)$$

Metoda ADI, podobnie jak inne metody różnic skończonych, prowadzi do

układu równań algebraicznych w ogólnej postaci:

$$Au = b \quad (7.40)$$

Zapiszmy macierz A układu (7.40) w postaci:

$$A = H+V+\Sigma \quad (7.41)$$

gdzie macierze H, V,  $\Sigma$  związane są z następującymi członami równania (7.39):

$$H: L_1 = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.42)$$

$$V: L_2 = b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Sigma: eu$$

W metodach ADI nie czyni się żadnych założeń odnośnie operatorów z wyjątkiem jednego naturalnego założenia o nieosobliwości operatorów  $(\omega_k^\alpha I + L_\alpha)$  dla  $\alpha=1,2$ . Dodatkowe założenia nakładane na operatory  $L_1, L_2$  są związane z możliwością wyboru optymalnych wartości parametrów iteracji  $\omega_k^1, \omega_k^2$ . Tymi dodatkowymi założeniami są samosprężenie i przemienność operatorów  $L_1$  i  $L_2$ . Operatory  $L_1$  i  $L_2$  w równaniu eliptycznym zapisanym we współrzędnych walcowych w przypadku symetrii osiowej są przemienne i samo-sprężone. Można jednak określić warunki zbieżności metody ADI również w przypadku ogólnym, tj. gdy operatory nie są przemienne [111].

Określmy teraz warunki, które będą równoważne założeniu przemienności operatorów  $L_1, L_2$ , a jakie muszą spełniać macierze H, V,  $\Sigma$ , tak aby metoda ADI była zbieżna. Definiując macierze  $A_1$  i  $A_2: A_1 = H+0,5\Sigma$  i  $A_2 = V+0,5\Sigma$ , tak że  $A = A_1 + A_2$ , warunek zbieżności rozwiązania równania (7.40) metodą ADI sprowadza się do założenia, że  $A_1, A_2$  muszą być symetryczne i dodatnio określone oraz  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ . Warunek przemienności jest niestety bardzo silny i jest spełniony tylko dla wąskiej klasy zagadnień brzegowych [149]. Mimo to praktyczne doświadczenia z metodami ADI nasuwają przypuszczenie, że sprzyjające własności tych metod zachodzą także często i w przypadku nieprzemiennym, gdy przy rozwiązaniu stosuje się ciąg parametrów optymalnych  $\omega_k$  wyznaczony dla przypadku przemiennego.

Po wprowadzeniu macierzy  $A_1, A_2$  można iteracyjnie poszukiwać rozwiązania układu (4.7) według zależności:

$$\begin{cases} (A_1 + \omega_{n+1} I)u = b - (A_2 - \omega_{n+1} I)u \\ (A_2 + \omega_{n+1} I)u = b - (A_1 - \omega_{n+1} I)u \end{cases} \quad (7.43)$$

Wybierając spośród wielu wariantów metod typu ADI metodę Peacemana-Rachforda można jej algorytm zapisać w postaci:

$$\begin{cases} (A_1 + \omega_{n+1} I) u^{(n+1/2)} = b - (A_2 - \omega_{n+1} I) u^{(n)}, \\ (A_2 + \omega_{n+1} I) u^{(n+1)} = b - (A_1 - \omega_{n+1} I) u^{(n+1/2)}. \end{cases} \quad (7.44)$$

Określenie optymalnego doboru ciągu parametrów  $\omega_k$  dla równania eliptycznego wymaga korzystania z funkcji eliptycznych Jacobiego i z numerycznego punktu widzenia pozostaje problemem nierozwiązanym. W praktyce korzysta się z algorytmów przybliżonego doboru  $\omega_k$  podanych przez Wachspressa lub Peacemana i Rachforda [98,149], który był wykorzystywany w tej pracy. Dotyczą one zagadnień płaskich z warunkami brzegowymi pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju przy spełnieniu założeń o stałości pewnych współczynników w tych warunkach [111]. Eksperymenty numeryczne wykazały, że zalecane ciągi  $\omega_k$  dają również dobrą zbieżność dla układów równań zespolonych.

Oto parę uwag na temat stabilności metody ADI. W przypadku dwuwymiarowym metoda ta jest bezwarunkowo stabilna, pomimo że każdy z jej elementarnych pólkroków jest warunkowo stabilny i posiada dokładność drugiego rzędu zarówno dla zmiennych przestrzennych, jak i czasu  $O[(\Delta r)^2, (\Delta z)^2, (\Delta t)^2]$ . Dla większej ilości wymiarów metoda może posiadać uwarunkowaną stabilność, ale zazwyczaj do stabilności całego układu wymagana jest stabilność operatora zawierającego największą liczbę pochodnych; pozostałe operatory mogą być niestabilne.

Można więc stwierdzić, że równanie typu:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ k_1 r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right] - qu = -f(r, z), \quad (7.45)$$

określone na prostokącie, na bokach którego zadane są kombinacje warunków brzegowych jednego z trzech typów i przy założeniach, że  $k_1 = k_1(r)$ ,  $k_3 = k_3(z)$ ,  $q = \text{const}$ , może być rozwiązane metodą naprzemiennych kierunków. Założenia o stałości  $q$  oraz zależności współczynników  $k$  tylko od jednej współrzędnej  $r$  lub  $z$  są istotne. Gdy chociaż jedno z tych założeń nie jest spełnione, to macierze  $A_1$  i  $A_2$  nie będą przemienne.

Zastosowanie metody ADI do pełnego równania transportu, tj. gdy jednocześnie występuje dyfuzja i konwekcja, nie zmienia bezwzględnej stabilności

ci metody. Stwierdzono, że może jednak nastąpić utrata bezwarunkowej stabilności metody przy rozwiązywaniu równań o zmiennych współczynnikach lub równań opisanych w obszarach innych niż prostokątne [111]. Pomimo to eksperymenty numeryczne pokazały, że metoda ADI może być stosowana do znacznie szerszej klasy równań różniczkowych niż równania o stałych współczynnikach w obszarach prostokątnych.

Porównując metodę ADI z innymi metodami iteracyjnymi, można stwierdzić, że osiągnięcie określonej dokładności wymaga  $\ln(1/\Delta x)$  iteracji przy wymiarze siatki  $\Delta x$  dążącym do 0 oraz  $1/\Delta x$  iteracji dla metody SOR lub iteracji Jacobiego z przyśpieszeniem Czebyszewa. Metoda ADI jest możliwa do zastosowania, jak się wydaje, do mniejszej klasy problemów niż metody pozostałe. Jej każdy krok jest znacznie bardziej pracochłonny niż w przypadku innych metod iteracyjnych, a jej większa szybkość zbieżności ujawnia się dopiero przy optymalnym doborze parametrów  $\omega_i$ . Obliczenia wykazały, że zakładając poprawność zastosowania ADI, istnieje taka wartość kroku przestrzennego  $\Delta x_s$ , że dla  $\Delta x > \Delta x_s$  metody typu SOR są zalecane, a dla  $\Delta x < \Delta x_s$  metoda ADI gwarantuje szybszą zbieżność.

#### 7.3.4.5. UWAGI NA TEMAT STOSOWANYCH METOD NUMERYCZNYCH

Zastosowanie MRS do zagadnienia elektromagnetycznego i termokinetycznego prowadziło do powstania dużych, rzadkich układów równań nieliniowych, które rozwiązywane były metodami iteracyjnymi. Przy rozwiązywaniu iteracyjnym równań nieliniowych należy rozróżniać tzw. iteracje zewnętrzne i wewnętrzne. W iteracjach zewnętrznych współczynniki równań algebraicznych są korygowane zgodnie z aktualnymi wartościami polowymi. W cyklach wewnętrznych zakłada się stałość  $\nu, \lambda, c$  i rozwiązuje się iteracyjnie liniowe układy równań. Eksperymentalnie stwierdzono, że nie ma sensu częściej modyfikować  $\nu$  niż co 5...6 cykli iteracji wewnętrznych. Do pól bardzo silnych stosowanych w grzejnictwie indukcyjnym parametr podrelaksacji wartości  $\nu$  ma małe wartości, w praktyce zawierające się w przedziale 0,05...0,1 i jego wpływ na przyspieszenie procesu iteracyjnego jest niewielki.

W pracy stosowano następujące algorytmy rozwiązywania równań liniowych:

- SOR (Successive Over Relaxation) dla zespolonej macierzy współczynników;
- ADI (Alternating Direction Implicite);
- CG (Conjugate Gradient).

Niesymetria macierzy S eliminuje zastosowanie metod właściwych układom symetrycznym, np. stosowanej obecnie powszechnie w MES metody ICCG [2,21].

SOR jest dla MRS metodą prawdopodobnie najbardziej efektywną i o dobrych podstawach matematycznych [22, 85, 98, 110, 111, ]. W pracy stosowano tę metodę do rozwiązywania układu równań o zespolonej macierzy współczynników. Dla równania Laplace'a lub Poissona dla pól elektro- lub magnetostatycznych, wartość współczynnika relaksacji  $\omega$  zawiera się - jak wiadomo - w przedziale  $1 \leq \omega < 2$  i istnieją dobrze opracowane metody wyznaczania optymalnej wartości  $\omega$  oraz przyspieszania zbieżności w trakcie obliczeń [22, 98, 149, 163]. Rozwiązywanie układu o zespolonej macierzy współczynników wymaga wyznaczenia zespolonego współczynnika relaksacji  $\omega_c$ . Interesujący sposób doboru zespolonej wartości  $\omega_c$  przedstawił Lehmann w pracy [73]. Umożliwia on numeryczne znalezienie parametrów iteracji stosując nowy, oryginalny sposób wyznaczania największej co do modułu wartości własnej  $\lambda_m$  macierzy Jacobiego. Metoda ta została wykorzystana w niniejszej pracy. Należy zaznaczyć, że nawet żmudne znalezienie wartości  $\lambda_m$  dla pewnego stanu układu nie gwarantuje uzyskania zbieżności metody SOR dla całego procesu nagrzewania - w trakcie procesu nagrzewania macierz współczynników ulega modyfikacji z uwagi na zależność  $\gamma(T)$  i  $\mu(H, T)$ . Eksperymenty numeryczne z zastosowaniem metody SOR do rozwiązywania układów równań zespolonych potwierdziły opinię o licznych przypadkach rozbieżności metody pomimo wyznaczania parametru  $\omega_c$  na drodze numerycznej a nie doboru metodą prób. Stwierdzono, że zespolony współczynnik relaksacji  $\omega_c$  zapewniający zbieżność dla macierzy współczynników wyznaczonej dla pewnej temperatury powodował rozbieżność procesu iteracyjnego dla macierzy współczynników wyznaczonej dla innej temperatury. Należałoby eksperymentalnie zbadać, jak często, tj. co jaki przyrost temperatury wsadu, trzeba obliczać ponownie wartości własne macierzy współczynników, tak aby zapewnić dostatecznie dużą zbieżność obliczeń.

Metoda, która dała bardzo dobre wyniki zbieżności, ale niestety również długie czasy obliczeń, była metoda sprzężonych gradientów CG. Zastosowany algorytm metody CG uwzględniał fakt, że macierz układu jest rzadka. Zbieżność w cyklach wewnętrznych otrzymywano po kilkudziesięciu iteracjach. Cykle zewnętrzne wymagały 20...30 iteracji.

Porównanie metod pod kątem zbieżności i szybkości obliczeń w przypadku zadania modelowego (równanie Poissona opisane na prostokacie) oraz szczegółowe uwagi na temat rozwiązywania równań nieliniowych zawiera praca [38].

#### 7.4. WNIOSKI

Doświadczenie, zdobyte przy budowie i użytkowaniu przedstawionych powyżej modeli numerycznych procesu nagrzewania indukcyjnego, pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

- modelowanie numeryczne stanowi obecnie podstawowe narzędzie badania nagrzewnic indukcyjnych o złożonej geometrii i złożonych warunkach zasilania; umożliwia uwzględnienie wszystkich cech nagrzewnic indukcyjnych wymienionych w p.2.1 i głębsze zrozumienie zachodzących procesów fizycznych;
- pod wieloma względami uzupełnia ono lub nawet przewyższa eksperyment rzeczywisty umożliwiając uzyskanie informacji o wielkościach trudnierzalnych lub wręcz niedostępnych na drodze pomiarowej; dotyczy to przede wszystkim pomiaru temperatury w przekroju wsadu;
- zapewnienie odpowiednich z technologicznego punktu widzenia warunków nagrzewania może być dokonane bądź na drodze kosztownych badań laboratoryjnych wspomaganych jedynie przybliżonymi metodami obliczeniowymi, bądź drogą numerycznej symulacji procesu nagrzewania;
- modele takie, oprócz oczywistej przydatności na etapie projektowania nagrzewnicy i jej źródła zasilania, są również niezwykle użyteczne dla technologów, jako że o jakości procesu nagrzewania decyduje zarówno końcowy rozkład temperatury, jak i niedopuszczenie do lokalnych przegrzań w czasie całego procesu nagrzewania; są powszechnie akceptowane na etapie projektowania oraz eksploatacji nagrzewnic;
- modele numeryczne charakteryzuje duża dokładność uzyskanych wyników, ale również bardzo długi czas obliczeń, stanowiący podstawową wadę modelowania numerycznego; czas obliczeń modelu dwuwymiarowego jest znacznie dłuższy niż modelu jednowymiarowego, należy więc dążyć do stosowania modelu jednowymiarowego w tych wszystkich zagadnieniach, w których pozwalają na to przesłanki fizyczne;
- w nagrzewnicach przelotowych energia elektromagnetyczna wnika prawie prostopadle do powierzchni wsadu, z wyjątkiem jego czołowych części, i dlatego pole elektromagnetyczne może być wyznaczane modelem jednowymiarowym, a efekty końcowe mogą być uwzględnione za pomocą metod analitycznych;
- przy rozwiązywaniu zadania termokinetycznego w takich nagrzewnicach dominuje przenoszenie ciepła związane z ruchem wsadu, pozwala to również

rozwiązywać zadanie jednowymiarowe, jedynie przy bardzo małych prędkościach przesuwu wsadu konieczne jest stosowanie modelu dwuwymiarowego, uwzględniającego przepływ promieniony ciepła.

## 8. SYMULACJA PROCESU NAGRZEWANIA INDUKCYJNEGO PRZY ZASILANIU NAGRZEWNICY Z TYRYSTOROWEGO FALOWNIKA RÓWNOLEGŁEGO PRĄDU

### 8.1. WSTĘP

Klasyczne metody projektowania nagrzewnic indukcyjnych, zasilanych najczęściej z sieci przemysłowej lub generatorów elektromaszynowych, zakładają spełnienie szeregu założeń upraszczających, a m.in. przyjęcia, że:

- moc powierzchniowa  $p_0$  lub gęstość strumienia ciepłego  $q$  są stałe w trakcie nagrzewania;
- częstotliwość pracy  $f$  źródła zasilania nagrzewnicy jest stała;
- wartości współczynników materiałowych wsadu  $\lambda, c, \sigma, \mu$  są stałe;
- parametry skupione  $R, L$  nagrzewnicy są znane.

Przykłady takich metod są przedstawione np. w pracach [71, 99, 100, 121, 146].

Wprowadzenie falowników półprzewodnikowych do zasilania nagrzewnic indukcyjnych spowodowało, że stosowanie klasycznych metod obliczania nagrzewnic przy zasilaniu z takich źródeł znacznie pogorszyło dokładność projektowania. Moc wyjściowa falownika, o ile nie posiada on układu stabilizacji mocy, i jego częstotliwość pracy mogą zmieniać się w trakcie nagrzewania w tak szerokich granicach, że nawet przybliżone traktowanie tych wielkości jako stałych może być niedopuszczalne. Powstała więc konieczność opracowania algorytmu symulacji procesu nagrzewania indukcyjnego przy zasilaniu nagrzewnicy ze źródeł półprzewodnikowych.

Poniżej przedstawiony zostanie algorytm symulacji procesu nagrzewania przy zasilaniu nagrzewnicy z tyrystorowego falownika równoległego prądu (TFRP). Symulacja ta miała następujące cele:

- zbadanie, jaki wpływ na proces nagrzewania ma TFRP i jego układ regulacji;
- zbadanie, jaki wpływ na pracę TFRP ma obciążenie w formie nagrzewnicy indukcyjnej;
- dostarczenie narzędzia użytecznego przy kontroli poprawności pracy falo-



wnika w stanach pracy nieustalonej i quasi-ustalonej;

- uzyskanie informacji użytecznych przy projektowaniu części siłowej falownika;
- określeniu struktur i nastaw regulatorów układu regulacji falownika.

## 8.2. TYRYSTOROWY FALOWNIK RÓWNOLEGŁY PRĄDU JAKO ŹRÓDŁO ZASILANIA NAGRZEWNIC INDUKCYJNYCH

### 8.2.1. WSTĘP

Typy i zasady działania falowników tyrystorowych zastosowanych w grzejnictwie indukcyjnym są dobrze opisane w literaturze [4, 35, 83, 102, 166]. Ponieważ podstawowym typem falownika stosowanym w przemyśle, szczególnie w zakresie dużych mocy, jest tyrystorowy falownik równoległy prądu (TFRP), wybrano ten typ falownika do dalszych rozważań. Głównymi zaletami tego falownika jest prosta budowa części siłowej, duża odporność na zwarcia, zdolność do pracy w szerokim zakresie częstotliwości wyjściowej (ok. 5:1), małe zniekształcenia generowane do sieci zasilającej, brak wewnętrznych elementów komutacyjnych i związana między innymi z tym jego wysoka sprawność. Do wad tego typu falowników literatura zalicza przede wszystkim złożony w porównaniu np. z falownikami napięcia układ sterowania i regulacji oraz problemy związane z tzw. "startem" falownika równoległego.

Nagrzewnica indukcyjna stanowi dla źródła zasilania szczególny rodzaj odbiornika. Cechami charakterystycznymi nagrzewnic indukcyjnych jako odbiorników energii elektrycznej są [50, 70, 120]:

- ciągle zmiany wartości rezystancji i indukcyjności nagrzewnicy w trakcie procesu nagrzewania;
- nieliniowy charakter obciążenia, zwłaszcza przy nagrzewaniu ferromagnetyków, wynikający z zależności parametrów nagrzewnicy od temperatury, pola elektromagnetycznego i częstotliwości;
- niski współczynnik mocy nagrzewnicy, co prowadzi do konieczności kompensacji mocy biernej poprzez włączenie baterii kondensatorów i powstania obwodu rezonansowego RLC o dużej dobroci ( $Q=2,5 \dots 20$ );
- duża dobroć  $Q$  obciążenia, co powoduje, że impedancja obciążenia widziana przez źródło zasilania może zmieniać się gwałtownie w odpowiedzi na małe zmiany parametrów wsadu lub częstotliwości; cecha ta bardzo niekorzystna przy zasilaniu z generatorów elektromaszynowych jest zazwyczaj bardzo

użyteczna przy zasilaniu z generatorów tyrystorowych, które pracując w pobliżu częstotliwości rezonansowej obciążenia dostarczają maksymalną moc do obciążenia.

Parametry nagrzewnic indukcyjnych do topienia, hartowania i nagrzewania skrósnego metali o mocy 25...250 kW charakteryzują zazwyczaj następujące wielkości:

- impedancja zastępcza  $Z_k = 0,4 \dots 0,8 \Omega$
- współczynnik mocy  $\cos\phi = 0,1 \dots 0,5$
- częstotliwość pracy  $f = 500 \dots 10000 \text{ kHz}$

Cytowane prace w większości nie uwzględniają jednak przedstawionej powyżej specyfiki nagrzewnic indukcyjnych, umożliwiając jedynie stwierdzenie poprawności pracy w wybranym punkcie pracy określonym przez wartości R,L nagrzewnicy. Proces projektowania powinien obejmować cały zakres możliwych zmian obciążeń falownika ze szczególnym uwzględnieniem stanów niestabilnych, np. rozruchu, zmian obciążenia przy wprowadzeniu lub opuszczeniu wzbudnika przez wsad, zwarciu itp.

Przedstawione poniżej zależności opisujące TFRP i krótki opis jego układu sterowania i regulacji są przydatne do zrozumienia algorytmu symulacji pracy takiego falownika zasilającego nagrzewnicę indukcyjną.

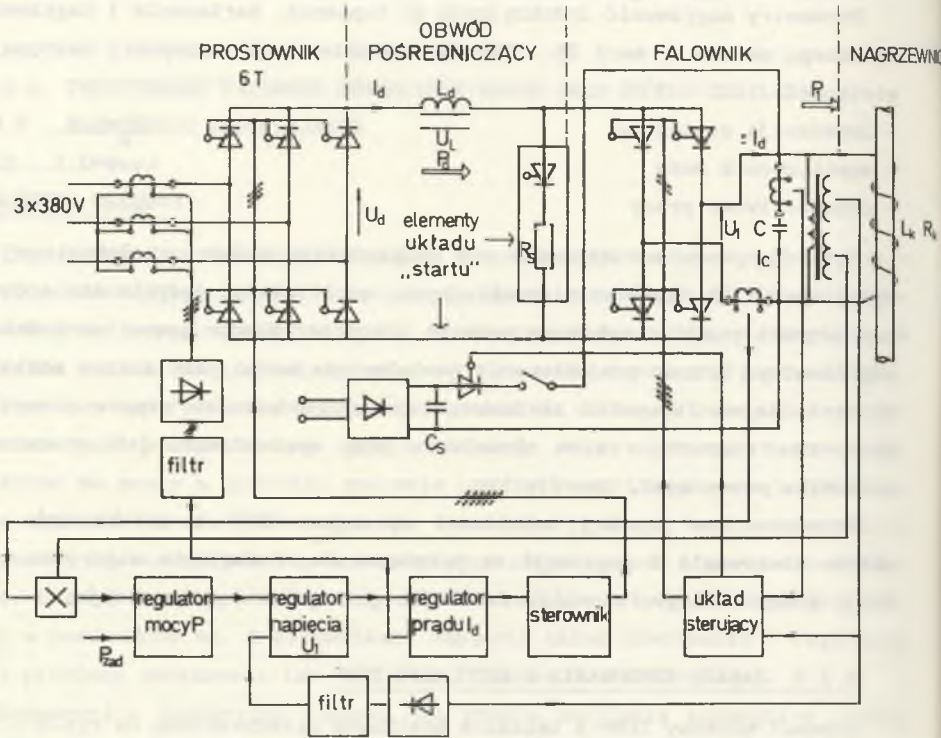
### 8.2.2. ZASADY STEROWANIA I REGULACJI TFRP

Schemat blokowy TFRP w układzie mostkowym przedstawiono na rys.8.1. Nakładane zazwyczaj ograniczenia na wielkości elektryczne w TFRP są następujące:

- $I_d \leq I_{d_{\max}}$  wynika ono zazwyczaj z ograniczonej obciążalności prądowej tyrystorów i dławika w obwodzie pośredniczącym;
- $U_1 \leq U_{1_{\max}}$  wynika ono z ograniczonej wytrzymałości napięciowej dielektryka kondensatora komutacyjnego lub rzadziej z klasy napięciowej tyrystorów falownika;
- $t_d \geq t_q$  wynika ono z konieczności utrzymania czasu dysponowanego na komutację  $t_d$  większego od katalogowego czasu odzyskiwania własności zaworowych  $t_q$ ; warunek ten pociąga za sobą ograniczenie  $f_{\max}$ .

Schemat układu regulacji TFRP przedstawiony na rys.8.1 zapewnia spełnienie powyższych ograniczeń nałożonych na  $I_d$ ,  $U_1$  i  $f$ . Dodatkową nadrzędną pętlą regulacji może być pętla regulacji mocy czynnej  $P_1$  dostarczonej do obciąż-

żenia. Dokładny opis układu regulacji TFRP oraz metodę syntezy struktur i nastaw poszczególnych regulatorów można znaleźć w pracy [56].



Rys.8.1. Schemat blokowy nagrzewnicy indukcyjnej zasilanej z tyrystorowego falownika równoległego prądu

Fig.8.1. Block diagram of the induction heater supplied from the thyristor current fed parallel inverter

W TFRP w roli zmiennych sterujących mocą dostarczoną do obciążenia mogą być użyte: napięcie wyjściowe prostownika  $U_d$ , częstotliwość pracy falownika  $f$  i wartość pojemności  $C$ . Wartości  $U_d$  i  $f$  mogą zmieniać się w pewnym obszarze w sposób płynny, a wartości  $C$  można zmieniać w praktyce tylko skokowo. Spośród możliwych kombinacji wielkości  $U_d, C, f$  w praktyce wykorzystuje się zazwyczaj wariant  $U_d = \text{variab}, f = \text{variab}$  i  $C = \text{const}$ . Warunek zmiennej częstotliwości  $f$  nie oznacza oczywiście możliwości jej dowolnej zmiany w trakcie pracy falownika - częstotliwość pracy falownika dostrajana jest do

częstotliwości narzuconej w każdej chwili przez częstotliwość rezonansową obwodu R,L,C obciążenia falownika. Możliwe są dwa warianty układów regulacji częstotliwości pracy falownika:

- układy pracujące wg zasady stałego kąta wyłączenia tyrystorów;
- układy pracujące wg zasady stałego czasu dysponowanego na wyłączenie tyrystorów.

Oba układy zostały dokładnie opisane w pracy [123] oraz są przedmiotem dwóch patentów [144,145]. Układem zdecydowanie częściej stosowanym w rozwiązaniach praktycznych jest układ stałego czasu wyłączenia. Układy kontroli i zabezpieczenia falownika gwarantujące jego poprawną i bezpieczną pracę zostały również opatentowane [57,58].

### 8.2.3. METODY ANALIZY PRACY TFRP

Obliczenie napięć i prądów w przekształtnikach półprzewodnikowych wymaga rozwiązania złożonego układu równań algebraiczno-różniczkowych.

Wśród metod analizy procesów elektromagnetycznych w TFRP najczęściej stosowane są: metoda modelowania analogowego [123], metoda przekształcenia Laplace'a i przekształcenia "z", metoda "pierwszej harmonicznej" [142, 143], metoda spektralno-operatorowa, metoda zmiennych stanu, modelowanie stało- i zmiennostrukturalne. Należy podkreślić, że wszystkie te metody zakładają znajomość i niezmiennność parametrów R,L nagrzewnicy. Poważne problemy natury obliczeniowej pojawiają się przy próbach symulacji pracy TFRP zasilającego nagrzewnicę indukcyjną, która jak już powiedziano, stanowi obiekt o stałych rozłożonych, niestacjonarny i silnie nieliniowy. Postępowanie polegające na bezpośrednim całkowaniu równań różniczkowych opisujących stan elektromagnetyczny falownika i równań polowych pozwalających wyznaczyć parametry obciążenia jest nawet przy zastosowaniu bardzo szybkich komputerów nie do przyjęcia w praktyce z uwagi na bardzo długi czas obliczeń [18,29].

W pracy posłużono się dwoma metodami pozwalającymi badać współpracę TFRP z nagrzewnicą indukcyjną:

- do analizy stanów nieustalonych i quasi-ustalonych w TFRP opisano TFRP układem obwodowych równań różniczkowych zwyczajnych modelując obciążenie w różny sposób, ale zakładając, że w trakcie pracy jego parametry nie zmieniają pod wpływem przyrostu temperatury;
- do analizy stanów quasi-ustalonych w TFRP i śledzenia całego procesu na-

grzewania wsadu opisano TFRP metodą "pierwszej harmonicznej", a obciążenie modelowano stosując analityczne metody opisu pola temperatury i pola elektromagnetycznego.

Postępowanie takie, jakkolwiek uproszczone, pozwala symulować pracę TFRP w praktycznie wszystkich stanach jego pracy. Analiza stanów quasi-ustalonych pozwala ocenić parametry energetyczne urządzenia i analizować quasi-ustalone procesy elektromagnetyczne w części siłowej. Pozwala również wyznaczyć charakterystyki statyczne falownika, umożliwia przeprowadzenie analizy harmonicznej przebiegów wyjściowych i napięć zasilających oraz określić obszar stabilnej pracy układu i czułość układu na zmiany parametrów układu związane ze zmianami obciążenia, rozrzutem technologicznym elementów falownika i starzeniem się jego elementów. Stany nieustalone interesują nas przede wszystkim przy rozruchu i przy awariach oraz przy identyfikacji falownika jako obiektu regulacji.

#### 8.2.4. SYMULACJA PRACY TFRP ZASILAJĄCEGO NAGRZEWNICĘ INDUKCYJNA

Zakładają spełnienie następujących założeń dotyczących falownika i nagrzewnicy:

- zawory są idealnymi kluczami, tj. pomija się stany dynamiczne zaworów a ich charakterystyki statyczne aproksymuje się modelem dwustanowym;
- komutacja tyrystorów jest natychmiastowa;
- pomija się wpływ szeregu elementów falownika rzeczywistego np. zabezpieczeń zaworów, elementów pomiarowych;
- pomija się parametry R,L sieci zasilającej;
- wszystkie elementy bierne RLC są idealne;
- parametry R,L nagrzewnicy są znane,

można zapisać różniczkowe równania stanu falownika w postaci:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_d} (u_d \pm u_1) , \quad (8.1a)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_k} (u_1 - k_{k+1}) , \quad (8.1b)$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C} (\pm i_d - i_1) . \quad (8.1c)$$

Znak "+" lub "-" określa się w zależności od aktualnie obowiązującej struktury falownika.

W modelu numerycznym opartym na równaniach (8.1) uwzględniono regulator prądu  $I_d$  obwodu pośredniczącego typu P lub PI oraz regulator napięcia wyjściowego falownika  $U_1$  typu P. Zamodelowano również regulator czasu komutacji tyrystorów RTK działający dokładnie tak jak regulator falownika rzeczywistego. Model pozwala na prowadzenie symulacji rozruchu w przypadku blokady i bez blokady regulatora RTK. Jako model prostownika tyrystorowego 6T przyjęto przebieg jego chwilowego napięcia wyjściowego  $u_d$  przy pominięciu komutacji tyrystorów prostownika.

Problemem znacznie trudniejszym było odpowiednie zamodelowanie obciążenia falownika. Można przypomnieć, że przyjęty model TFRP wymaga określenia skupionych wartości  $R_k$  i  $L_k$  obciążenia.

Naturalną metodą symulacji tego typu urządzeń jest zastosowanie metod obwodowo-polowych polegających na bezpośrednim całkowaniu równań różniczkowych opisujących stan elektromagnetyczny falownika i równań polowych pozwalających wyznaczyć parametry obciążenia. Zjawiska elektromagnetyczne we wsadzie opisano metodą analityczno-numeryczną przedstawioną w pracy [117], a równanie przewodnictwa cieplnego rozwiązywano metodą "prostych". Z uwagi na różnice w rzędach stałych czasowych procesów elektromagnetycznych i termokinetycznych pojawia się tzw. problem "szywnego" układu równań różniczkowych opisujących obie grupy zjawisk. Do rozwiązywania takiego układu równań stosowano najprostszą postać szywnego stabilnie algorytmu Geara, tj. algorytm ekstrapolacyjny Eulera [3,15,42]. Uzyskane wyniki były stabilne i obarczone małymi błędami, ale użycie metody było bardzo czasochłonne. Zastosowanie algorytmu Geara pozwoliło prawie o 40% skrócić czas obliczeń w porównaniu z przypadkiem użycia powszechnie stosowanej metody Rungego-Kutty IV rzędu. Pomimo długich czasów obliczeń podejście takie należy uznać za poprawne i należy go w przyszłości doskonalić zarówno pod względem modelu obciążenia jak i stosowanych metod numerycznych.

Poszukuje się również metod aproksymacyjnych dla tego typu zadań pozwalających uzyskać żądane wyniki przy akceptowalnych kosztach i czasie obliczeń. Przykładem takiej metody może być całkowanie układu równań stanu falownika i korzystanie z uprzednio obliczonych za pomocą dokładnych metod polowych charakterystyk nagrzewnicy, stanowiących swoisty "bank" informacji o układzie [9,53,54].

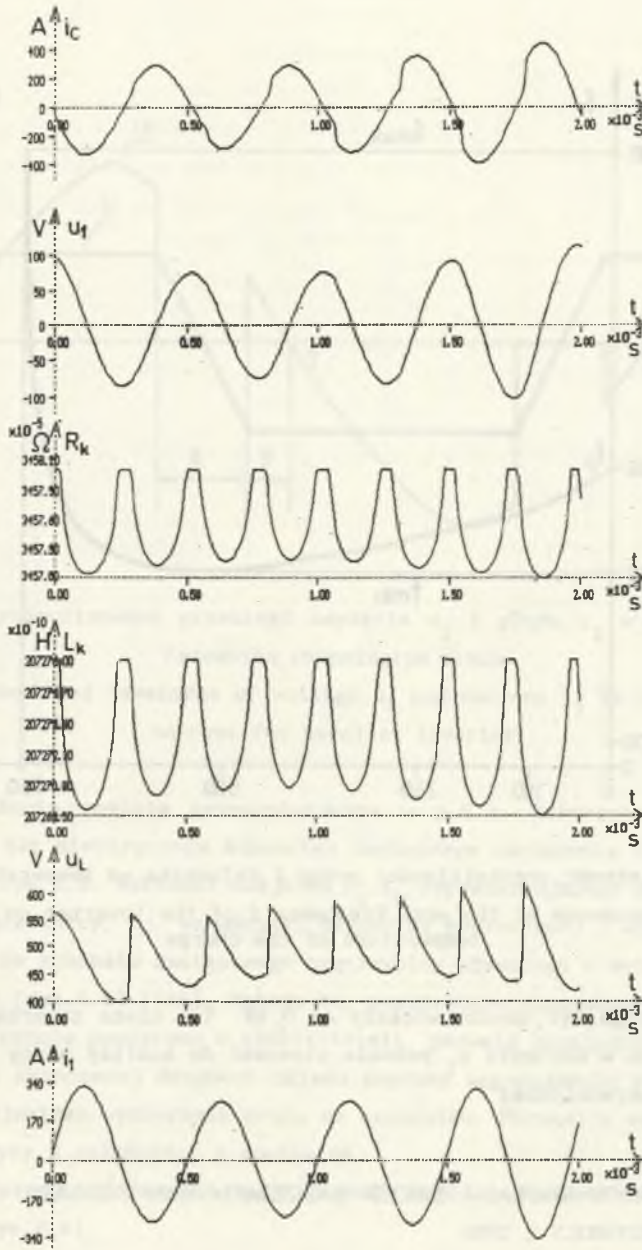
Znacznie prostszym sposobem obliczenia parametrów obciążenia było posłużenie się schematem zastępczym nagrzewnicy przedstawionym w p.8.3.1.

Parametry elektryczne nagrzewanej rury obliczano z zależności (A4.1) i (A4.2). Korzystano zazwyczaj z ich uproszczonej postaci obowiązującej dla silnego efektu powierzchniowego. Uwzględniano w nich zależność  $\mu(H,T)$  i  $\sigma(T)$  (zależności z A2.) dla wybranej jednorodnej w przekroju wsadu temperatury  $T$ . Był to tzw. model "nieliniowy".

Rozważano również model zwany "liniowym", który tworzą uśrednione w czasie wartości zmieniających się okresowo wielkości  $R_k$  i  $L_k$  obliczone w modelu "nieliniowym" (rys.8.2). Stwierdzono, że "liniowy" model obciążenia może prowadzić do błędnych wniosków, np. może uniemożliwiać rozruch, podczas gdy odpowiadający mu model "nieliniowy" nie wykazuje takich właściwości.

Takie modele obciążenia pozwoliły na przeprowadzenie obszernych badań wpływu różnych obciążeń, struktur i nastaw regulatorów w stanie pracy quasi-ustalonej i przy rozruchu, wpływu nieliniowości obciążenia układu i warunków początkowych na elementach układu rozruchowego na rozruch układu, wymaganej do poprawnej pracy układu wartości indukcyjności dławika  $L_d$ . Jako ich przykład pokazano na rys.8.2 przebiegi prądów i napięć w falowniku uzyskane z programu symulacji pracy TFRP napisanego w trybie konwersacyjnym w Turbo Pascalu 5.5. Na uwagę zasługują zmiany chwilowych wartości rezystancji  $R_k$  i indukcyjności  $L_k$  nagrzewnicy. Badano również wpływ jednorodnej temperatury wsadu na częstotliwość pracy falownika (rys.8.3) [79]. Duże zmiany częstotliwości, przedstawione na rys.8.3, spowodowane są przyjęciem do obliczeń bardzo małej szczeliny powietrznej; w układach rzeczywistych zakres zmian częstotliwości przy nagrzewaniu rur nie przekracza zazwyczaj stosunku 2:1.

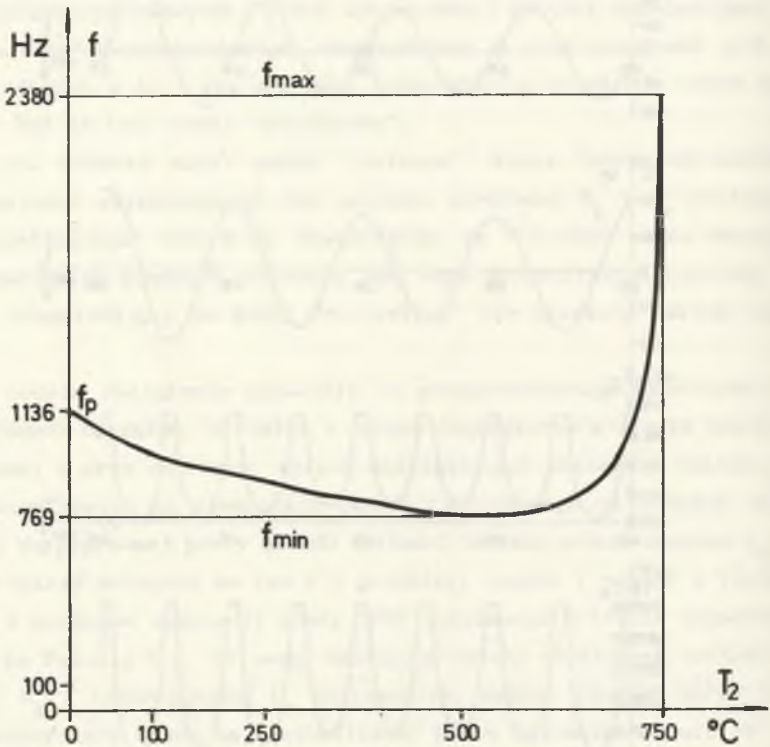
Sprawdzono również poprawność stosowania do obliczeń metody "pierwszej harmonicznej". Ponieważ częstotliwość pracy falownika musi być zbliżona do częstotliwości rezonansowej obwodu obciążenia (odstrojenie nie może z uwagi na gwałtowny wzrost napięć wstecznych na tyrystorach przekraczać paru procent), to pomimo dyskretnego charakteru działania falownika i silnie nieliniowego obciążenia, jakim jest nagrzewnica indukcyjna, szczególnie wsadów ferromagnetycznych, przebiegi napięcia i prądu wzbudnika są bardzo słabo odkształcone (patrz rozdział 9). Potwierdza ten fakt analiza harmonicznych napięcia  $u_1$  i prądu wzbudnika  $i_1$  przeprowadzona w pracy [79]. Stwierdzono, że w najbardziej niekorzystnych warunkach pracy (rozruch) względna amplituda trzeciej harmonicznej w napięciu  $u_1$  nie przekracza 13%, a prądu  $i_1$  25% amplitudy harmonicznej podstawowej, współczynnik odkształ-



Rys.8.2. Przebiegi wybranych wielkości w falowniku. Wyniki modelowania numerycznego

Fig.8.2. Waveforms of chosen quantities in the inverter. Results of numerical modelling





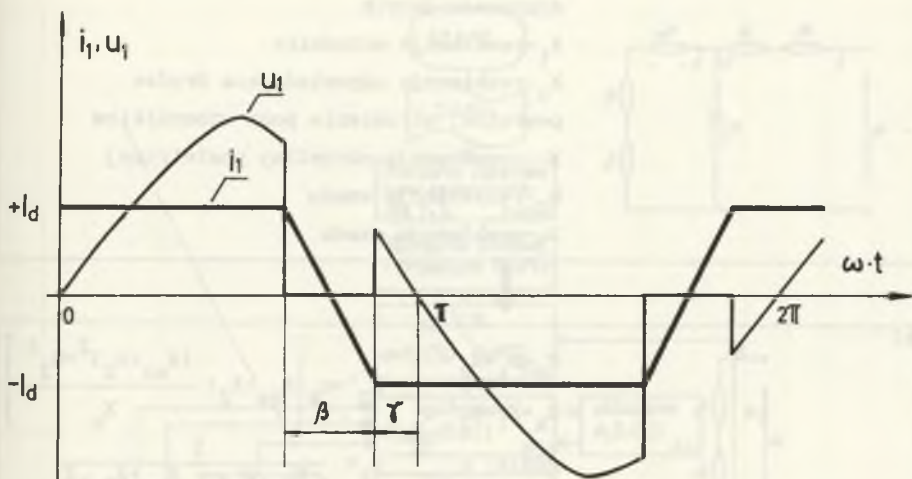
Rys.8.3. Zależność częstotliwości pracy  $f$  falownika od temperatury wsadu  
Fig.8.3. Dependence of the work frequency  $f$  of the inverter on the temperature of the charge

cenia przebiegu był zawsze większy od 0,98. Tak niska zawartość wyższych harmonicznych w napięciu  $u_1$  pozwala stosować do analizy pracy TFRP metodę "pierwszej harmonicznej".

### 8.3. ALGORYTM SYMULACJI PROCESU NAGRZEWANIA PRZY ZASILANIU NAGRZEWNICY Z TPRP

#### 8.3.1. ZASTOSOWANIE METODY "PIERWSZEJ HARMONICZNEJ"

Idea metody "pierwszej harmonicznej" polega na przyjęciu założenia o harmoniczności napięcia wyjściowego falownika  $u_1$  (rys.8.4). Poprawność ta



Rys.8.4. Wyidealizowane przebiegi napięcia  $u_1$  i prądu  $i_1$  w tyrystorowym falowniku równoległym prądu

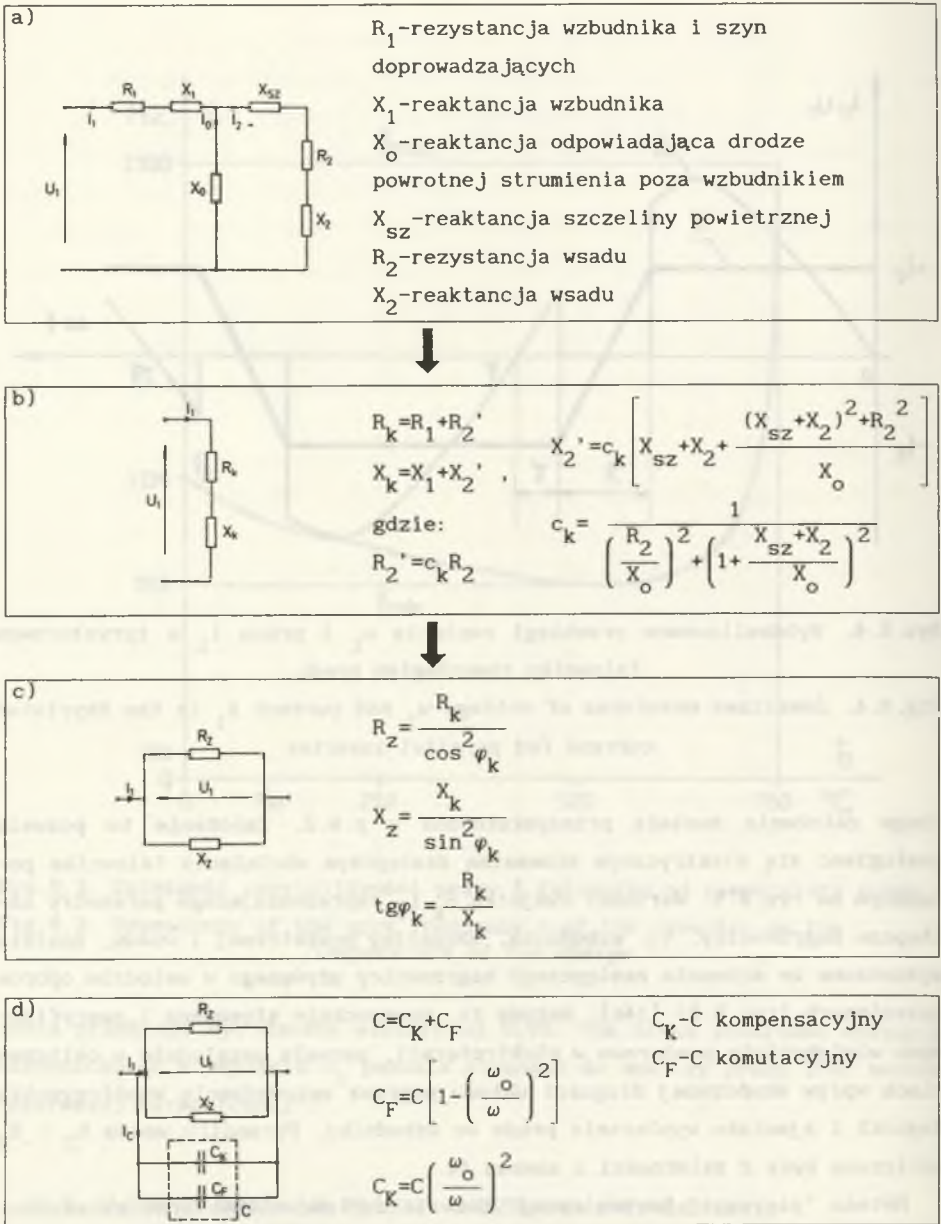
Fig.8.4. Idealized waveforms of voltage  $u_1$  and current  $i_1$  in the thyristor current fed parallel inverter

kiego założenia została przedyskutowana w p.8.2. Założenie to pozwala posługiwać się elektrycznym schematem zastępczym obciążenia falownika pokazanym na rys.8.5. Wartości dwójnika  $R_k, L_k$  reprezentującego parametry zastępcze nagrzewnicy, tj. wzbudnika, szczeliny powietrznej i wsadu, zostały wyznaczone ze schematu zastępczego nagrzewnicy używanego w metodzie oporów wniesionych (rys.8.5) [146]. Metoda ta, powszechnie stosowana i zweryfikowana wielokrotnie pomiarowo w elektrotermii, pozwala uwzględnić w obliczeniach wpływ skończonej długości układu poprzez wprowadzenie współczynnika Nagaoki i zjawisko wypierania prądu we wzbudniku. Parametry wsadu  $R_2$  i  $X_2$  obliczane były z zależności z aneksu A4.

Metoda "pierwszej harmonicznej" pozwala zapisać elementarne zależności dla TFRP (rys.8.6):

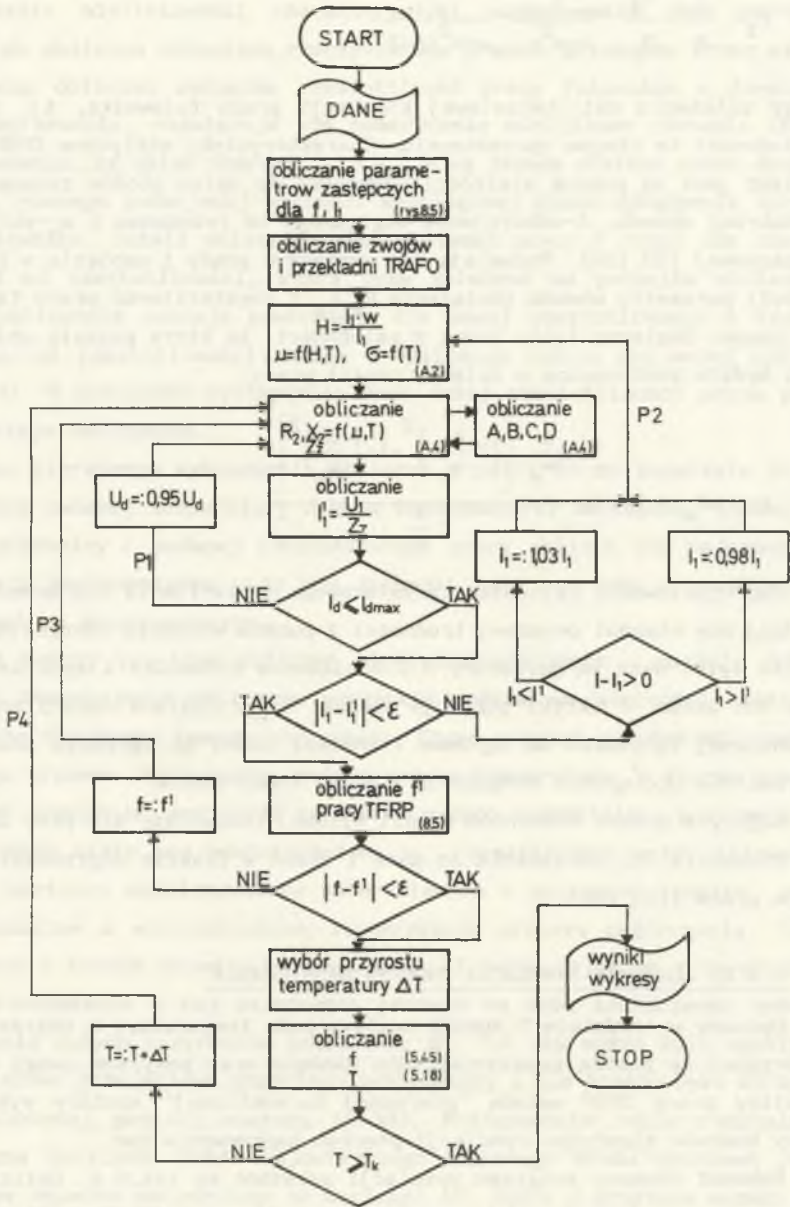
$$U_1 = \frac{\pi U_d}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos(\beta/2)} \cdot \frac{1}{\cos(\gamma+\beta/2)}, \quad (8.2)$$

$$I_1 = \frac{2\sqrt{2}I_d}{\pi} \cdot \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}, \quad (8.3)$$



Rys.8.5. Elektryczny schemat zastępczy obciążenia TFRP: a)b)c) kolejne schematy zastępcze nagrzewnicy; d) schemat zastępczy nagrzenicy i kondensatora obciążenia TFRP

Fig.8.5. Electrical equivalent circuit of the load of TCFPI: a)b)c) succeeding equivalent circuits of the heater; d) equivalent circuit of the heater and the capacitor in the load of the inverter



Rys.8.6. Schemat blokowy programu symulacji procesu nagrzewania przy zasilaniu nagrzewnicy z TFRP

Fig.8.6. Schematic diagram of the simulation program of induction heating when the heater is supplied from the inverter

$$P_1 = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{U_d^2}{R_k} \cdot \frac{1}{\cos^2 \gamma} \cdot \frac{1}{\cos^2(\beta/2)} \quad (8.4)$$

Przy założeniu natychmiastowej komutacji prądu falownika, tj. przy  $\beta=0$ , zależności te ulegną uproszczeniu. Charakterystyki statyczne TFRP wygodnie opisać jest za pomocą wielkości używanych do opisu obwodów rezonansowych: Q-dobroci obwodu,  $\delta$ -odstrojenia względnie od rezonansu i  $\omega_0$ -pulsacji rezonansowej [53,129]. Pozwalają one wyznaczyć prądy i napięcia w falowniku, jeżeli parametry obwodu obciążenia  $R_k, L_k$  i częstotliwość pracy falownika  $f$  są znane. Zapiszmy tylko jedną z zależności, tę która pozwala obliczyć kąt  $\gamma$  i będzie zastosowana w dalszej części pracy:

$$\gamma = \omega t_d = \arctg \frac{\frac{\omega}{\omega_0} \left[ \left( 2 \frac{\delta}{\omega_0} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}{2 \frac{\delta}{\omega_0}} \quad (8.5)$$

Zaprojektowanie falownika tyrystorowego do zasilania nagrzewnicy indukcyjnej nie stanowi poważnej trudności z punktu widzenia energoelektroniki, o ile tylko dane są parametry R,L obciążenia falownika i spodziewany zakres ich zmian. Praktyka pokazuje jednak, że projektant części energoelektronicznej falownika ma ogromne trudności nawet ze zgrubnym oszacowaniem parametrów obciążenia związanych z danym typem wsadu.

Algorytm doboru elementów części siłowej falownika, ale przy założeniu, że parametry R,L obciążenia są dane i stałe w trakcie nagrzewania, zawierają prace [159,166].

### 8.3.2. ALGORYTM SYMULACJI PROCESU NAGRZEWANIA

Opisany w rozdziale 5 sposób analizy pola temperatury w nagrzewnicy indukcyjnej za pomocą przekształcenia Hankela oraz powyższe uwagi dotyczące analizy pracy TFRP metodą "pierwszej harmoniczej" zostały wykorzystane przy budowie algorytmu symulacji procesu nagrzewania rur.

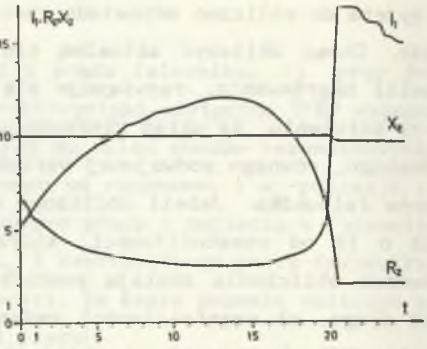
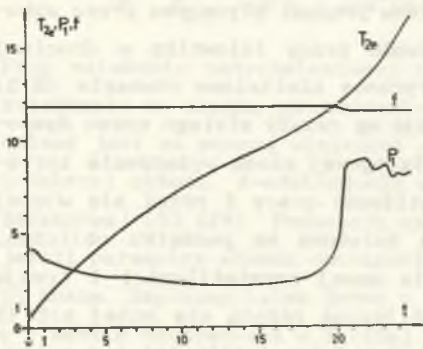
Schemat blokowy programu symulacji pokazano na rys.8.6. Obliczenia wykonywane są w trzech podstawowych pętłach iteracji P1,P2 i P3 przy wykorzystaniu zależności (8.2),(8.3),(8.5) i zależności dodatkowych z A4. Pętla najbardziej wewnętrzna P1 modeluje układ ograniczenia prądu  $I_d$  i napięcia  $U_1$ . W przypadku, gdy któraś z tych wielkości przekroczy wartość dopuszczalną, następuje zmniejszenie napięcia wyjściowego prostownika  $U_d$ . W

pętli środkowej P2 oblicza się tak długo prąd wzbudnika  $I_1$ , aż przy uwzględnieniu nieliniowości charakterystyki magnesowania jego wartość przyjęta do obliczeń odpowiada rzeczywistemu prądowi płynącemu przez wzbudnik. Chcąc obliczyć aktualną częstotliwość pracy falownika w dowolnej chwili nagrzewania, rozwiązuje się numerycznie nieliniowe równanie (8.5) przy założeniu, że układ sterowania pracuje wg zasady stałego czasu dysponowanego, równego podwojonej wartości katalogowej czasu wyłączenia tyrystorów falownika. Jeżeli obliczona częstotliwość pracy  $f$  różni się więcej niż o 1% od częstotliwości, która była założona na początku obliczeń, wówczas obliczenia zostają powtórzone dla nowej częstotliwości i trwają tak długo, aż częstotliwości zadana i obliczona różnią się mniej niż 1% (pętla P3). W przypadku wystąpienia zbyt dużej częstotliwości praca programu zostaje zatrzymana.

Podczas pierwszego wykonywania obliczeń w pętli P2 na podstawie obliczonej (dla zadanej temperatury doboru kondensatora) zastępczej indukcyjności nagrzewnicy i zadanej częstotliwości pracy oblicza się pojemność i moc baterii kondensatorów oraz gdy zachodzi taka potrzeba - przekładnię transformatora dopasowującego.

Na tym kończy się blok obliczeń elektromagnetycznych - zostały już w procesach iteracyjnych obliczone wszystkie podstawowe wielkości elektromagnetyczne dla danej temperatury wsadu. Chcąc wykonać podobne obliczenia dla całego procesu nagrzewania, należy zakres temperatury, w którym prowadzona jest symulacja, podzielić na szereg małych przedziałów, przyjmując w każdym z nich stałą moc powierzchniową  $p_0$ , częstotliwość pracy falownika  $f$ , stałe wartości współczynników materiałowych i sprawność cieplną. Jest to równoznaczne z wieloodcinkową linearyzacją procesu nagrzewania. Czas nagrzewania w każdym przedziale temperatur  $\Delta T$  można obliczyć z zależności (5.46). Korzystanie z tej zależności pociąga za sobą konieczność wyboru dostatecznie dużych przyrostów temperatury  $\Delta T$ , tak aby można było wyeliminować składową przejściową przebiegu temperatury i nie trzeba było korzystać ze złożonej postaci szeregu (5.38). Postępowanie takie radykalnie skraca czas obliczeń. Wybór najmniejszego czasowego kroku obliczeń jest więc w tym wypadku uzależniony od wartości  $\Delta T$ , która w praktyce wynosi od 40 do 120 °C.

Stosując zaprezentowany program, przeprowadzono symulację procesu nagrzewania dla asortymentu rur produkowanych przez jedną z polskich hut przyjmując parametry falowników produkowanych przez ZAM w Kętach przy



DANE:

- |                         |                          |                          |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $r_1=0,055 \text{ m}$   | $C=490 \mu\text{F}$      | $I_{dmax}=250 \text{ A}$ |
| $r_2=0,065 \text{ m}$   | $w=10 \text{ zwojów}$    | $t_d=40 \text{ ms}$      |
| $l_1=0,300 \text{ m}$   | $f=2000 \text{ Hz}$      |                          |
| $h_{sz}=0,05 \text{ m}$ | $U_{1max}=500 \text{ V}$ |                          |

SKALE:

- $t$ : 1dz=: 8,9 s  
 $T$ : 1dz=: 60,9 °C  
 $P_1$ : 1dz=: 7 kW  
 $f$ : 1dz=: 178,4 Hz  
 $I_1$ : 1dz=: 163,5 A  
 $R_z$ : 1dz=: 5 mΩ  
 $X_z$ : 1dz=: 16 mΩ

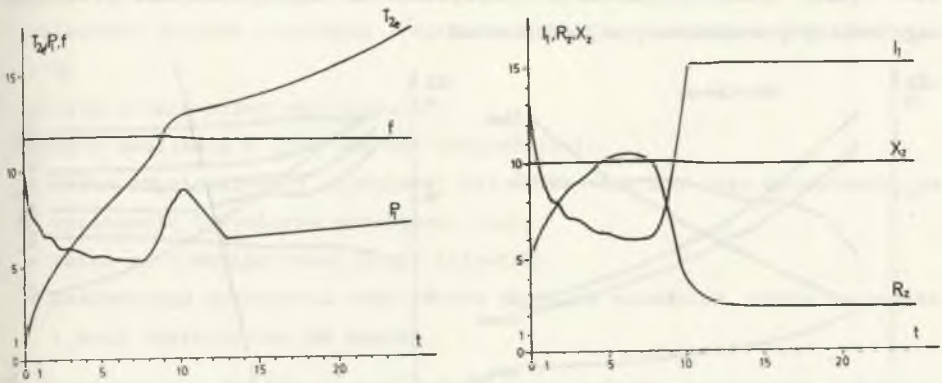
WYNIKI OBLICZEŃ:

- $T_2=1010 \text{ °C}$  dla  $t_n=223 \text{ s}$   
 $P_{1sr}=32,4 \text{ kW}$

Rys.8.7. Zmiana podstawowych wielkości w czasie procesu nagrzewania przy zasilaniu z falownika o mocy 100 kW

Fig.8.7. Change of basic quantities during the heating process when the heater is supplied from the inverter of 100 kW

współpracy IETiP Politechniki Śląskiej [134]. Zmiany podstawowych wielkości fizycznych w trakcie nagrzewania przy zasilaniu z falowników 100 kW i 200 kW pokazano na rys.8.7,8.8. Widać czterokrotne zmniejszenie czasu nagrzewania przy wzroście mocy falownika podawanej przez jego producenta. Opisany program został wykorzystany również do określenia wpływu szeregu



DANE:

$$I_{dmax} = 400 \text{ A}$$

$$C = 475 \text{ } \mu\text{F}$$

pozostałe dane takie jak na rys.8.7

SKALE:

$$t: 1dz = 2,1 \text{ s}$$

$$T: 1dz = 60,9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$P_1: 1dz = 11 \text{ kW}$$

$$f: 1dz = 176,9 \text{ Hz}$$

$$I_1: 1dz = 196,7 \text{ A}$$

$$R_z: 1dz = 4 \text{ m}\Omega$$

$$X_z: 1dz = 17 \text{ m}\Omega$$

WYNIKI OBLICZEŃ:

$$T_{2e} = 1010 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ dla } t_n = 54 \text{ s}$$

$$P_{1sr} = 77,8 \text{ kW}$$

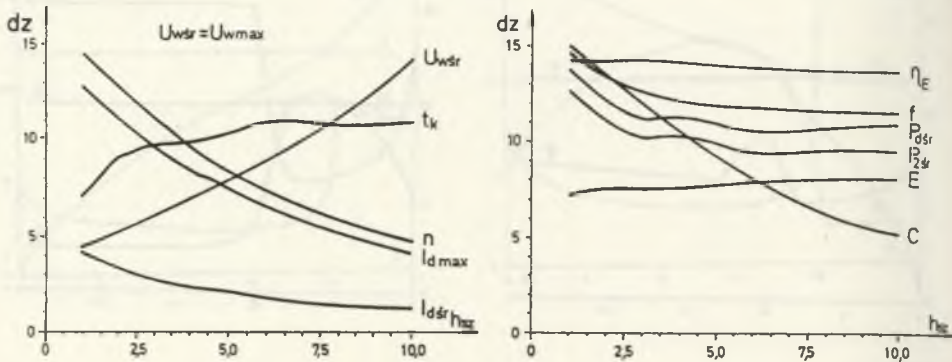
Rys.8.8. Zmiana podstawowych wielkości w czasie procesu nagrzewania przy zasilaniu z falownika o mocy 200 kW

Fig.8.8. Change of basic quantities during the heating process when the heater is supplied from the inverter of 200 kW

czynników konstrukcyjnych i eksploatacyjnych na proces nagrzewania. Przebadano m.in. wpływ wielkości szczeliny powietrznej, wielkości i temperatury doboru kondensatora obciążenia, długości nagrzewnicy, przekładni transformatora dopasowującego [129]. Na rys.8.9 pokazano wpływ wielkości szczeliny powietrznej na wybrane wielkości w czasie nagrzewania przy utrzymaniu ma-



ksymalnego napięcia na wzbudniku. Przedstawione wartości prądów, napięć, mocy i częstotliwości są wartościami uśrednionymi w danym cyklu nagrzewania. Wyniki symulacji zostały wykorzystane do zaprojektowania prototypu nagrzewnicy przemysłowej w jednej z hut.



DANE:

$r_1 = 0,10 \text{ m}$        $r_2 = 0,09 \text{ m}$        $t_d = 40 \text{ } \mu\text{s}$   
 $l_1 = 0,30 \text{ m}$        $f_p = 1176 \text{ Hz}$   
 $\eta_T = 0,9$        $U_{1max} = 500 \text{ V}$

SKALE:

$h_{sz}$ : 1dz = 0,005 m       $\eta_E$ : 1dz = 6,5%       $n$ : 1dz = 0,35  
 $C$ : 1dz = 60  $\mu\text{F}$        $f$ : 1dz = 105 Hz       $t_k$ : 1dz = 60 s  
 $P_d, P_1$ : 1dz = 2,5 kW       $E$ : 1dz = 0,35 kWh       $I_d, I_1$ : 1dz = 100 A

Rys.8.9. Wpływ wielkości szczeliny powietrznej na wybrane wielkości przy nagrzewaniu z  $U_1 = U_{1max} = \text{const}$

Fig.8.9. Influence of the air gap on chosen quantities when being heated with  $U_1 = U_{1max} = \text{const}$

#### 8.4. WNIOSKI

Przyjęta metoda symulacji pracy TFRP w stanach nieustalonych i quasi-ustalonych pozwala na analizę poprawności pracy falownika w przedziałach czasu, w których można założyć stałość temperatury wsadu. Pozwala to odpowiedzieć m.in. na podstawowe pytanie nurtujące projektanta dotyczące możliwości "startu" falownika przy danym obciążeniu w danej temperaturze.

Zaproponowany algorytm symulacji całego procesu nagrzewania indukcyjnego, oparty na koncepcji wieloodcinkowej linearyzacji procesu nagrzewania,

uwzględnia:

- wpływ skończonej długości układu (współczynnik Nagaoki);
- zależność stałych cieplnych i elektromagnetycznych wsadu w funkcji  $T$  i  $H$ ;
- straty ciepła przez oszacowanie;
- sposób zasilania z TFRP poprzez uwzględnienie:
  - zmian częstotliwości wyjściowej falownika, tak aby czas dysponowany na wyłączenie tyrystorów pozostawał stały;
  - zmian mocy dostarczonej przez falownik;
  - kaskadowego połączenia regulatorów napięcia wzbudnika, prądu falownika i mocy dostarczonej do wsadu.

Przedstawiona metoda stanowi nowy sposób badania nagrzewnic indukcyjnych zasilanych ze źródeł tyrystorowych. Opracowany algorytm może zostać rozbudowany i pogłębiony m.in. przez wprowadzenie numerycznego opisu pól.

## 9. WYBRANE WYNIKI BADAŃ LABORATORYJNYCH

W celu częściowej weryfikacji poprawności uzyskanych wyników obliczeń przeprowadzono pomiary na zbudowanym w laboratorium IETiP stanowisku do indukcyjnego nagrzewania rur.

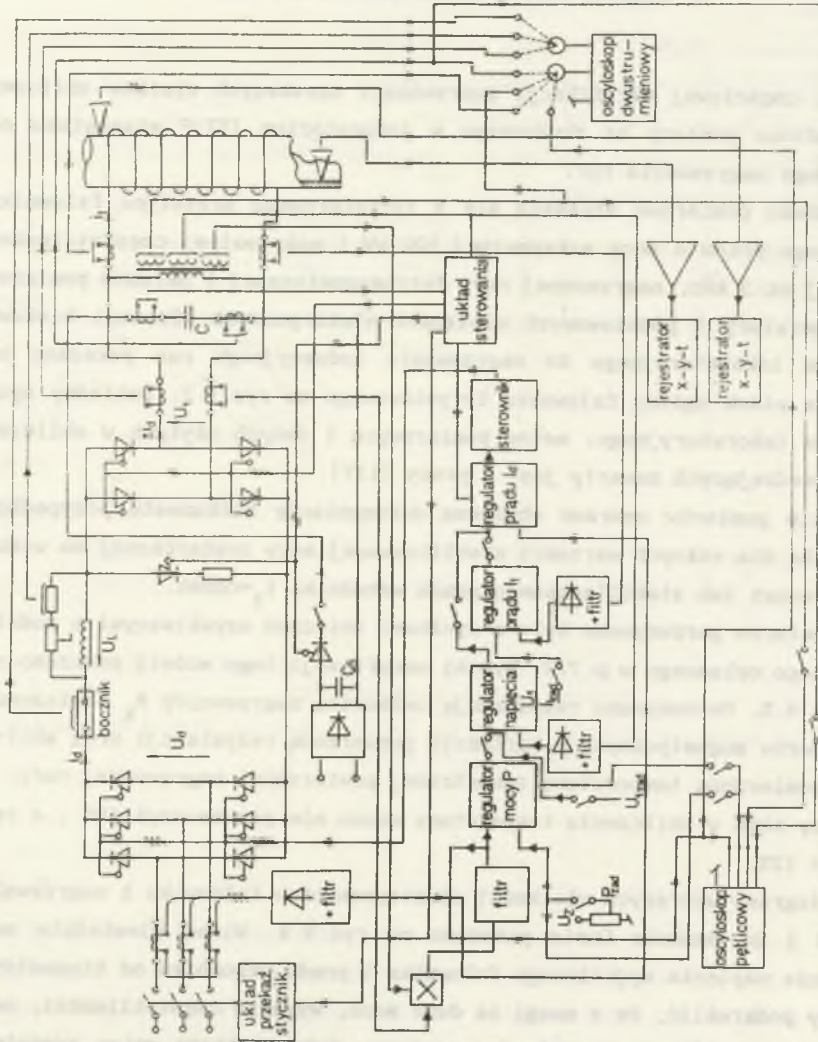
Stanowisko pomiarowe składało się z tyrystorowego prototypu falownika równoległego prądu o mocy maksymalnej 100 kW i maksymalnej częstotliwości wyjściowej ok. 3 kHz, nagrzewanej rury ferromagnetycznej i układów pomiarowych temperatury i podstawowych wielkości elektrycznych. Schemat blokowy stanowiska laboratoryjnego do nagrzewania indukcyjnego rur pokazano na rys. 9.1, a widok ogólny falownika tyrystorowego na rys. 9.2. Dokładny opis stanowiska laboratoryjnego, metod pomiarowych i danych użytych w obliczeniach sprawdzających zawarty jest w pracy [117].

W czasie pomiarów zebrano obszerną dokumentację kilkunastu przypadków nagrzewania dla różnych wartości stabilizowanej mocy dostarczonej do wzbudnika  $P_1 = \text{const}$  lub stabilizowanego prądu wzbudnika  $I_1 = \text{const}$ .

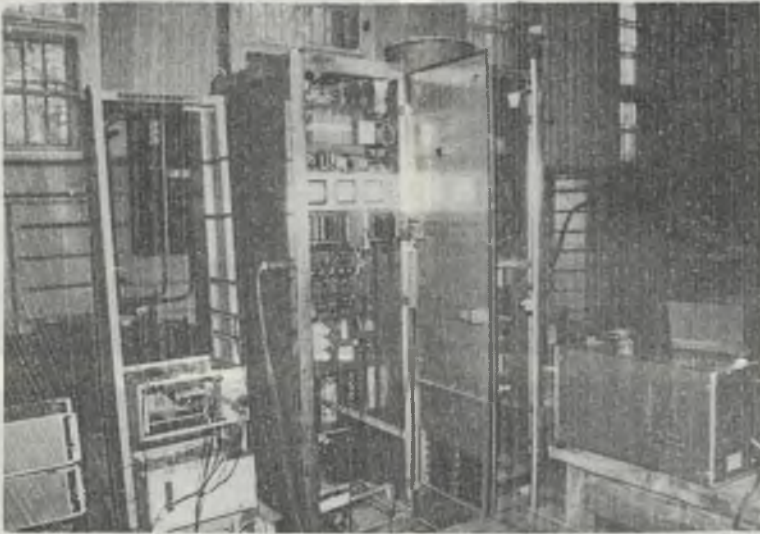
Wyniki pomiarów porównywane były z wynikami obliczeń uzyskiwanymi z modelu numerycznego opisanego w p. 7.2. Wyniki weryfikacji tego modelu pokazano na rys. 9.3 i 9.5. Porównywano rezystancję całkowitą nagrzewnicy  $R_k$  obliczoną metodą oporów magnetycznych z wartością pomierzoną rezystancji oraz obliczoną i pomierzoną temperaturę zewnętrzną powierzchni nagrzewanej rury. Maksymalny błąd w obliczeniu temperatury wsadu nie przekroczył 10%, a rezystancji 12%.

Oscylogramy wybranych wielkości elektrycznych w falowniku i nagrzewnicy przed i po punkcie Curie pokazano na rys. 9.4. Widać niewielkie odkształcenie napięcia wyjściowego falownika i prądu wzbudnika od sinusoidy.

Należy podkreślić, że z uwagi na duże moce, wysokie częstotliwości, odkształcenie przebiegów, wysokie temperatury, dużą szybkość zmian sygnałów wieloprądowych i pola zakłóceń oraz przy braku opracowanych metod pomia-

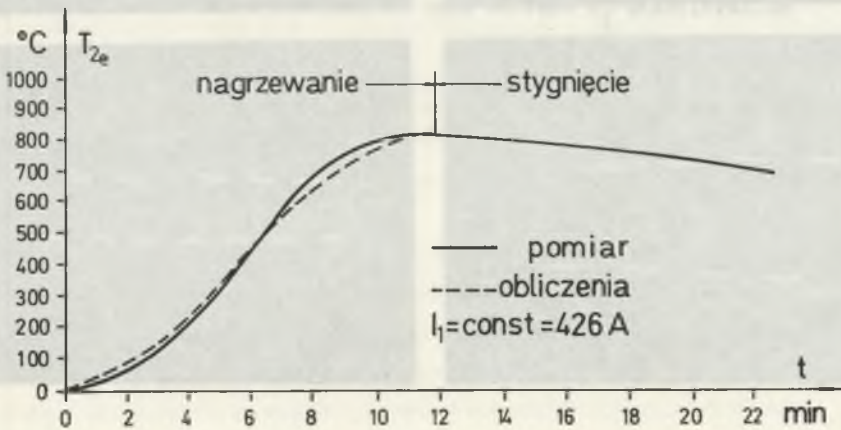


Rys. 9.1. Schemat blokowy stanowiska laboratoryjnego do nagrzewania indukcyjnego rur  
Fig. 9.1. Block diagram of the laboratory stand for induction heating of pipes



Rys.9.2. Widok falownika tyrystorowego używanego w czasie pomiarów

Fig.9.2. View of the thyristor inverter used in measurements

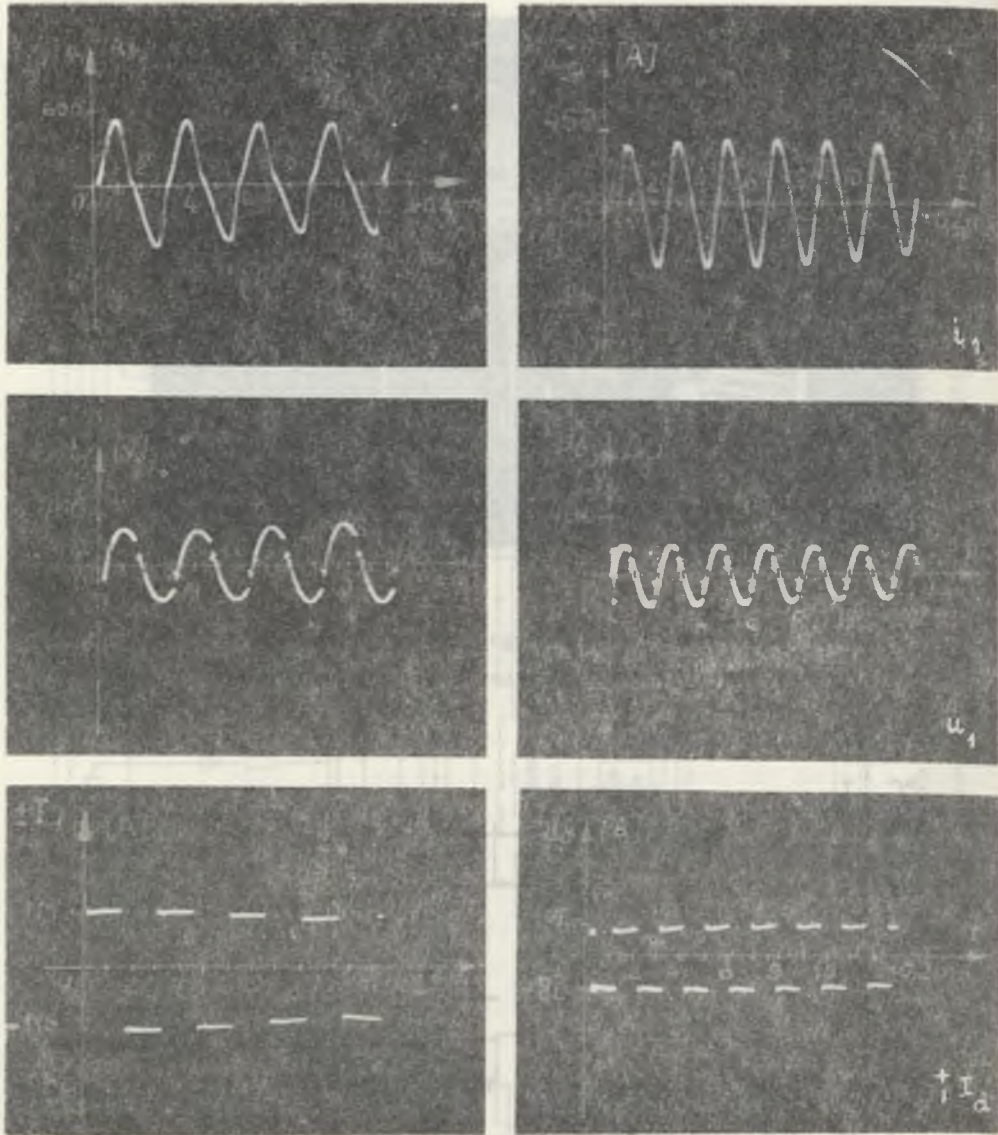


Rys.9.3. Porównanie wyników obliczeń i pomiarów temperatury zewnętrznej powierzchni rury. Przypadek stabilizacji prądu wzбудnika  $I_1$

Fig.9.3. Comparison of computation results and measurements of temperature of the external surface of the pipe. The case of coil current  $I_1$  stabilization

a)

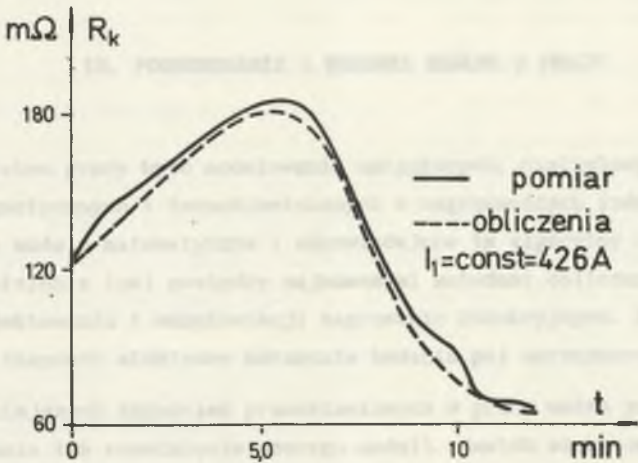
b)



Rys.9.4. Przebiegi prądu wzбудnika  $i_1$ , napięcia wyjściowego falownika  $u_1$  oraz prądu  $\pm I_d$  przed (a) i po (b) punkcie Curie. Wyniki pomiarów

Fig.9.4. Waveforms of coil current  $i_1$ , the output voltage  $u_1$  of the inverter and the current  $\pm I_d$  before (a) and after (b) the Curie point. Results of measurements

rowych i sprzętu pomiarowego pomiary w grzejnictwie indukcyjnym w warunkach krajowych należy uznać za trudne.



Rys.9.5. Porównanie wyników obliczeń i pomiarów rezystancji nagrzewnicy. Przepadek stabilizacji prądu wzbudnika  $I_1$

Fig.9.5. Comparison of computation results and measurements of resistance of the heater. The case of coil current  $I_1$  stabilization

## 10. PODSUMOWANIE I WNIOSKI OGÓLNE Z PRACY

Przedmiotem pracy było modelowanie sprzężonych, nieliniowych zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w nagrzewnicach indukcyjnych rur. Opracowane modele matematyczne i odpowiadające im algorytmy numeryczne są próbą wypełnienia luki pomiędzy najnowszymi metodami obliczania pól a praktyką projektowania i eksploatacji nagrzewnic indukcyjnych. Zbudowane modele mają stanowić efektywne narzędzie badania pól sprzężonych.

Do najważniejszych zagadnień przedstawionych w pracy można zaliczyć:

- opracowanie lub rozwinięcie szeregu modeli zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w nagrzewnicach rur; modele te wykorzystują zarówno metody analitycznego, jak numerycznego badania pól; do każdego modelu napisano odpowiadający mu program na EMC;
- opracowanie systemu obliczeniowego umożliwiającego badanie nieliniowych pól sprzężonych klasy dwu- i jednowymiarowych w nagrzewnicach indukcyjnych rur;
- opracowanie algorytmu umożliwiającego uwzględnienie w obliczeniach zasilania nagrzewnicy z tyrystorowego falownika równoległego prądu i wskazanie na wpływ takiego źródła zasilania i jego układu regulacji na proces nagrzewania;
- opracowanie programu na EMC pozwalającego symulować pracę tyrystorowego falownika równoległego prądu zasilającego nagrzewnicę indukcyjną;
- podanie koncepcji częściowego rozprężenia obu pól i omówienie błędów obliczeń, jakie to rozprężenie powoduje;
- zbadanie możliwości przyjęcia do obliczeń uśrednionych wartości współczynników materiałowych wsadu  $\lambda, \gamma, c, \mu$ ;
- określenie wpływu, jaki na proces nagrzewania ma częstotliwość prądu wzbudnika, stabilizacja prądu lub napięcia wzbudnika oraz skład harmonicznym tego prądu;
- podanie szeregu wytycznych co do możliwości i celowości stosowania poszczególnych modeli matematycznych i pewnych metod numerycznych;



- przedstawienie przykładowych wyników obliczeń ilustrujących potencjalne możliwości obliczeniowe każdego modelu; omówienie zalet, wad i perspektyw rozwoju każdego z nich;
- przedstawienie wyników badań laboratoryjnych nagrzewnicy zasilanej z falownika tyrystorowego prądu o mocy 100 kW i częstotliwości do 3 kHz.

Wnioski ogólne z pracy sformułowano następująco:

- można stwierdzić, że badanie pól sprzężonych w nagrzewnicach indukcyjnych z jednoczesnym uwzględnieniem nieliniowości pól, złożonej wymiany ciepła w nagrzewnicy, ruchu wsadu i wpływu źródła zasilania jest przy dotychczasowym stanie techniki komputerowej w kraju trudne;
- zbudowane modele, opisując dwie podstawowe grupy zjawisk fizycznych zachodzących w procesie nagrzewania, stanowią jądro wszystkich algorytmów projektowania nagrzewnic indukcyjnych rur;
- zbudowane modele mogą dostarczyć wielu jakościowo i ilościowo nowych informacji użytecznych w pracach projektowych i przy eksploatacji;
- różnorodność przedstawionych modeli jest nie tylko wynikiem historycznego rozwoju metod obliczania pól, ale wynika również w dużej mierze z różnych przewidywanych zastosowań tych modeli; orientacja na ten czy inny typ zadania dyktuje wybór modelu; modele prostsze, a więc bardziej efektywne z uwagi na czas obliczeń, są bardziej wygodne w dialogu komputer-projektant; modele o większych możliwościach obliczeniowych zapewniają dokładniejszy opis zjawisk fizycznych, ale są mniej odpowiednie do włączenia w procedury projektowe;
- wprowadzenie tyrystorowych źródeł zasilania nagrzewnic indukcyjnych pociąga za sobą konieczność opracowania nowych metod projektowania nagrzewnic indukcyjnych;
- weryfikacja pomiarowa wyników obliczeń, z uwagi na brak sprawdzonych metod pomiarowych i aparatury pomiarowej, nastęrcza również bardzo dużo trudności;
- z uwagi na bardzo duże moce współczesnych przemysłowych nagrzewnic indukcyjnych celowe jest pod względem techniczno-ekonomicznym posługiwać się odpowiednimi, czasami nawet złożonymi, modelami zjawisk fizycznych w nagrzewnicach.

Opracowane modele mogą znaleźć zastosowanie przy:

- komputerowo wspomaganym projektowaniu nagrzewnic indukcyjnych;
- budowie modeli uwzględniających nie tylko procesy elektromagnetyczne i

- cieplne, ale również zjawiska termosprężyste, metalurgiczne, akustyczne;
- optymalizacji konstrukcji i warunków eksploatacji źródła zasilania i samych nagrzewnic opartych na nowoczesnej teorii optymalizacji układów o stałych rozłożonych [51, 53, 55, 133];
  - syntezie układów sterowania procesami technologicznymi zawierającymi nagrzewnice indukcyjne;
  - analizie procesów nagrzewania indukcyjnego z technologicznego i ekonomicznego punktu widzenia.

- Dalsze prace związane z nagrzewnicami indukcyjnymi powinny polegać na:
- udoskonalaniu stosowanych modeli, tak aby modele dwuwymiarowe, a później również trójwymiarowe, stanowiły powszechnie stosowane narzędzie pracy inżyniera;
  - stworzeniu z istniejących modeli matematycznych zjawisk fizycznych w nagrzewnicach programów komputerowo wspomaganego projektowania nagrzewnic;
  - uwzględnieniu w modelach innych zjawisk fizycznych, głównie termosprężystych i metalurgicznych;
  - uwzględnieniu w modelach różnych źródeł zasilania oraz innych części nagrzewnicy, np. szyn zasilających, dokładniejszego modelu wzbudnika, transformatora pośredniczącego;
  - opracowaniu metod symulacji pracy i projektowania źródeł tyrystorowych zasilających nagrzewnice indukcyjne;
  - symulacji pracy całych ciągów technologicznych, w skład których wchodzi nagrzewnice indukcyjne;
  - uściśleniu wymagań technologicznych stawianych przed nagrzewaniem indukcyjnym;
  - opracowaniu metod szeroko rozumianej optymalizacji procesu nagrzewania;
  - opracowaniu metody oceny wskaźników ekonomicznych nagrzewnic indukcyjnych, tak aby można było porównywać koszty przy stosowaniu różnych metod nagrzewania.

## ANEKSY

### ANEKS A1. ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE STRATY CIEPŁA Z NAGRZEWNICY [44,100]

#### A1.1. GĘSTOŚĆ STRUMIENIA CIEPLNEGO W WYMURÓWCE

$$q_w = \frac{T_{w_i} - T_{w_e}}{R_T} \quad (A1.1)$$

$T_{w_e}$  może być przyjmowana jako średnia temperatura wody chłodzącej wzbudnik (50...60 °C).

Rezystancja cieplna  $R_T$  wymurówki, np. dwuwarstwowej (ceramika+azbest), określona jest zależnością:

$$R_T = r_2 \left( \frac{1}{\lambda_{w_1}} \ln \frac{r_3}{r_3'} + \frac{1}{\lambda_{w_2}} \ln \frac{r_4}{r_3} \right) \quad (A1.2)$$

gdzie  $r_3, r_3'$  są odpowiednio promieniami wewnętrznym i zewnętrznym warstwy ceramicznej;  $r_4$  jest promieniem zewnętrznym warstwy azbestowej.

#### A1.2. OBLICZENIE TEMPERATURY WEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI WYMURÓWKI

Temperaturę tę można wyliczyć z wyrażenia:

$$\sigma_o \varphi_{2,w} \left[ (T_{2_e} + 273)^4 - (T_{w_i} + 273)^4 \right] = \frac{T_{w_i} - T_{w_e}}{R_T} \quad (A1.3)$$

gdzie zastępczy współczynnik konfiguracji  $\varphi_{2,w}$  może być dla układu cylindrycznego obliczony z zależności:

$$\varphi_{2,w} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_w} + \frac{r_2}{r_3} \left[ \frac{1}{\varepsilon_w} - 1 \right]} \quad (A1.4)$$

gdzie:  $\varepsilon_2, \varepsilon_w$  są odpowiednio emisyjnością zewnętrznego i wewnętrznego wsadu i

wewnętrznej powierzchni wymurówki (zazwyczaj dla stali  $\epsilon_2 \approx 0,85$ , dla szamotu  $\epsilon_w \approx 0,8$ ).

### A1.3. WSPÓŁCZYNNIKI PRZEJMOWANIA CIEPŁA PRZY STYGNIECIU WSADU W POWIETRZU

- Przez promieniowanie

$$\alpha_{c_r} = \frac{\sigma_o \epsilon_2}{T_2 - T_a} \left( (T_2 + 273)^4 - (T_a + 273)^4 \right) \quad (A1.5)$$

- Przez konwekcję

$$\alpha_{c_k} = 2,56 \left( T_2 - T_a \right)^{1/4} \left[ \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C} \right] \quad (A1.6)$$

- Współczynnik sumaryczny

$$\alpha_c = \alpha_{c_r} + \alpha_{c_k} \quad (A1.7)$$

### A1.4. STRATY CIEPŁA Z POWIERZCHNI WSADU (RURY)

- Z powierzchni zewnętrznej

$$q_r = \sigma_o \varphi_{2,w} \left( (T_2 + 273)^4 - (T_{w_i} + 273)^4 \right) \quad (A1.8a)$$

$$\text{lub } q_r = \alpha_{c_r} (T_2 - T_{w_i}) \quad (A1.8b)$$

$$q_k = \alpha_{c_k} (T_2 - T_{w_i}) \quad (A1.8c)$$

$$\text{gdzie } \alpha_{c_r} = \frac{\sigma_o \varphi_{2,w}}{T_2 - T_{w_i}} \left( (T_2 + 273)^4 - (T_{w_i} + 273)^4 \right) \quad (A1.8d)$$

- Z powierzchni wewnętrznej

Straty na promieniowanie praktycznie nie występują. Straty przez konwekcję są pomijalnie małe, można przyjmować  $\alpha_{c_1} \approx 0,25 \alpha_{c_2}$ .

- Z czoła rury, gdy jest ona chroniona n ekranami o emisyjności  $\epsilon_E$

$$q_r = \frac{\sigma_o \left( (T_2 + 273)^4 - (T_a + 273)^4 \right)}{2(n+1) \left( \frac{1}{\epsilon_E} - \frac{1}{2} \right)} \quad (A1.9)$$

**ANEXS A2. ZALEŻNOŚĆ STAŁYCH MATERIAŁOWYCH WSADU I WYMURÓWKI OD TEMPERATURY**

Zależność współczynników materiałowych od temperatury dla różnych gatunków stali można aproksymować w następujący sposób [80,126,140]:

- Przewodność cieplna właściwa  $\lambda(T)$

$$\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 \left[ \frac{T}{100} \right] - \frac{\lambda_2}{\text{ch} \lambda_3 \left[ \frac{T-T_0}{100} \right]} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \right] \quad (\text{A2.1})$$

$$\varepsilon = \pm 1,5 \dots 2,5\%$$

- Ciepło właściwe  $c(T)$

$$c(T) = c_0 + c_1 \left[ \frac{T}{1000} \right]^n + c_2 \exp(-c_3 |T-T_0|) \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \right] \quad (\text{A2.2})$$

$$\varepsilon = \pm 2,2 \dots 4,9\%$$

- Gęstość masy  $\gamma_m(T)$

$$\gamma_m(T) = \gamma_{20^\circ\text{C}} \frac{1}{1 + 3\alpha_L (T-20)} \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (\text{A2.3})$$

$$\varepsilon = \pm 0,6 \dots 2\%$$

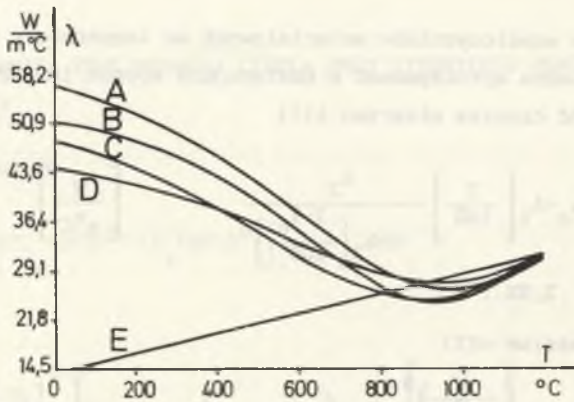
gdzie  $\alpha_L$  jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej, który opisany jest zależnością:

$$\alpha_L(T) = \left[ \alpha_0 + \alpha_1 \left[ \frac{T}{1000} \right] - \frac{\alpha_2}{\text{ch} \alpha_3 [(T-T_0)/100]^2} \right] 10^{-6} \quad \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right] \quad (\text{A2.4})$$

Wielkość  $\varepsilon$  oznacza średni błąd aproksymacji popełniany w zakresie temperatur 0...1200...1300 °C. Wartości stałych w równaniach (A2.1), (A2.2) i (A2.3) dla różnych gatunków stali podano w tabelach A2.1, A2.2, A2.3. Wykresy zależności (A2.1), (A2.2) pokazano odpowiednio na rys. A2.1 i A2.2.

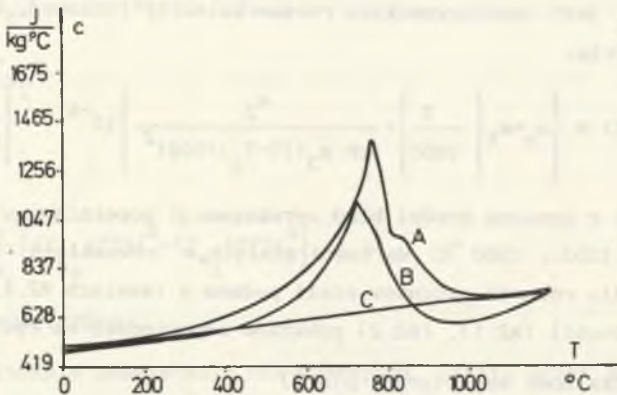
- Przenikalność magnetyczna  $\mu(H, T)$

Właściwości magnetyczne stali zależą od wielu czynników m.in. od składu chemicznego, obróbki mechanicznej i cieplnej, sposobu i częstotliwości magnesowania, temperatury. Ze wzrostem natężenia magnesującego pola magnetycznego różnice we właściwościach magnetycznych stali coraz bardziej się zacierają, a przy  $H \geq 10^4$  A/m praktycznie zanikają. Pozwala to stosować w obliczeniach nagrzewnic indukcyjnych jedną podstawową krzywą magnesowania,



- A – stal niskowęglowa (0,05.....0,2%)C
- B – stal średniowęglowa (0,2.....0,6%)C
- C – stal wysokowęglowa (0,6.....1,3%)C
- D – stal niskowęglowa
- E – stal chromoniklowa

Rys. A2.1. Zależność przewodności cieplnej właściwej stali  $\lambda$  od temperatury  
Fig. A2.1. Dependence of thermal conductivity  $\lambda$  of steel on temperature



- A – stal węglowa (0,09.....1,23%) C
- B – stal niskostopowa
- C – stal chromoniklowa

Rys. A2.2. Zależność ciepła właściwego  $c$  stali od temperatury  $T$   
Fig. A2.2. Dependence of specific heat  $c$  of steel on temperature

uśrednioną dla różnych gatunków stali zawierających od 0,23% do 0,99% węgla [90].

Błąd wynikający z posługiwania się krzywą uśrednioną zamiast krzywą odpowiadającą danemu gatunkowi stali nie przekracza 6,7% przy  $H=10^3$  A/m i zmniejsza się do 2,5% przy  $H=10^4$  A/m, a dla jeszcze większych wartości natężeń pola maleje do ułamków procentu. Domieszki chemiczne mogą silnie zmieniać właściwości magnetyczne stali: im czystszy metal, tym krzywa magnesowania jest bardziej stroma, a przenikalność maksymalna większa. W pracy [160] zamieszczono tabelę, na podstawie której można w przybliżeniu wyznaczyć indukcję, która wystąpi przy określonym natężeniu pola magnetycznego w stali konstrukcyjnej, w przypadku gdy zawartość domieszek nie przekracza 2%. Z tabeli tej wynika, że największy wpływ na pogorszenie właściwości magnetycznych ma węgiel. Dalsze informacje na temat wpływu obróbki cieplnej i składu chemicznego na właściwości magnetyczne można znaleźć w pracy [39,156].

Zależność względnej wartości przenikalności magnetycznej  $\mu$  od pola  $H$  i temperatury  $T$  aproksymowano dla  $H \geq 4000$  A/m funkcją:

$$\mu(H, T) = 1 + \left[ 515300H^{-0,896} - 1 \right] F(T), \quad (A2.5)$$

$$\text{gdzie } F(T) = \begin{cases} 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^n & \text{dla } T < T_c \\ 0 & \text{dla } T \geq T_c \end{cases} \quad (A2.6)$$

$T_c$  oznacza temperaturę punktu Curie, przyjmowaną zazwyczaj w przedziale 730...750 °C dla różnych gatunków stali.

Funkcje  $\mu_r = \mu(H, T)$  dla różnych wykładników  $n$  w zależności (8.2) pokazano na rys.A2.3., a zależność  $\mu = \mu(H, T)$  dla trzech natężeń pola  $H$  na rys.A2.4.

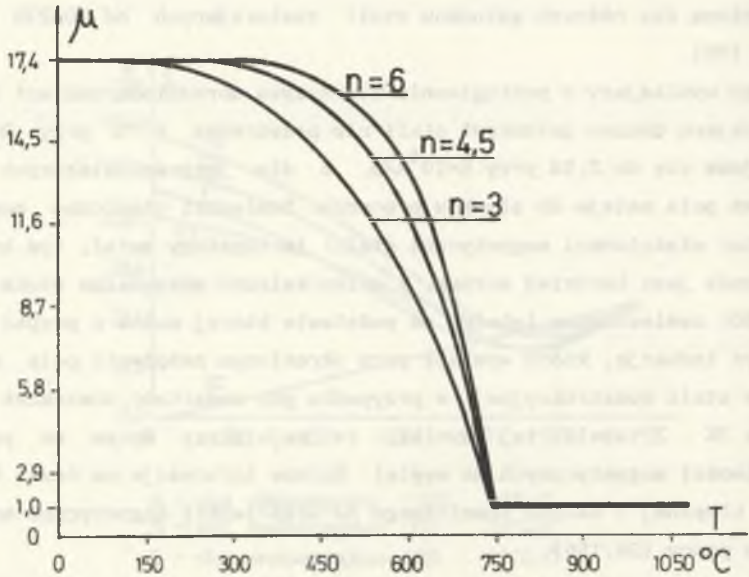
- Rezystywność  $\sigma(T)$

Zależność rezystywności od temperatury z dostateczną do obliczeń dokładnością można aproksymować liniowo:

$$\sigma(T) = \sigma_{20^\circ\text{C}} \left[ 1 + \beta_R (T - 20) \right] \quad (A2.7)$$

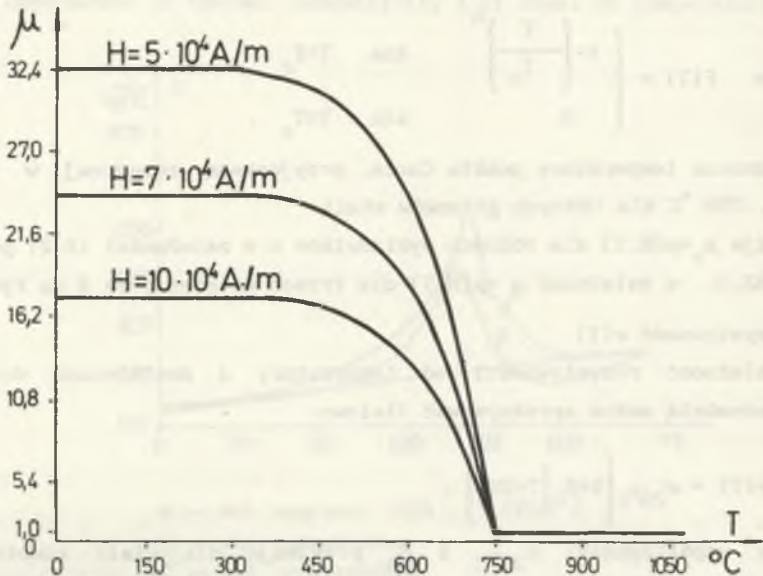
gdzie współczynniki  $\sigma_{20^\circ\text{C}}$  i  $\beta_R$  przyjmują dla stali konstrukcyjnych wartości:  $\sigma_{20^\circ\text{C}} = (10 \dots 20) \mu\Omega\text{m}$ ;  $\beta_R = (0,004 \dots 0,0065) \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

Wyznaczone doświadczalnie wartości rezystywności dla różnych gatunków stali pokazano na rys.A2.5.



Rys.A2.3. Zależność  $\mu$  od temperatury  $T$  dla różnych wartości wykładnika  $n$  z zależności (A2.6.)

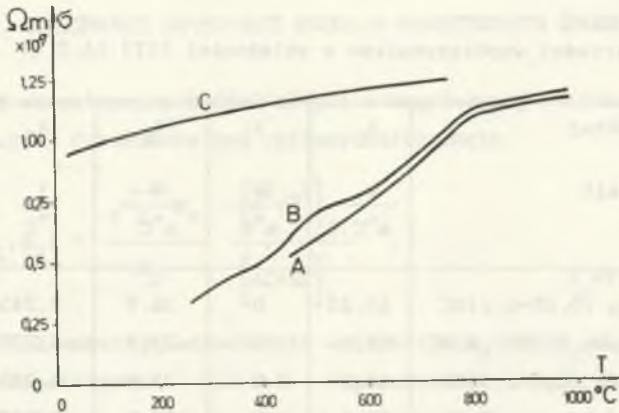
Fig.A2.3. Dependence of  $\mu$  on temperature  $T$  for different values of the exponent  $n$  from formula (A2.6.)



Rys.A2.4. Zależność  $\mu$  od temperatury  $T$  dla różnych wartości pola  $H$

Fig.A2.4. Dependence of  $\mu$  on temperature  $T$  for different values of field intensity  $H$





- A - stal niskowęglowa (0,05...0,2%) C
- B - stal średniowęglowa (0,2...0,6%) C
- C - stal chromoniklowa

Rys.A2.5. Zależność rezystywności  $\sigma$  stali od temperatury T

Fig.A2.5. Dependence of steel resistivity  $\sigma$  on temperature T

Zależności  $\lambda(T)$ ,  $c(T)$   $\gamma_m(T)$  dla materiałów termoizolacyjnych wymurówki można znaleźć w pracach [36,152]. Dla wymurówki z szamotu przyjmują one postaci:

$$\lambda_w(T) = (0,697 + 0,64 \cdot 10^{-3} T) 1,163 \quad \left[ \frac{W}{m^{\circ}C} \right], \quad (A2.8a)$$

$$c_w(T) = (880 + 0,23T) 4186 \quad \left[ \frac{J}{kg^{\circ}C} \right], \quad (A2.8b)$$

$$\gamma_{m_w}(T) = 1850 \frac{kg}{m^3} = const. \quad (A2.8c)$$

Ich wpływ na dokładność obliczeń jest znacznie mniejszy niż wpływ tych samych wielkości dla wsadu stalowego.

Tabela A2.1

Wartości współczynników z zależności  $\lambda(T)$  (A.2.1)

Rodzaj	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$T_0$
stali	$\frac{W}{m^{\circ}C}$	$\frac{W}{m^{\circ}C}$	$\frac{W}{m^{\circ}C}$	$\frac{1}{^{\circ}C}$	$^{\circ}C$
niskowęglowa (0,05-0,2)%C	63,2	0	36,9	0,245	975
średniowęglowa (0,2-0,6)%C	55,9	0	31,3	0,285	935
wysokowęglowa (0,6-1,3)%C	56,2	0	31,6	0,235	900
niskostopowa	48,8	0	21,5	0,240	950
chromoniklowa	14,0	1,6	0	-	-

Tabela A2.2

Wartości współczynników z zależności  $c(T)$  (A2.2)

Rodzaj	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$T_0$	n
stali	$\frac{J}{kg^{\circ}C}$	$\frac{J}{kg^{\circ}C}$	$\frac{J}{kg^{\circ}C}$	$\frac{1}{^{\circ}C}$	$^{\circ}C$	-
węglowa (0,09-1,23)%C	481,5	199,7	812,2	0,0099	768	1,0
niskostopowa	481,5	98,4	669,9	0,0047	740	5,0
chromoniklowa	485,7	159,1	0	-	-	0,7

Tabela A2.3

Wartości współczynników z zależności  $\alpha_L(T)$  (A2.4)

Rodzaj	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$T_0$
stali	$^{\circ}C^{-1}$	$^{\circ}C^{-2}$	$^{\circ}C^{-1}$	$^{\circ}C^{-2}$	$^{\circ}C$
węglowa (0,09-1,23)%C i niskostopowa	10,7	6,0	2,9	0,76	905
chromoniklowa	16,5	4,0	0,0	-	-

ANEKS A3. ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE ROZKŁAD WEWNĘTRZNYCH ŹRÓDEŁ CIEPŁA [106]

Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w nagrzewanej indukcyjnie nieskończenie długiej rurze może być opisany zależnością:

$$w(m, m_1, m_2) = \frac{\sqrt{2} p_0}{\Delta_2} \frac{[A^2+B^2]_{01}}{[AC+BC]_{21}}, \quad p_0 \neq f(t). \quad (A3.1)$$

Indeksy 0,1,2 wskazują odpowiednio wartości  $m, m_1$  lub  $m_2$ , dla których oblicza się współczynniki A, B, C, D. Współczynniki  $A(m, m_1, m_2)$ ,  $B(m, m_1, m_2)$ ,  $C(m, m_1, m_2)$ ,  $D(m, m_1, m_2)$  są kombinacjami funkcji Thompsona i ich pochodnych.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a_{ij} + \kappa m_1 a'_{ij}, & B_{ij} &= b_{ij} + \kappa m_1 b'_{ij}, \\ C_{ij} &= c_{ij} + \kappa m_1 c'_{ij}, & D_{ij} &= d_{ij} + \kappa m_1 d'_{ij}, \end{aligned} \quad (A3.2)$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \text{kei}'_m \text{ber}'_{m_1} + \text{ker}'_m \text{bei}'_{m_1} - \text{bei}'_m \text{ker}'_{m_1} - \text{ber}'_m \text{kei}'_{m_1}, \\ a'_{ij} &= -\text{ker}_m \text{ber}'_{m_1} + \text{kei}_m \text{bei}'_{m_1} + \text{ber}_m \text{ker}'_{m_1} - \text{bei}_m \text{kei}'_{m_1}, \\ b_{ij} &= -\text{ker}'_m \text{ber}'_{m_1} + \text{kei}'_m \text{bei}'_{m_1} + \text{ber}'_m \text{ker}'_{m_1} - \text{bei}'_m \text{kei}'_{m_1}, \\ b'_{ij} &= \text{bei}_m \text{ker}'_{m_1} + \text{ber}_m \text{kei}'_{m_1} - \text{kei}_m \text{ber}'_{m_1} - \text{ker}_m \text{bei}'_{m_1}, \\ c_{ij} &= \text{kei}'_m \text{ber}_{m_1} + \text{ker}'_m \text{bei}_{m_1} - \text{bei}'_m \text{ker}_{m_1} - \text{ber}'_m \text{kei}_{m_1}, \\ c'_{ij} &= -\text{ker}_m \text{ber}_{m_1} + \text{kei}_m \text{bei}_{m_1} + \text{ber}_m \text{ker}_{m_1} - \text{bei}_m \text{kei}_{m_1}, \\ d_{ij} &= -\text{ker}'_m \text{ber}'_{m_1} + \text{kei}'_m \text{bei}'_{m_1} + \text{ber}'_m \text{ker}'_{m_1} - \text{bei}'_m \text{kei}'_{m_1}, \\ d'_{ij} &= \text{bei}_m \text{ker}_{m_1} + \text{ber}_m \text{kei}_{m_1} - \text{kei}_m \text{ber}_{m_1} - \text{ker}_m \text{bei}_{m_1}, \end{aligned} \quad (A3.3)$$

gdzie:

$$m = \frac{\sqrt{2} r}{\Delta_2}, \quad m_1 = \frac{\sqrt{2} r_1}{\Delta_2}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{2} r_2}{\Delta_2}, \quad (A3.4)$$

$\text{ber}, \text{ber}', \text{bei}, \text{bei}', \text{ker}, \text{ker}', \text{kei}, \text{kei}'$  - funkcje Thompsona i ich pochodne;  $\kappa = \frac{1}{2\mu_2}$ , gdzie  $\mu_2$  jest względną przenikalnością magnetyczną materiału rury.

Dla  $m_2 \geq 8$  można stosować wyrażenia asymptotyczne dla funkcji Thompsona i

zapisać współczynniki w postaci:

$$a'_{m_2 m_1} = c'_{m_2 m_1} = -\frac{1}{\sqrt{2m_2 m_1}} \left( \cos \zeta \operatorname{sh} \zeta + \sin \zeta \operatorname{ch} \zeta \right), \quad (\text{A3.5})$$

$$a'_{m_2 m_1} = -d'_{m_2 m_1} = -\frac{1}{\sqrt{2m_2 m_1}} \cos \zeta \operatorname{ch} \zeta, \quad (\text{A3.6})$$

$$b'_{m_2 m_1} = d'_{m_2 m_1} = \frac{1}{\sqrt{2m_2 m_1}} \left( \cos \zeta \operatorname{sh} \zeta - \sin \zeta \operatorname{ch} \zeta \right), \quad (\text{A3.7})$$

$$b'_{m_2 m_1} = c'_{m_2 m_1} = -\frac{1}{\sqrt{2m_2 m_1}} \sin \zeta \operatorname{sh} \zeta, \quad (\text{A3.8})$$

gdzie: 
$$\zeta = \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A3.9})$$

Inne aproksymacje funkcji rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła można znaleźć w pracach [116, 117].

#### ANEKS A4. ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE IMPEDANCJĘ WSADU [106]

Zakładając, że wsad ruroy i wzbudnik są nieskończenie długie, a materiał rury ma stałą przenikalność magnetyczną  $\mu_2$  i rezystywność  $\sigma_2$ , rezystancję  $R_2$  i reaktancję  $X_2$  takiego wsadu można obliczyć z zależności:

$$R_2 = \Pi \sigma_2 \frac{2}{l_2 m_2} \frac{\left[ AC+BD \right]_{01}}{\left[ C^2+D^2 \right]_{21}}, \quad (\text{A4.1})$$

$$X_2 = \Pi \sigma_2 \frac{2}{l_2 m_2} \frac{\left[ BC-AD \right]_{01}}{\left[ C^2+D^2 \right]_{21}}. \quad (\text{A4.2})$$

Postać funkcji występujących w tych wyrażeniach opisano w Aneksie A3.

## LITERATURA

- [1] Adelfeld B.: A numerical solution of transient nonlinear eddy current problems including moving iron parts, IEEE Trans., Vol. ,MAG-5, 1978.
- [2] Ajiz M.A., Jennings A.: A robust incomplete Choleski-conjugate gradient algorithm, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 20. 1984, pp. 949-966.
- [3] Ashour S.S., Hanna O.T.: A new very simple explicit method for the integration of mildly stiff ordinary differential equations, Computers chem. Engng., Vol. 14, No. 3, 1990, pp. 267-272.
- [4] Balian R.H., Siwiers M.A.: Tiristornyje gienieratory i inwerty, Leningrad, Energoizdat, 1982.
- [5] Beckenbach E.F.: Modern mathematics for the engineer, Nowy Jork, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [6] Bigeon J. at al: Finite element analysis of an electromagnetic brake, IEEE Trans., Vol. MAG-19, No. 6, 1983.
- [7] Bodażkow W.A.: Indukcyjny nagrzew trub, Leningrad, Maszynostrojenije, 1969.
- [8] Bolkowski S. at al.: Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego, Warszawa, Wyd. Pol. Warszawskiej, 1986.
- [9] Bompa L., Schueller P., Sabonadiere J.C.: Analysis and synthesis of an electromagnet used for circuit breaker operation, IEEE Trans., Vol. MAG-21, No. 6, 1985, pp. 2464-2467.
- [10] Brebbia C.A.: Topics in Boundary Element Research, Vol. 3, Computational Aspects, Heidelberg, Springer Verlag, 1987.
- [11] Burais N. at al: Numerical solution of eddy currents problems including moving conducting parts, IEEE Trans., Vol. MAG-20, No. 5, 198
- [12] Burke P.E., Lavers J.D.: The use of modeling methods in the design of electroheat equipment, IEEE Trans., Vol. IA-19, No. 1, 1983, pp. 57-63.
- [13] Carslaw H.S., Jaeger J.C.: Conduction of heat in solids, Oxford, Oxford University Press, 1959.
- [14] Christie I. at al.: FEM for second order differential equation with significant first order derivatives, Int. J. for numerical methods in engineering. Vol. 10, 1976, pp. 1389-1396.

- [15] Chua.L.O., Pen-Min Lin: Komputerowa analiza układów elektronicznych, Warszawa, WNT, 1981.
- [16] Chyla M.: Nowoczesne metody obróbki cieplnej rur, Problemy Projektowania Hutnictwa i Przemysłu Maszynowego, nr 12, 1974.
- [17] Ciok Z.: Metody obliczania pól elektromagnetycznych i przepływowych, Warszawa, Wyd. Pol. Warszawskiej, 1981.
- [18] Coulomb J.L., Sabonnadiere J.C.: SAPR w elektrotechnice, Moskwa, Mir, 1988.
- [19] Davat B. et al: The movement in field modelling, IEEE Trans., Vol. MAG-21, No. 6, 1985.
- [20] Davies J., Simpson P.: Induction heating handbook, Londyn, Mc Graw-Hill, 1979.
- [21] Dhatt G., Touzot G.: Une presentation de la methode des elements finis, Paris, Maloine S.A., 1984.
- [22] Dryja M., Jankowscy J. i M.: Przegląd metod i algorytmów numerycznych, Warszawa, T. 1., 1981, T. 2., 1982, WNT.
- [23] El-Markaby M.S., Fawzi T.H., Ahmed M.T.: Approximate treatment of nonlinear current problems. IEEE Trans., Vol. MAG-18, No. 6, 1982.
- [24] Ermakow W.S.: K woprosu o niestacionarnom tiempieraturnom pole w tiepłowydeljajuszczem elemencie rieaktora, Inż. Fiz. Żurnal, nr 5, 1960.
- [25] Fano R., Chu L.J., Adler R.B.: Electromagnetic fields, energy and forces, Nowy Jork., J. Wiley & Sons, 1960.
- [26] Fawzi T.H., Ali K.F., Burke P.E.: Boundary integral equations analysis of induction devices with rotational symmetry, IEEE Trans., Vol. MAG-19, No. 1, 1983, pp. 36-44.
- [27] Fawzi T.H., Ali K.F., Burke P.E.: Boundary element analysis of multilayer induction problems with rotational symmetry, IEEE Trans., Vol. MAG-19, No. 6, 1983, pp. 2401-2404.
- [28] Fawzi T.H., Ahmed M.T., Burke P.E.: On the use of the impedance boundary conditions in eddy current problems, IEEE Trans., Vol. MAG-21, No. 5, 1985, pp. 1835-1840.
- [29] Ferrieux J.P., Keradec J.P., Baudon Y.: A series-resonant inverter for induction heating, European Power Electronic Conference, Grenoble, 1988.
- [30] Fikus F.: Miejscowe indukcyjne nagrzewanie rur w procesach obróbki plastycznej, Z. N. Pol. Śl., Hutnictwo, Z. 9, Gliwice, 1976.
- [31] Foggia A., Sabonnadiere J.C., Silvester P.: Finite element solution of saturated travelling magnetic field problems, IEEE Trans., PAS-94, No. 3, 1975, pp. 866-871.

- [32] Gołębiowski J.: Badanie granicznych zagadnień pól elektromagnetycznych i termicznych metodami analitycznymi, Białystok, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, 1989.
- [33] Grabowski S.: Nowoczesne walcownie rur bez szwu, Problemy Projektowania Hutnictwa i Przemysłu Maszynowego, nr 2, 1981.
- [34] Grigull U., Sander H.: Wärmeleitung, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [35] Güldner H.: Schwingkreisumrichter für die induktive Erwärmung, Elektr. H. 11, 1973.
- [36] Gutman M.B. (red.): Materiały dla elektrotermicznych установок, Moskwa, Energoatomizdat, 1987.
- [37] Grebieniow J.A., Riabow J.A.: Metoda uśredniania w mechanice nieliniowej, Warszawa, WNT, 1982.
- [38] Gruca G.: Wybrane metody rozwiązywania dużych układów liniowych równań algebraicznych otrzymywanych w problemach polowych, praca dyplomowa, IETiP Pol. Śl., Gliwice, 1990.
- [39] Habermehl S., Jiles D.C., Teller C.M.: Influence of heat treatment and chemical composition on the magnetic properties of ferromagnetic steels, IEEE Trans., Vol. MAG-21, No. 5, 1985.
- [40] Hagewaldt F., Ostendorf H.: Induction heating in rolling mills, ABB Review No. 2, 1989, pp. 25-30.
- [41] Hahn S.Y. et al.: An upwind FEM for electromagnetic problems in moving media, Int. Jour. for Num. Math. in Eng., Vol. 24, 1987, pp. 2071-2086.
- [42] Hanna O.T.: The use of integral global extrapolation in the numerical solution of ordinary differential equations, Computers chem. Engng., Vol. 14, No. 3, 1990, pp. 273-279.
- [43] Heinrich J.C. et al.: An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equations, Int. Jour. for Num. Math. in Eng., Vol. 11, 1977, pp. 131-143.
- [44] Hering M.: Termokinetika dla elektryków, Warszawa, WNT, 1979.
- [45] Hodgkins W.R., Waddington J.F.: The solution of 3-dimensional induction heating problems using an integral equation method, IEEE Trans., Vol. MAG-18, No. 2, 1982, pp. 476-480.
- [46] Horoszko E.: Oszczędność energii w elektrotermii, Wiadomości Elektrotechniczne, nr 17-18, 1981.
- [47] Iyengar S.R.K., Jain M.K.: Comparative study of two and three level ADI methods for parabolic equation with a mixed derivative. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, 1976, pp. 1309-1315.

- [48] Januszkiewicz K. T.: Numerical calculations of thermal and electrical parameters of an induction heated moving non-magnetic charge. II Konferencja Elektrotermii, Leningrad, 1989.
- [49] Jensen O. K., Finlayson B. A.: Solution of the convection-diffusion equation using a moving coordinate system, in Finite elements in water resources, Londyn, Pentech Press, 1987.
- [50] Joffe J. S., Gitgarc D. A.: Energietyczeskije czastotnyje charakteristiki indukcyjnych ustanowok, Elektrotermia, wyp. 52, 1966.
- [51] Kalus M., Skoczkowski T.: Optimal induction heating of steel cylinders. Prace Instytutu Elektrotechniki, Z. 132, 1984.
- [52] Kalus M., Skoczkowski T.: Model matematyczny i jego zastosowanie do optymalizacji procesu nagrzewania indukcyjnego, IX SPETO, Wisła, 1986.
- [53] Kalus M.: Sterowanie optymalne grzania indukcyjnego rur, praca doktorska, Pol. Śl., Gliwice, 1985.
- [54] Kalus M., Skoczkowski T.: Mikroprocesorowy układ sterowania czasooptymalnym nagrzewaniem indukcyjnym, Konferencja pt. "Nowoczesne urządzenia i technologie elektrotermiczne w metalurgii", Szczyrk, 1987.
- [55] Kalus M., Skoczkowski T.: Zastosowanie modelu matematycznego do optymalizacji procesu nagrzewania indukcyjnego rur. Z N Pol. Śl., Elektryka, Z. 104, 1988.
- [56] Kalus M., Skoczkowski T.: Synteza układu regulacji falownika równoległego zasilającego nagrzewnicę indukcyjną, Archiwum Elektrotechniki, zgłoszony w 1989.
- [57] Kalus M., Skoczkowski T.: Układ kontroli i zabezpieczenia przetwornicy. Patent przyznany (brak świadectwa).
- [58] Kalus M., Skoczkowski T.: Układ wyżarzarki. Patent nr 146918 z dnia 30.09.1989.
- [59] Kaćki E., Woźniakowski M.: Modelowanie analogowe, hybrydowe i cyfrowa symulacja maszyn analogowych, Warszawa, PWN, 1979.
- [60] Kolbe E., Reiss W.: Eine methode zur numerischen Bestimmung des Stromdichteverteilung, Wiss. Z. Hochschule Elektrotechnik Ilmenau, B. 9, nr 3, 1963, pp. 311-317.
- [61] Kolbe E. et al.: Möglichkeiten zur Modellierung der induktiven Erwärmung mit Vorschub, Elektrowärme Int., B. 6, nr 39, 1981.
- [62] Konrad A.: Eddy currents and modelling, IEEE Trans. Vol. MAG-21, No. 5, 1985, pp. 1805-1810.
- [63] Konrad A.: Electromagnetic devices and the application of computational techniques in their design, IEEE Trans., Vol. MAG-21, No. 6, 1985, pp. 2382-2387.



- [64] Krakowski M., Szymanski G.: Eddy currents losses in a cylindrical ferromagnetic core due to a.c. in coaxial solenoids, *Archiwum Elektrotechniki*, Vol. 25, No. 1, 1976.
- [65] Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna, tom II Pole elektromagnetyczne*, Warszawa-Poznań, PWN, 1979.
- [66] Krawczyk A.: Uwagi o metodyce rozwiązywania zagadnień brzegowych, *Prace Inst. Elektrotechniki*, Z. 124, 1983.
- [67] Krawczyk A.: Analiza niestacjonarnych pól elektromagnetycznych metodami całkowo-brzegowymi, *Prace Inst. Elektrotechniki*, Z. 149, 1988.
- [68] Kuczewski Z., Skoczowski T.: Grzanie indukcyjne w procesach metalurgicznych. *Z N Pol. Śl., Elektryka*, Z. 84, Gliwice 1983.
- [69] Kuwaldin A.B.: *Nizkotemperaturnyj indukcyjnyj nagriew stali*, Moskwa, Energija, 1976.
- [70] Landis J.P.: A static power supply for induction heating, *IEEE Trans. Vol. IECJ*, No. 17, 1970, pp. 313-320.
- [71] Langer E.: *Teorie indukcnio a dielektrického tepla*, Praga, CSAV, 1964.
- [72] Lavers J.D.: Numerical solution methods for electroheat problems, *IEEE Trans. Vol. MAG-19*, No. 6, 1983, pp. 2566-2572.
- [73] Lehmann Ch.: Die Berechnung eines komplexen Iterationsparameters zur Optimierung der Konvergenz des komplexen SOR-Iterationsverfahrens, *Archiv für Elektrotechnik*, No. 69, 1986, pp. 327-333.
- [74] Liwiński W.: *Nagrzewnice indukcyjne skrośne*, Warszawa, WNT, 1968.
- [75] Lupi S., Niemkow W.S.: Analiticeskij rasczot cilindriczeskich indukcyjnych sistiem, *Elektriczestwo*, nr 6, 1978.
- [76] Lupi S.: Planar circular coils for induction heating. *Elektrowärme International*, B. 6, No. 37, 1979.
- [77] Łykw A.W.: *Teoria ciepłoprowodności*, Moskwa, Wysszaja Szkoła, 1967.
- [78] Macewityj J.M., Kuniesz J.: *Gibridnoje modelirovanije tiepłowych processow*, Kijew, Naukowa Dumka, 1987.
- [79] Makosz A.: Model numeryczny falownika równoległego zasilającego nagrzewnicę indukcyjną, praca dyplomowa w IPPEiE Pol. Śl., Gliwice, 1987.
- [80] Makowskij W.A.: Empiriceskije formuły dla wyrażenija tiempieraturnoj zawisimosti tiepłofiziceskich swojstw stali, *Stal*, nr 1, 1972.
- [81] Marchand Ch., Foggia A.: 2D finite element program for magnetic induction heating. *IEEE Trans. Vol. MAG-19*, No. 6, 1983, pp. 2647-2649.

- [82] Masse Ph., Morel B., Breville Th.: A finite element prediction correction scheme for magneto-thermal coupled problem during Curie transition. IEEE Trans., Vol. MAG-21, No. 5, 1985, pp. 1871-1873.
- [83] Matthes H.G.: Der statistische Frequenz-Umrichter zum Einsatz in der industriellen Elektrowärme, Elektrowärme Int., B. 3, No. 35, 1977.
- [84] Mulhaus J.: On the solution of 2-dimensional saturable eddy-current problems by a.d.i. technique, Proc. IEE, Vol. 123, No. 2, 1976.
- [85] Müller W.: A new iteration technique for solving stationary eddy-current problems using the method of finite differences, IEEE Trans. Vol. MAG-18, No. 2, 1982, pp. 588-593.
- [86] Muras J.: Analiza pola elektromagnetycznego w nagrzewnicach indukcyjnych ze wzbudnikami wielowarstwowymi, praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice, 1990.
- [87] Nacke B., Mulbauer A.: Numerische Simulation des induktiven Erwärmungsvorganges in Stangenerwärmungsanlagen, Elektrowärme Int., B. 2, No. 42, 1988.
- [88] Nakata T., Takahashi N.: Direct finite element analysis of flux and current distributions under specified conditions, IEEE Trans., Vol. MAG-18, No. 2, 1982, pp. 325-330.
- [89] Napieralska-Jabłońska E.: Analiza niestacjonarnego pola elektromagnetycznego w nagrzewanym indukcyjnie ferromagnetyku o zmiennych parametrach fizycznych, rozprawa doktorska, Łódź, 1978.
- [90] Nejman L.R.: Powierzchnostnyj efekt w ferromagnitnych ciałach, Leningrad, Gosenergoizdat, 1949.
- [91] Nejman L.R., Demircjan K.S.: Teoreticzeskije osnovy elektrotechniki, Moskwa, Energija, 1981.
- [92] Niedbała R.: Sprzężone nieliniowe pole elektromagnetyczne i temperaturowe przy nagrzewaniu indukcyjnym, I Krajowa Konferencja Pola Elektromagnetycznego, Jadwisin, 1982.
- [93] Niemkow W.S.: Indukcionnyj nagriew obłoczok s proiswolnoj tolszczinoj stienki, Izv. AN SSSR, Energetika i Transport, nr 3, 1979.
- [94] Niemkow W.S.: Rasczot induktorow s ispolzowanijem impiedansnych granicznych usłowij, Elektrichestwo, nr 6, 1980, pp. 64-66.
- [95] Niemkow W.S., Polewodow B.S.: Matematičeskoje modielirowanije na EWM ustrojstw vysokoczasnogo nagriewa, Leningrad, Maszinstrojeniije, 1980.
- [96] Niemkow W.S., Demidowicz W.B.: Ekonomiczne algoritmy czislennogo rasczota ustrojstw indukcionnogo nagriewa, Izv. WUZ, Elektromechanika, nr 11, 1984, pp. 52-59.
- [97] Niemkow W.S., Demidowicz W.B.: Teoria i rasczot ustrojstw indukcionnogo nagriewa, Leningrad, Energoatomizdat, 1988.

- [98] Noye J.: Numerical solutions of partial differential equations, Amsterdam, North-Holland Publishing Com., 1982.
- [99] Pawłow N.A.: Tiepłowej nagriew trub s proizwolnoj tolszczinój stienki, Promyszennoje primienienije TWCz. Trudy WNIITWCz, wyp. 15, Moskwa, 1975.
- [100] Pawłow N.A.: Inżeniernyje tiepłowyje rasczoty indukcionnych nagriewatielej, Moskwa, Energijska, 1978.
- [101] Pawłow N.A.: Rasczot induktorow dla nagriewa ferromagnitnych cilindriczeskich tieł, Elektriczesstwo, nr 1, 1980.
- [102] Pelly B.R.: Latest developments in static high frequency power sources for induction heating, IEEE Trans., Vol. IECJ, No. 17, 1970, pp. 297-312.
- [103] Pissanetzky S.: Sparse matrix technology, Londyn, Academic Press Inc., 1984.
- [104] Price H.S., Varga R.S., Warren J.E.: Application of oscillation matrices to diffusion-convection equation, J. Maths. and Physics, No. 45, 1966, pp. 301-311.
- [105] Roberts D.L., Selim M.S.: Comparative study of six explicit and two implicit finite difference schemes for solving one-dimensional parabolic partial differential equations, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 20, 1984, pp. 817-844.
- [106] Rodygin N.M.: Indukcionnyj nagriew stalnych izdelij, Swierdłowski, Metalurgizdat, 1950.
- [107] Saito Y. et al.: Modelling of nonlinear inductor exhibiting hysteresis loops and its application to the single phase parallel inverters, IEEE Trans., Vol. MAG-19, No. 6, 1983, pp. 2189-2191.
- [108] Sajdak Cz.: Analiza pracy cylindrycznych urządzeń elektromagnetycznych do transportu i mieszania ciekłych metali, Z N Pol. Śl., Hutnictwo, Z. 29, Gliwice, 1987.
- [109] Sala A.: Radiacyjna wymiana ciepła, Warszawa, WNT, 1982.
- [110] Samarski A.A.: Teoria raznostnych schiem, Moskwa, Nauka, 1983.
- [111] Samarski A.A., Nikołajew J.S.: Metody rozwiązywania równań siatkowych, Warszawa, PWN, 1988.
- [112] Senkara T.: Obliczanie cieplne pieców grzewczych w hutnictwie, Katowice, Śląsk, 1981.
- [113] Sigfridson R.: Induction heaters for continuous heating of tubes, ASEA J., No. 1, 1979.
- [114] Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego, Warszawa, WNT, 1985.

- [115] Sikora R. at al: System oprogramowania metod numerycznych analizy pól elektromagnetycznych, Przegląd Elektrotechniczny, nr 2, 1985, pp. 41-44.
- [116] Skoczkowski T., Kalus M.: Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła przy indukcyjnym nagrzewaniu walców stalowych. ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 84, Gliwice, 1983.
- [117] Skoczkowski T.: Analiza zjawisk elektromagnetycznych i cieplnych w nagrzewnicach indukcyjnych wsadów walcowych, praca doktorska, Pol. Śl., Gliwice, 1985.
- [118] Skoczkowski T., Kalus M.: The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes. IEEE Trans. Vol. MAG-25, No. 5, 1989.
- [119] Skoczkowski T.: Wpływ zmian pewnych wielkości na parametry wsadu nagrzewanego indukcyjnie, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 113, Gliwice (w druku).
- [120] Skoczkowski T.: Algorytm wyznaczania parametrów elektromagnetycznych przy indukcyjnym nagrzewaniu wsadu ferromagnetycznego, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 113, Gliwice (w druku).
- [121] Skoczkowski T.: Analytical method of evaluation temperature field in an induction heated pipe, Archiwum Elektrotechniki, zgłoszony w 1988r.
- [122] Skoczkowski T.: Certain remarks on the application of the Fourier integral to evaluation of induction heater parameters, Archiwum Elektrotechniki, zgłoszony w 1988r.
- [123] Skoczkowski T., Kalus M.: Model analogowy falownika równoległego zasilającego nagrzewnicę indukcyjną, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 115, Gliwice (w druku).
- [124] Skoczkowski T., Kalus M.: Układ sterowania i regulacji falownika równoległego zasilającego nagrzewnicę indukcyjną, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 115, Gliwice (w druku).
- [125] Skoczkowski T.: Model matematyczny procesu nagrzewania indukcyjnego uwzględniający wpływ tyrystorowego źródła zasilania, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 117, Gliwice (w druku).
- [126] Skoczkowski T.: Wpływ uśrednienia pewnych właściwości materiałowych na obliczenie rozkładu temperatury przy nagrzewaniu indukcyjnym, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 120, Gliwice (w druku).
- [127] Skoczkowski T.: Badanie pola elektromagnetycznego i temperatury w nagrzewnicach indukcyjnych. Przegląd literatury, ZN Pol. Śl., Elektryka, Z. 120, Gliwice (w druku).
- [128] Skoczkowski T.: Computer simulation of the process of induction heating of ferromagnetic pipes. Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, Proceedings of ISEF, editors J. Turowski & K. Zakrzewski, James & James Science Publishers Ltd., Londyn, 1990.
- [129] Skoczkowski T.: Sprawozdanie z pracy NB 577/RE3/86, Łódź, 1987.

- [130] Skoczkowski T.: Sprawozdanie z pracy NB 577/RE3/86, Łódź, 1988.
- [131] Skoczkowski T.: Sprawozdanie z pracy NB 577/RE3/86, Łódź, 1989.
- [132] Skoczkowski T.: Analiza zjawisk elektromagnetycznych i cieplnych za pomocą przekształceń całkowitych w nagrzewnicach indukcyjnych, I Krajowa Konferencja Pola Elektromagnetycznego, Jadwisin, 1982.
- [133] Skoczkowski T., Kalus M.: Model matematyczny nagrzewania indukcyjnego stosowany przy optymalizacji procesu nagrzewania, II Krajowa Konferencja Pola Elektromagnetycznego, Rydzyna, 1983.
- [134] Skoczkowski T. et al.: Tyristorowe wyżarzarki indukcyjne, Nowoczesne urządzenia i technologie elektrotermiczne w metalurgii, Szczyrk, 1987.
- [135] Skoczkowski T., Kalus M.: The mathematical model of induction heating of steel ferromagnetic pipes, ISEF '87, Pavia, 1987.
- [136] Skoczkowski T.: Algorytm wyznaczania parametrów elektromagnetycznych przy indukcyjnym nagrzewaniu wsadu ferromagnetycznego, XI SPETO, Wisła, 1988.
- [137] Skoczkowski T.: Symulacja komputerowa procesu nagrzewania indukcyjnego rur, Automatyzacja w elektrotermii, Sulejów, 1988.
- [138] Skoczkowski T.: Model matematyczny procesu nagrzewania indukcyjnego uwzględniający wpływ tyrystorowego źródła zasilania, XII SPETO, Wisła, 1989.
- [139] Skoczkowski T.: Computer simulation of the process of induction heating of ferromagnetic pipes. ISEF '89, Łódź.
- [140] Skoczkowski T.: Wpływ uśrednienia pewnych właściwości materiałowych na obliczanie rozkładu temperatury przy nagrzewaniu indukcyjnym, XIII SPETO, Wisła, 1990.
- [141] Skoczkowski T.: Coupled electromagnetic and temperature fields in an induction heater of pipes, Japanese-Polish Joint Seminar on Electromagnetic Effect in Deformable Solids and Materials, Madralin, 1990.
- [142] Skoczkowski T.: Mathematical model of induction heating of pipes under nonsinusoidal supplying voltage, ISEM, Sendai, Japan, 1991.
- [143] Skoczkowski T.: New method of designing induction heaters based on field and circuit approach, Second Japanese-Polish Joint Seminar on Electromagnetic Effect in Deformable Solids and Materials, Oita, Japan, 1991.
- [144] Skoczkowski T. et al.: Układ sterowania falowników jednofazowych pracujących w rezonansie równoległym, Patent nr 137148 z dnia 4.08.1988r.

- [145] Skoczkowski T. et al.: Układ sterowania falowników jednofazowych pracujących w rezonansie równoległym, Patent nr 137149 z dnia 4.08.1988r.
- [146] Słuchockij A.E., Ryskin S.E.: Induktory dla indukcyjnego nagrywa, Leningrad, Energijska, 1974.
- [147] Słuchockij A.E.: Induktory, Leningrad, Maszynostrojenije, 1989.
- [148] Stochniol A et al.: Computer aided modelling of the continuous induction heating of slabs, ISEF' 89, Łódź, 1989.
- [149] Stoer J., Bulirsch R.: Wstęp do metod numerycznych, t. II, Warszawa, PWN, 1980.
- [150] Stoll R.L.: Solution of linear steady state eddy-current problems by complex successive overrelaxation, Proc. IEE, Vol. 177, No. 7, 1970.
- [151] Stoll R.L.: Eddy currents, Oxford, Clarendon Press, 1974.
- [152] Swieczanski A.D. (red.): Nizkotiempieraturnyj elektronagryw, Moskwa, Energijska, 1978.
- [153] Szachudrin W.I., Narygin W.A.: Tiempieraturnoje pole w koniecznom połom cilindrie pri indukcyjnom nagrywie, Fizyka i chemia obrobki mat., nr 2, 1976.
- [154] Szamow A.N., Bodażkow B.W.: Projektirovanije i eksploatacja vysokoczasnych ustanowok, Moskwa, Masigiz, 1963.
- [155] Szimko N.Z.: Koniecznoje integralnoje preobrazowanie Hankela dla połogo cyindra, Inżenierno Fiziczeskij Żurnał, nr 10, 1960.
- [156] Szmatko O.A., Usow J.W.: Elektriczeskije i magnitnyje swojstwa mietalłow i spławow, Sprawocznik, Kijew, Naukowa Dumka, 1987.
- [157] Thelin C.: Induction heating and hot shearing plant for billets at AB Bofors-Klista, Sweden, ASEA J., Vol. 54, No. 4, 1981, pp. 91-96.
- [158] Tozoni O.W.: Rasczot elektromagnitnych polej na wycislitielnych maszinach, Kijew, Technika, 1967.
- [159] Tunia H. et al.: Układy energoelektroniczne. Obliczanie, modelowanie, projektowanie, Warszawa, WNT, 1982.
- [160] Turowski J.: Elektrodynamika techniczna, Warszawa, WNT, 1968.
- [161] Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementow maszyn i urzadzeń elektrycznych, Warszawa, WNT, 1982.
- [162] Varoglu E., Finn W.D.L.: A finite element method for diffusion-convection equation, w Finite elements in water resources, Londyn, Pentech Press, 1987.

- [163] Vetterling W. et al.: Numerical recipes, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
- [164] Wiak S.: Analiza pól elektromagnetycznych niestacjonarnych metodą różnic skończonych w obwodach magnetycznych przetworników elektromechanicznych, ZN Pol. Łódzkiej, nr 580, Łódź, 1989.
- [165] Wood W.L., Lewis R.W.: A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, 1978, pp. 679-689.
- [166] Woskresienski W.W.: Tiristornyje priobrazowatieli dla pitaniya indukcionnykh ustanowok, Moskwa, Metallurgia, 1979.
- [167] Young D.: Iterative solution of large linear systems, New York, Academic Press, 1971.
- [168] Zakrzewski K., Pietras F.: Methode of calculating the electromagnetic field and power losses in ferromagnetic materials taking into account magnetic hysteresis, Proc. IEE, 1971, 118(11), pp. 1679-1685.
- [169] Zienkiewicz O.C.: The finite element method in engineering science, Nowy Jork, Mc Graw-Hill, 3rd edition, 1977.

## POLA SPRĘŻONE - ELEKTROMAGNETYCZNE I TEMPERATURY - W NAGRZEWNICACH INDUKCYJNYCH RUR

### S t r e s z c z e n i e

Głównym celem pracy było opracowanie modeli matematycznych i odpowiadających im algorytmów numerycznego obliczania pól sprzężonych - elektromagnetycznego i temperatury - w nagrzewnicach indukcyjnych rur. Ponadto postawiono sobie za cel opracowanie algorytmu symulacji pracy nagrzewnicy przy zasilaniu z tyrystorowego falownika równoległego prądu. Opracowane modele matematyczne są próbą wypełnienia luki pomiędzy najnowszymi metodami obliczania pól a praktyką projektowania i eksploatacji nagrzewnic indukcyjnych. Zbudowane modele mają stanowić efektywne narzędzie badania pól sprzężonych. Do najważniejszych zagadnień wykonanych w pracy można zaliczyć opracowanie lub rozwinięcie szeregu modeli zjawisk elektromagnetycznych i termokinetycznych w nagrzewnicach rur. Modele te wykorzystują metody analitycznego, jak i numerycznego badania pól; do każdego modelu napisano odpowiadający mu program na EMC. Opracowano system obliczeniowy umożliwiający badanie nieliniowych pól sprzężonych dwu- i jednowymiarowych w nagrzewnicach indukcyjnych rur. Podano koncepcję częściowego rozprężenia obu pól i omówiono błędy obliczeń, jakie to rozprężenie powoduje. Zbadano możliwości przyjęcia do obliczeń uśrednionych wartości współczynników materiałowych wsadu  $\lambda, \sigma, c, \mu$ . Określono wpływ, jaki na proces nagrzewania ma częstotliwość i skład harmonicznego prądu wzbudnika oraz stabilizacja prądu lub napięcia wzbudnika. Przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń ilustrujących potencjalne możliwości obliczeniowe każdego modelu. Podano szereg wytycznych co do możliwości i celowości stosowania poszczególnych modeli matematycznych i pewnych metod numerycznych.

Zaproponowano algorytm umożliwiający uwzględnienie w obliczeniach zasilania nagrzewnicy z tyrystorowego falownika równoległego prądu i wskazano na wpływ takiego źródła zasilania i jego układu regulacji na proces na-



grzewania. Napisano program na EMC pozwalający symulować pracę tyrystorowego falownika równoległego prądu zasilającego nagrzewnicę indukcyjną.

Przedstawiono wyniki badań laboratoryjnych nagrzewnicy zasilanej z falownika tyrystorowego prądu o mocy 100 kW i częstotliwości do 3 kHz.

## COUPLED FIELDS - ELECTROMAGNETIC AND TEMPERATURE - IN INDUCTION HEATERS OF PIPES

### S u m m a r y

The main aim of the work has been to create mathematical models and corresponding to them numerical algorithms of evaluations of coupled fields -electromagnetic and temperature- in induction heaters of pipes. The additional goal has been to set up a simulation algorithm of the work of the induction heater supplied from the thyristor current fed parallel inverter. The created models are an attempt to fill the gap between sophisticated methods of field computations and design and operational practice. They are supposed to be an effective tool of the investigation of electromagnetic and heat transfer phenomena in induction heaters of pipes. In these models analytical as well as numerical methods are employed; for each of them a corresponding machine code for a digital computer has been written.

To investigate temperature distribution in an induction heated pipe an analytical method based on the Hankel transform has been applied. Electromagnetic field has been investigated in a system comprising an inductor of a finite length by the method of the Fourier integral. A method based on analogies between magnetic and electrical equivalent circuits has been developed. This method has happened to be very useful in investigations of the influence of a number of construction and supply factors on the impedance of the heater.

Computer programs which enable to investigate two- and one dimensional nonlinear coupled fields in induction heaters of pipes have been created. The one dimensional program has dealt with time varying electromagnetic field, in the case of two dimensional field, sinusoidally varying field has been considered. Both of the numerical models have mainly focused on the field aspects of the problem while the influence of the supply

inverter has only been introduced in an approximate way. Namely, the coupling of the fields, the complex heat exchange among separate parts of the heater and the influence of the movement of the heated body in the case of continuous induction heating, the nonlinearities of all the material coefficients for the heated body and the lining due to the change of field intensity  $H$  and temperature  $T$  during the heating process have been taken into account. The set of differential equations has been solved by the Finite Difference Method (FDM). The set of nonlinear algebraic equations arising from electromagnetic problem has been solved by the SOR method and the set for the thermic problem by the application of the Alternating Direction Implicit Iterative Method (ADI). Numerous hints about possible application and usefulness have been given. A new method of partial decoupling the fields has been proposed and errors of computations due to the decoupling have been discussed. Taking into computations averaged values of material properties of the heated pipe i.e. thermal conductivity  $\lambda$ , specific heat  $c$ , resistivity  $\sigma$ , magnetic permeability  $\mu$  has been investigated. The influence of some conditions i.e. the frequency of coil current, the stabilization of either coil current or voltage across the coil, the harmonic content of the current has been also investigated. Chosen results of computations illustrating the potentials of each method have been presented; advantages, restrictions and perspectives of development of each method have been given.

With the introduction of thyristor inverters new methods of computing induction heaters, which combine field and circuit analysis have to be developed. Such a new algorithm which enables to take into account the influence of the supply thyristor current fed parallel inverter and its control system on the heating process has been proposed. A simulation program of the work of the inverter supplying the induction heater has been written. The influence of the inverter has been investigated using an analytical description of the fields. To investigate transient states in the inverter, its circuit equations have been numerically integrated for load parameters unchanging with temperature. For steady states, the work of the inverter has been described by the method of "fundamental harmonic" i.e. assuming that the output voltage of the inverter is sinusoidal.

Also a new simulation algorithm of the whole heating process has been proposed. The electromagnetic and temperature fields have been described

by analytical methods. The heating process has been linearized by dividing the whole heating range into smaller intervals with constant material properties ( $\lambda, c, \sigma, \mu$ ) of the charge. The work of the inverter has been described by the method of "fundamental harmonic" for the steady-state case. The frequency used in calculations varies as in an actual inverter. The need of taking into account, in calculations of such heaters, the influence of the supply source and its control system has been shown. Some examples of the simulation of the heating of ferromagnetic pipes have been presented.

Laboratory investigations carried out on an induction heater of pipes supplied from the thyristor inverter of the rated power 100 kW, frequency up to 3 kHz, have shown good accuracy of the computed results when compared with the measured data.

## СОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ИНДУКЦИОННЫХ НАГРЕВАТЕЛЯХ ТРУБ

### Р е з ю м е

В работе разработаны математические модели и соответствующие им численные алгоритмы для расчета сопряженных (электромагнитного и температурного) полей в индукционных нагревателях труб. Разработан также алгоритм имитационного моделирования работы нагревателя питаемого от тиристорного параллельного инвертора тока (СПИТ). Математические модели являются попыткой выполнения разрыва между современными методами расчета полей а практикой проектирования и эксплуатации индукционных нагревателей. Построенные модели могут являться эффективным средством исследования сопряженных полей. К главным результатам работы принадлежит разработка или развитие ряда моделей электромагнитных и термокинетических явлений в нагревателях труб. Эти модели используют как аналитические, так и численные методы исследования полей. Каждой модели соответствует программа для ЭВМ. Вычислительная система позволяет исследовать также нелинейные (двух- и одномерные) сопряженные поля в индукционных нагревателях труб. Представлена концепция частичного распрямления обоих полей и рассмотрены ошибки вычислений, которые возникают в результате распрямления. Исследованы возможности принятия в расчете усредненных значений материальных коэффициентов заготовки:  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ . Определено влияние на процесс нагрева: частоты, гармонического состава тока индуктора и стабилизации тока или напряжения индуктора. Приведены примерные результаты расчета представляющие потенциальные возможности каждой модели. Дан ряд директив относительно возможности и целенаправленности применения отдельных математических моделей и некоторых численных методов.

Предложен алгоритм позволяющий учитывать в расчете питания нагревателя от тиристорного параллельного инвертора тока (ТПИТ). Подчеркивается влияние такого источника питания и его цепи регулирования на процесс нагрева. Разработана компьютерная программа позволяющая моделировать работу тиристорного параллельного инвертора тока питающего индукционный нагреватель. Представлены результаты лабораторных исследований нагревателя питаемого от тиристорного инвертора тока мощностью 100 кВт и частотой до 3 кГц.