

Bernard BARON

Zbigniew GACEK

**MODELOWANIE MATEMATYCZNE POLA ELEKTRYCZNEGO W WYSOKONAPIĘCIOWYCH  
HERMETYZOWANYCH PRZEWODACH SZYNOWYCH**

**Streszczenie.** Artykuł zawiera opis efektywnej metodyki matematycznego modelowania pola elektrycznego wewnątrz przewodów szynowych izolowanych sprężonym  $SF_6$ . W celu wyznaczenia rozkładu przestrzennego tego pola w pobliżu i wewnątrz izolatorów epoksydowych, zastosowano metodę równań całkowo-brzegowych Fredholma. Proponowany sposób postępowania ilustruje przykład obliczeniowy.

**Summary.** An effective mathematical method to field calculations within high voltage  $SF_6$ -insulated solid conductors is proposed. In order to compute the spatial field distribution near and inside epoxide insulators, the method of a Fredholm integral-bounded equations is applied. The numerical experiment is presented by the way of an example.

**Резюме.** В статье предложен эффективный метод математического моделирования электрического поля внутри шинпроводов с элегазовой изоляцией. Для определения пространственного распределения этого поля возле и внутри эпоксидных изоляторов применен метод интегро-краевых уравнений Фредгольма. Предположенный метод моделирования иллюстрирован вычислительным примером.

**1. WPROWADZENIE**

Modelowanie i obliczanie pola elektrycznego są czynnościami stanowiącymi ważny etap projektowania wysokonapięciowych urządzeń elektroenergetycznych, izolowanych sprężonym sześćofluorkiem siarki ( $SF_6$ ). Opierając się na rezultatach, odpowiednio wykonanych badań można bowiem:

- wyznaczyć rozkład przestrzenny natężenia pola elektrycznego i potencjału w zadanym układzie izolacyjnym,
- sprawdzić, czy nie są przekroczone wartości dopuszczalne natężenia pola dla sprężonego gazu i izolatorów.

Badania eksperymentalne w tym zakresie są szczególnie przydatne do racjonalnego wymiarowania wsporczych i grodziowych izolatorów epoksydowych, których wytrzymałość elektryczna powierzchniowa jest porównywalna z wytrzymałością sprężonego  $SF_6$ .

Coraz większe znaczenie praktyczne przypisuje się obecnie eksperymentom numerycznym, gdyż uzyskuje się w ten sposób szybko i na ogół zadowalające odwzorowanie modelowanego pola elektrycznego, a poza tym - można stosować metody projektowania wspomagane komputerowo. Istnieje wiele różnych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych dla sformułowanego równania potencjału (patrz [4], [7], [8]). W artykule naszkicowano konstrukcję logiczną oryginalnego modelu obliczeniowego, opracowanego metodą równań całkowo-brzegowych i służącego do wyznaczenia quasi-statycznego pola elektrycznego wewnątrz przedziału hermetyzowanego jednobiegunowego przewodu szynowego. Otrzymany układ równań operacyjnych stanowił podstawę do opracowania kilku wersji programu komputerowego, przystosowanego do inżynierskich obliczeń projektowych. Wyniki jednej z serii eksperymentów numerycznych zawiera przykład obliczeniowy.

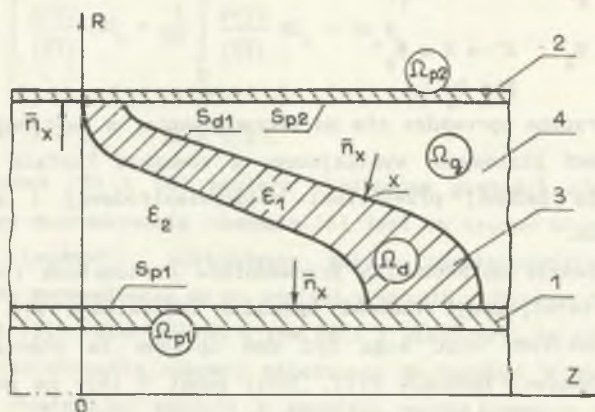
## 2. CHARAKTERYSTYKA MODELU OBLICZENIOWEGO

Ze względu na aplikacyjny charakter zagadnienia starano się zastosować możliwie prosty model obliczeniowy, służący do matematycznego opisu rozkładu przestrzennego parametrów pola elektrycznego w rozważanym układzie izolacyjnym (patrz [2] i [3]). Wykorzystano w tym celu prawa elektrostatyki oraz przyjęto, że warunki brzegowe wyznaczają:

- 1) zadane potencjały elektryczne na powierzchniach elektrod,
- 2) ciągłość potencjału i składowej normalnej wektora indukcji elektrycznej na powierzchniach rozdziału współpracujących dielektryków.

Rozważa się model ekranowanego i uwarstwionego układu izolacyjnego, typowego dla jednobiegunowego przewodu szynowego - izolowanego sprężonym gazem. Układ ten składa się z izolatora wsporczego lub grodziowego o

dowolnym kształcie, lecz symetrii obrotowej, oraz z otaczającego go sprężonego SF<sub>6</sub> (rys. 1). W układzie należy wyznaczyć rozkład przestrzenny



Rys.1. Model układu izolacyjnego jednobiegunowego przewodu szynowego  
 1- szyna prądowa, 2- osłona zewnętrzna, 3- izolator kielichowy,  
 4- sprężony SF<sub>6</sub>

Fig.1. A model of a unipolar solid conductor insulation system  
 1- conductor-rail, 2- outside screen, 3- conical insulator,  
 4- compressed SF<sub>6</sub>

pola elektrycznego wewnątrz obszarów Ω<sub>g</sub> (sprężony SF<sub>6</sub>) i Ω<sub>d</sub> (dielektryki stałe). Jeśli założymy, że obydwa współpracujące dielektryki (o zadanych przenikalnościach elektrycznych względnych ε<sub>1</sub> i ε<sub>2</sub>) są doskonałe, wówczas φ(X), t.j. potencjał elektryczny w punkcie X spełnia równanie Laplace'a z następującymi warunkami brzegowymi:

1. Na powierzchniach przewodzących S<sub>p1</sub> i S<sub>p2</sub>

$$\phi(X) = \phi_1 \quad \text{dla } X \in S_{p1} \quad (1a)$$

$$\phi(X) = \phi_2 \quad \text{dla } X \in S_{p2} \quad (1b)$$

2. Na powierzchniach rozdziału dielektryków S<sub>d</sub> = Ω<sub>g</sub> ∩ Ω<sub>d</sub> \*)

$$\lim_{X' \rightarrow X} \phi(X') = \lim_{X' \rightarrow X} \phi(X') \quad (2)$$

$$X' \rightarrow X \in S_d \quad X' \rightarrow X \in S_d$$

$$X' \in \Omega_d \quad X' \in \Omega_g$$

\*)

Zapisy pod limesami we wzorach (2) i (3) wyrażają warunek:

punkt X' zmierza do punktu X leżącego na powierzchni S<sub>d</sub> od strony obszaru Ω<sub>d</sub> (strona lewa) lub od strony obszaru Ω<sub>g</sub> (strona prawa).

oraz

$$\lim \varepsilon_1 \frac{d\Phi(X')}{dn_{X'}} = \lim \varepsilon_2 \frac{d\Phi(X')}{dn_{X'}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X' \rightarrow X \in S_d & & X' \rightarrow X \in S_d \\ X' \in \Omega_d & & X' \in \Omega_g \end{aligned}$$

Procedura numeryczna sprowadza się do sformułowania, a następnie rozwiązania układu równań liniowych, wynikającego z równania Laplace'a ( $\Delta\Phi=0$ ), obowiązującego dla zadanej przestrzeni międzyelektrodowej i powyższych warunków brzegowych.

Ponieważ w układzie naładowanych przewodników doskonałych (będących w równowadze elektrostatycznej) ładunki swobodne koncentrują się tylko na powierzchniach elektrod, więc mogą być one opisane za pomocą funkcji gęstości powierzchniowej ładunków  $\sigma(Y)$ , jeśli punkt  $Y$  leży na powierzchni  $S_{p1}$  lub  $S_{p2}$ . Wpływ obecności dielektryków na pole elektryczne wewnątrz rozpatrywanego układu można z kolei uwzględnić poprzez wprowadzenie na powierzchni  $S_{p1}$  i  $S_{p2}$  ładunków fikcyjnych o gęstości powierzchniowej  $\kappa(Y)$ . Wektor polaryzacji elektrycznej spełnia bowiem dla dielektryków, z założenia doskonałych, równanie  $\text{div } \mathbf{P}=0$ . Taki sposób postępowania daje w efekcie ujednoczenie obszarów  $\Omega_d$  i  $\Omega_p$  pod względem ich własności elektrycznych, przy równoczesnym spełnieniu warunków (2) i (3).

Stosując zasadę superpozycji, otrzymuje się następujący prototyp rozwiązania mieszanego zagadnienia brzegowego dla równania Laplace'a:

$$\Phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_p} \frac{\sigma(Y)}{|\overline{XY}|} dS_Y + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_d} \frac{\kappa(Y)}{|\overline{XY}|} dS_Y \quad (4)$$

Po uwzględnieniu teorii wartości granicznych pochodnej potencjału warstwy pojedynczej na styku obszarów  $\Omega_d$  i  $\Omega_p$  (patrz [9]) oraz po wprowadzeniu wynikających stąd przejść do warunku (3), otrzymuje się następujące równanie całkowe drugiego rodzaju:

$$\kappa(X) - \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{S_d} \kappa(Y) \frac{\cos(\overline{XY}, \overline{n}_X)}{|\overline{XY}|^2} dS_Y - \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{S_p} \sigma(Y) \frac{\cos(\overline{XY}, \overline{n}_X)}{|\overline{XY}|^2} dS_Y = 0 \quad (5)$$

$$\text{dla } X \in S_d, \quad \text{gdzie } \lambda = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Rozpisując warunek (1), otrzymuje się z kolei równanie pierwszego rodzaju



w następującej postaci:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S_d} \frac{\kappa(Y)}{|\overline{XY}|} dS_Y + \frac{1}{2\pi} \int_{S_p} \frac{\sigma(Y)}{|\overline{XY}|} dS_Y = 2e_0 \phi_k \quad (6)$$

dla  $X \in S_{pk}$  ( $k = 1, 2$ ).

Układ równań (5) i (6) zawiera niewiadome gęstości  $\kappa(y)$  i  $\sigma(Y)$ , ale wskutek złego uwarunkowania równania (6) jest on trudny do rozwiązania. Aby pokonać te trudności, zastosowano metodę regularyzacji równania (6), polegającą na sprowadzeniu go do postaci równania całkowego drugiego rodzaju (patrz [1] i [5]). Skorzystano w tym celu z własności, że pochodna normalna potencjału (4) wewnątrz obszaru należącego do każdego z przewodników jest równa zero. Postępując zgodnie z zasadami wynikającymi z teorii wartości granicznych pochodnej potencjału warstwy pojedynczej, uzyskano określone wyrażenie matematyczne. Wyrażenie to odjęto od lewej strony równania (6), przemnożonego uprzednio przez współczynnik wymiarowy  $\alpha > 0$ , uzyskując równanie całkowe w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma(X) - \frac{1}{2\pi} \int_{S_p} \sigma(Y) \left[ \frac{\cos(\overline{XY}, \bar{n}_X)}{|\overline{XY}|^2} - \frac{\alpha}{|\overline{XY}|} \right] dS_Y - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{S_d} \kappa(Y) \left[ \frac{\cos(\overline{XY}, \bar{n}_X)}{|\overline{XY}|^2} - \frac{\alpha}{|\overline{XY}|} \right] dS_Y = 2\alpha e_0 \phi_k \quad (7) \end{aligned}$$

dla  $X \in S_{pk}$  ( $k=1,2$ ) oraz  $S_p = S_{p1} \cup S_{p2}$  i  $S_d = S_{d1} \cup S_{d2}$ .

Układ równań (5) i (7) jest układem zupełnym równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju, który posiada jednoznaczne rozwiązanie. Dobór współczynnika wymiarowego  $\alpha$ , obojętny ze względu na istnienie rozwiązania układu, wpływa jednak na rozkład liczb charakterystycznych operacji całkowych. Warunkuje to z kolei zbieżność metody kolejnych przybliżeń i stabilność rozwiązania układu równań, dyskretyzującego rozważany układ równań operacyjnych (5) i (7).

Do numerycznego rozwiązania układu równań operacyjnych zastosowano metodę elementów brzegowych, wykorzystaną także przy opracowaniu pakietu komputero-

wych programów obliczeniowych (patrz [1], [4] i [7]). Programy te są obecnie wykorzystywane w pracach studialnych i projektowych, których jednym z celów jest wymiarowanie izolatorów wsporczych dyskowych (programy IZODYSK) i kielichowych (programy IZOKIEL).

### 3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przykład obliczeniowy, ilustrujący możliwości programu IZOKIEL 1, dotyczy modeli jednobiegunowego przewodu szynowego 420 kV z izolatorami kielichowymi o zadanych parametrach geometrycznych i materiałowych. Na rys. 2 zaprezentowano rozkłady modułów wektora natężenia pola elektrycznego wzdłuż powierzchni bocznych izolatora oraz wzdłuż powierzchni szyny prądowej<sup>\*)</sup>.

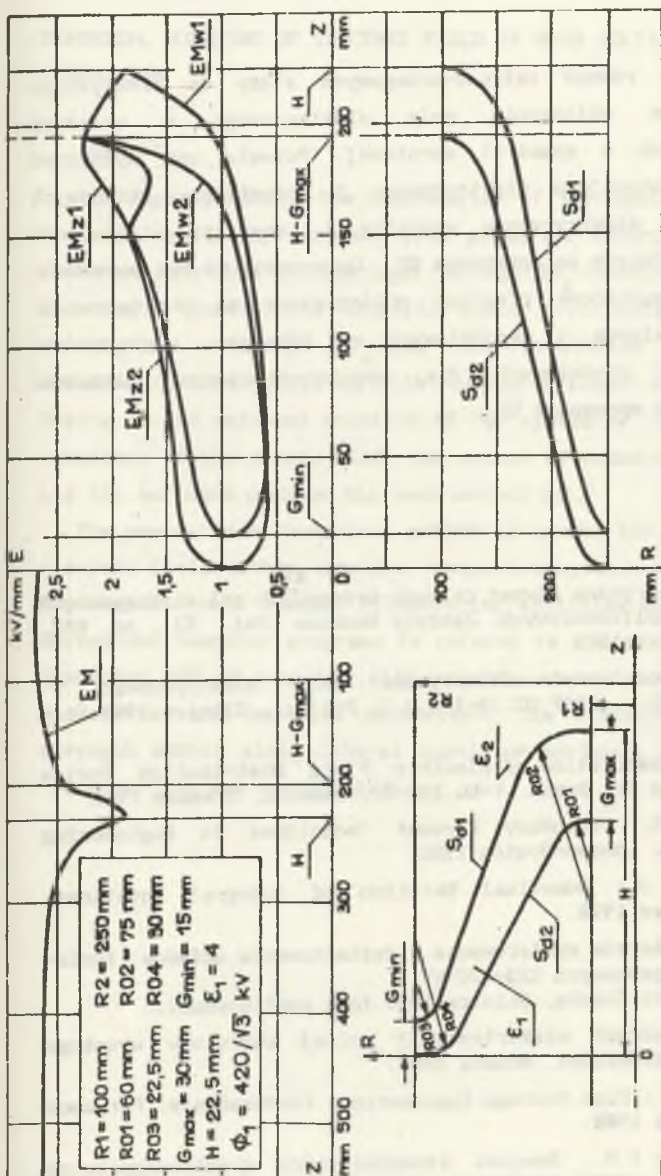
Z obliczeń numerycznych wynika, że rozkłady rozpatrywanych wielkości są silnie nieliniowe i wykazują lokalne ekstrema w różnych punktach przestrzeni międzyelektrodowej (patrz [6]). Dla rozkładów wzdłuż powierzchni bocznych izolatora ( $S_{d1}$  i  $S_{d2}$ ) stwierdza się następujące prawidłowości:

- wartości modułów nie rozkładają się symetrycznie względem osi rzędnych przyjętego układu współrzędnych,
- największe wartości modułów występują na ogół w miejscach styczności izolatora z szyną prądową,
- od powyższej reguły odbiega moduł liczony od strony sprzężonego SF<sub>6</sub> (oznaczony jako EMz1), osiągający największą wartość w miejscu, w którym składowa wektora normalna do powierzchni izolatora wykazuje maksimum.

Rozkład modułu wektora natężenia pola elektrycznego wzdłuż powierzchni szyny prądowej (dla rzędnej  $R=R_1$ ) ma inny charakter. Jest on szczególnie silnie nieliniowy w obrębie nasady izolatora na szynie prądowej, ale:

- moduł osiąga swoje maksimum w miejscach o współrzędnych  $R=R_1$  i  $Z=0,4H$  (gdzie H jest długością poosiową izolatora), przy czym jest ono większe o ok. 5% od największej wartości natężenia pola elektrycznego w czysto gazowym odstępie izolacyjnym,
- moduł dąży gwałtownie do lokalnego minimum, mniejszego ok. 1,5-krotnie od największej wartości natężenia pola w obrębie oddziaływania izolatora, w miarę zbliżania się do jego powierzchni bocznej.

<sup>\*)</sup> Program umożliwia obliczanie przestrzennego rozkładu potencjału elektrycznego oraz składowych stycznej i normalnej wektora natężenia pola wzdłuż powierzchni izolatora i szyny prądowej.



Rys. 2. Przykład rozkładów modułów natężenia pola elektrycznego:  
 - EM wzdłuż powierzchni szyny prądowej (dla  $R=R1$ ),  
 -  $EM_{w1,2}$  i  $EM_{z1,2}$  wzdłuż powierzchni bocznych  $S_{d1}$  i  $S_{d2}$ ,  
 obliczonych od strony wewnętrznej (w) lub zewnętrznej (z)  
 izolatora kleichowego

Fig. 2. An example of various distributions of electric field strength moduli:  
 - EM along the conductor-rail surface (for  $R=R1$ ),  
 -  $EM_{w1,2}$  i  $EM_{z1,2}$  along the lateral insulator surfaces  $S_{d1}$  and  $S_{d2}$ , calculated from the inside (w) or outside (z) of the insulator respectively



#### 4. PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda równań całkowo-brzegowych służy do efektywnego modelowania a następnie obliczania pola elektrycznego w układach izolacyjnych uwarstwionych o symetrii obrotowej. Pozwala ona wyznaczyć rozkład przestrzenny potencjału elektrycznego i wszystkich składowych wektora natężenia pola elektrycznego wewnątrz i zewnątrz izolatorów epoksydowych, współpracujących ze sprężonym SF<sub>6</sub>. Opracowane na tej podstawie algorytmy a następnie komputerowe programy obliczeniowe są przydatne do wykonywania prac studialnych i projektowych w zakresie wymiarowania izolatorów wsporczych i grodziowych dla wysokonapięciowych urządzeń elektrycznych izolowanych sprężonym SF<sub>6</sub>.

#### LITERATURA

- [1] Baron B.: Analiza numeryczna równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pewnej klasy modeli obliczeniowych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. nr 852, Elektryka z.97, Gliwice 1985.
- [2] Baron B., Ulman J.: Modelowanie matematyczne pola elektrycznego w przewodach szynowych. CPBP 02.18-1.4.3.3. Pol.Śl., Gliwice 1988 (nie publikowane).
- [3] Baron B., Gacek Z.: Computation of Electric Field Distribution Inside High Voltage Metalclad SF<sub>6</sub> Buses. 7-th ISH-91, session, Dresden 1991.
- [4] Brebbia C.A., Walker S.: Boundary Element Techniques in Engineering Newness. Butterworths. London-Boston 1980.
- [5] Delves L.M., Walsh J.: Numerical Solution of Integral Equations. Clarendon Press. Oxford 1974.
- [6] Gacek Z.: Analiza kryteriów wymiarowania i kształtowania układów izolacyjnych w przewodach szynowych 123-420 kV. CPBP 02.18-1.4.3.2. Pol.Śląska, Gliwice 1990 (nie publikowane).
- [7] Koleczickij E.S.: Rasczot elektriceskij poliej ustroistw vysokogo napriazhenija. Elektroatomizdat. Moskwa 1983.
- [8] Kuffel E., Zaengl W.S.: High Voltage Engineering; Fundamentals. Pergamon Press. Oxford-New York 1988.
- [9] Tozonl O.W., Majergojz I.D.: Rasczot triechmiernych elektromagnitnich poliej. Izd. Tiechnika. Kijew 1974.

Recenzent: doc.dr hab.inż. Andrzej Karwowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 czerwca 1991 r.



NUMERICAL MODELING OF ELECTRIC FIELD IN HIGH VOLTAGE SF<sub>6</sub>-INSULATED SOLID CONDUCTORS

## Abstract

The paper presents the application of the systems a Fredholm integral-bounded equations, resulted from potential theory for a single layer, to field calculations within high voltage SF<sub>6</sub>-insulated buses. For numerical modeling a quasi-state electric field distribution inside a section of a unipolar metalclad SF<sub>6</sub>-bus, the stratified and electromagnetically shielded insulation system with coaxial cylinder electrodes is considered. Basing on the univocal solution of the system of complete Fredholm integral equations of the second kind, the method of boundary elements has been used and the software package has been worked out.

The presented mathematical method is useful for modeling the steady-state electric field within composed insulation systems with rotational symmetry. The computational example illustrating abilities of the proposed method and worked-out computer programs is referred to a section of a unipolar solid conductor 420 kV equipped with epoxide conical barrier insulator of given geometrical and material parameters. The distribution of electric field strength moduli along lateral insulator surfaces and along the conductor-rail surface are represented.