ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: BUDOWNICTWO z. 85 Nr kol. 1404

Jadwiga JĘDRZEJCZYK - KUBIK

TERMODYFUZJA W OŚRODKU KELVINA -VOIGHTA

Streszczenie. W pracy przedstawiono równania fizyczne opisujące przepływy cieplno-dyfuzyjne w ośrodku lepkosprężystym określonym modelem Kelvina - Voighta.

THERMODIFFUSION IN KELVIN - VOIGHT MEDIUM

Summary. Constitutive relationships for thermo-diffusive flows in viscoelastic medium determined by Kelvin-Voight model have been presented in this paper.

1. Wstęp

Kontynualna teoria dyfuzji rozwinęła się na bazie teorii mieszanin zaproponowanej przez C. Truesdella i R. M. Bowena. Obszerny przegląd literatury dotyczący tych zagadnień można znaleźć w pracy [2].

W [6,7] zastosowano powyższą teorię do opisu dyfyzji w ciałach stałych lepkosprężystych, których właściwości opisane są funkcjonałami.

W niniejszej pracy podjęto próbę wyprowadzenia równań konstytutywnych dla przepływów cieplno-dyfuzyjnych w ośrodku lepkosprężystym, określanym modelem Kelvina - Voighta.

Przy analizie zagadnienia wykorzystano wyniki z pracy [6] oraz zastosowano twierdzenia matematyczne zaprezentowane w [3,4].

2. Bilanse procesu

Przedmiotem naszych rozważań jest wieloskładnikowy ośrodek ciągły. W ośrodku wyróżnia się szkielet o właściwościach lepkosprężystych, którego gęstość ρ^{o} jest rzędu wyższego od gęstości ρ^{α} pozostałych składników ($\rho^{o} >> \rho^{\alpha}, \alpha = 1,..n$), oraz dyfundujące składniki o różnych własnościach kinematycznych i dynamicznych.

Punktem wyjściowym analizy będzie układ bilansów termomechaniki wieloskładnikowej mieszaniny (por. [1,2,7,8,10,11]). Bilanse pozwalają sformułować podstawowe równania przepływów cieplno-dyfuzyjnych.

W klasycznych oznaczeniach (por.[1,2,6,7,8]) równania te w bieżącym układzie odniesienia *B* mają postać:

- parcjalny bilans masy

$$\frac{\partial \rho^{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{\alpha}\mathbf{v}^{\alpha}) = 0, \qquad \alpha = 0,1,\ldots,n. \tag{2.1}$$

W powyższym $\rho^{\alpha} = \rho^{\alpha}(x,t)$ jest gęstością masy składnika α w konfiguracji aktualnej, a $\mathbf{v}^{\alpha} = \mathbf{v}^{\alpha}(x,t)$ jest prędkością składnika α. Wprowadzając koncentrację masy c^{α} oraz strumień dyfuzji masy γ^{α}

$$c^{\alpha} = \frac{\rho^{\alpha}}{\rho}, \qquad \gamma^{\alpha} = \rho^{\alpha}(\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{w}) = \rho^{\alpha}\mathbf{u}^{\alpha}, \tag{2.2}$$

równanie (2.1) przyjmie postać:

$$\rho\frac{dc^{\alpha}}{dt} = -\operatorname{div}\gamma^{\alpha}, \tag{2.3}$$

gdzie $\rho = \sum_{\alpha}\rho^{\alpha}$ jest średnia gęstością masy, $\mathbf{w} = \frac{1}{\rho}\sum\rho^{\alpha}\mathbf{v}^{\alpha}$ - prędkością środka masy (barycentryczną), a $\mathbf{u}^{\alpha} = \mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{w}$ jest prędkością dyfuzyjną składnika α.

- bilans masy dla całego ośrodka

$$\frac{\partial \rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = 0. \tag{2.4}$$

- parcjalny bilans pędu

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^{\alpha}\mathbf{v}^{\alpha}\right) + \operatorname{div}\left(\rho^{\alpha}\mathbf{v}^{\alpha}\otimes\mathbf{v}^{\alpha} - \sigma^{\alpha}\right) = \rho^{\alpha}\mathbf{F}^{\alpha} + \Lambda^{\alpha}. \tag{2.5}$$

W powyższym σ^α jest parcjalnym tensorem naprężenia w składniku α, $\mathbf{F}^\alpha$ jest siłą masową w składniku α, a Λ^α jest gęstością źródeł pędu w składniku α.

Bilans pędu dla całego ośrodka w postaci lokalnej wyniesie

$$\rho\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \sum_\alpha \operatorname{div}\left(\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha\right) = \rho\mathbf{F} + \operatorname{div}\sigma\,, \tag{2.6}$$

gdzie

$$\rho\mathbf{F} = \sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha, \qquad \sum_\alpha \sigma^\alpha = \sigma\,.$$

W dalszej analizie przepływów pomijamy wszystkie wyrażenia drugiego rzędu ze względu na prędkość dyfuzyjną $\mathbf{u}$ (por. [2,7]), czyli

$$\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha \approx 0\,. \tag{2.7}$$

- parcjalny bilans energii

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho^\alpha\left(U^\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha\right)\right] + \operatorname{div}\left[\left(\rho^\alpha U^\alpha + \frac{1}{2}\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha\right)\mathbf{v}^\alpha\right] = \\ &= \hat{E}^\alpha + \rho^\alpha r^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha + \operatorname{div}\left(\ {}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha\right) - \operatorname{div}\mathbf{q}^\alpha.\end{aligned} \tag{2.8}$$

W równaniu (2.8) U^α oznacza energię wewnętrzną właściwą składnika α , E^α - przekaz energii do składnika α od pozostałych składników, $\rho^\alpha r^\alpha$ - źródło ciepła w składniku α oraz $\mathbf{q}^\alpha$ - strumień ciepła w składniku α.

Po zsumowaniu związków (2.8) i wykorzystaniu (2.4) i (2.6) otrzymamy bilans energii w postaci lokalnej dla wszystkich składników

$$\begin{aligned}&\rho\frac{d}{dt}\left(U + \frac{1}{2}\mathbf{w}^2\right) = \rho r + \rho\mathbf{F}\mathbf{w} - \operatorname{div}\mathbf{q} + \operatorname{div}(\sigma\mathbf{w}) + \\ &+\sum_{\alpha=1}\operatorname{div}\left[\left(\sigma^\alpha - \rho^\alpha U^\alpha \mathbf{1}\right)\mathbf{u}^\alpha\right] + \sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha \mathbf{u}^\alpha\,,\end{aligned} \tag{2.9}$$

gdzie

$$\sum_\alpha \hat{E}^\alpha = 0, \rho r = \sum_\alpha \rho^\alpha r^\alpha, \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}^\alpha, \rho U = \sum_\alpha \rho^\alpha U^\alpha, \tag{2.10}$$

a $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową.

Biorąc pod uwagę przyjęty model można założyć, że siły $\mathbf{F}^\alpha$ są siłami ciężkości (na jednostkę masy). Dla składników dyfundujących są podobnego rzędu, $F^\alpha \approx \hat{F}$, więc $\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha \mathbf{u}^\alpha \approx 0$ (por. [7]).

Wyrażenie $\left\{U^\alpha \mathbf{1} - \frac{\sigma^\alpha}{\rho^\alpha}\right\}$ jest tensorem potencjału chemicznego (por. [1,2,6,7]). W przypadku analizowania przepływów dyfuzyjnych można przyjąć, że tensory naprężeń parcjalnych w dyfundujących składnikach sprowadzają się do ciśnień hydrostatycznych. Zachodzi więc (por. [7])

$$(\rho^\alpha U^\alpha \mathbf{1} - \sigma^\alpha)\mathbf{u}^\alpha \approx \left(U^\alpha - \frac{\operatorname{tr}\sigma^\alpha}{\rho^\alpha}\right)\mathbf{1}\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha = M^\alpha \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha = M^\alpha \gamma^\alpha . \tag{2.11}$$

Podstawiając do (2.9) związek (2.11) oraz wykorzystując równanie bilansu pędu (2.6) wraz z (2.7) otrzymamy

$$\rho\frac{dU}{dt} = \rho r - \operatorname{div}\mathbf{q} + \sigma : \mathbf{d} - \sum_\alpha \operatorname{div}\left(M^\alpha \gamma^\alpha\right), \tag{2.12}$$

gdzie: $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\mathbf{w} + \operatorname{grad}\mathbf{w}^T)$.

Wyrażenie (2.12) można jeszcze przekształcić, uwzględniając równanie (2.3), do postaci:

$$\rho\frac{dU}{dt} = \rho r - \operatorname{div}\mathbf{q} + \sigma : \mathbf{d} - \sum_\alpha \rho\frac{dc^\alpha}{dt} M^\alpha - \sum_\alpha \gamma^\alpha \operatorname{grad} M^\alpha . \tag{2.13}$$

Analizując ośrodek wieloskładnikowy, w którym dominującym składnikiem jest ciało lepkosprężyste i biorąc pod uwagę własności takiego ośrodka, będziemy poszukiwać równań konstytutywnych w postaci relacji różniczkowych. Przyjmujemy więc drugą zasadę termodynamiki w postaci nierówności Clausiusa-Duhema. Korzystamy z ogólnej postaci nierówności zaproponowanej w [2,8,9]

$$\rho\frac{dS}{dt} \geq \rho R + \operatorname{div}\Phi , \tag{2.14}$$

gdzie S jest entropią właściwą, Φ jest strumieniem entropii, a R wydajnością źródeł entropii w obszarze *V*.

W analizowanym modelu zakładamy, że temperatura wszystkich składników jest jednakowa, a strumień entropii i źródło są postaci (por.[2,7,8]):

$$\Phi = -\frac{\mathbf{q}}{T}, \qquad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}^\alpha , \qquad \rho R = \sum_\alpha \rho^\alpha r^\alpha = \rho r . \tag{2.15}$$

Eliminując składnik ρr z nierówności wzrostu entropii za pomocą równania (2.13) otrzymamy następującą nierówność residualną:

$$-\rho\frac{dU}{dt} + T\rho\frac{dS}{dt} + \sigma : \mathbf{d} + \sum_\alpha \frac{dc^\alpha}{dt} M^\alpha - \frac{1}{T}\mathbf{q}\operatorname{grad} T - \sum_\alpha \gamma^\alpha \operatorname{grad} M^\alpha \geq 0 . \tag{2.16}$$

Z tej nierówności otrzymamy ogólne postacie równań fizycznych określających temperaturę T, naprężenie σ i potencjał chemiczny M^α. Uzyskamy też ograniczenia dla występujących tu strumieni $\mathbf{q}$ i γ^α.

3. Materialny opis procesu

Wiadomo, że opis ciała w konfiguracji początkowej **B** jest bardziej naturalny i efektywny przy określaniu odkształceń i warunków brzegowych niż opis ciała w konfiguracji bieżącej *B*. Dlatego też będziemy poszukiwać materialnych odpowiedników bilansów.

Oznaczmy przez $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) = \{X_H\}$ współrzędne materialne punktów ciała (α=0) w materialnym układzie odniesienia B, a przez $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$ - funkcję ruchu tego ciała.

Prędkość oraz gradient deformacji ciała określone są następująco:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \chi}{\partial t}, \mathbf{F} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} = \{\chi_{h,H}\} = \left\{\frac{\partial \chi_h}{\partial X_H}\right\} \text{ gdzie } h, H = 1,2,3 , \tag{3.1}$$

$$J = \det(\mathbf{F}) > 0 ,$$

a prędkość Eulera $\mathbf{v}^\circ$ ciała otrzymamy przez zamianę zmiennych

$$\mathbf{v}^\circ = \dot{\mathbf{x}}\left(\chi^{-1}(x,t),t\right) = \mathbf{v}^\circ(x,t) \cong \mathbf{w}(x,t). \tag{3.2}$$

Przyjmując oznaczenia

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(x,t), \qquad X_H = X_H(x_h,t), \qquad X_{H,h} = \frac{\partial X_H}{\partial x_h} , \tag{3.3}$$

$$\mathbf{A} \in \mathrm{B} , \qquad \mathbf{A} = \{A_L\} , \qquad A \in B , \qquad A = \{A_l\} \tag{3.4}$$

zdefiniujemy następujące pole tensorowe i wektorowe, por. [10,5]

$$\begin{aligned} Q_L &= J X_{L,l} q_l , & q_l &= J^{-1} x_{l,L} Q_L , \\ j_L &= J X_{L,l} \gamma_l , & \gamma_l &= J^{-1} x_{l,L} j_L , \\ t_{LH} &= J X_{L,l} X_{H,h} \sigma_{lh} , & \sigma_{lh} &= J^{-1} x_{l,L} x_{h,H} t_{LH} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie $J = \det\, x_{h,H}$.

Bilanse pędu, energii i nierówność wzrostu entropii w układzie odniesienia **B** wynoszą odpowiednio, por. [1,10]:

$$\rho_o \dot{w}_r = [x_{r,L}\, t_{HL}]_{,H} + \rho_o F_r , \tag{3.6}$$

$$\rho_o \dot{U} = \rho_o r - \mathrm{Div}\mathbf{Q} + \mathbf{t} : \dot{\mathbf{e}} + \sum_\alpha \rho_o \dot{c}^\alpha M^\alpha - \sum_\alpha \mathbf{j}^\alpha \mathrm{Grad} M^\alpha , \tag{3.7}$$

$$\rho_o\dot{S} \geq \frac{1}{T}\rho_o r - \mathrm{Div}\left[\frac{\mathbf{Q}}{T}\right]. \tag{3.8}$$

W powyższym

$$2\mathbf{e}_{HL} = x_{i,H}x_{i,L} - \delta_{HL}, \qquad \mathrm{Grad}(\cdot) = (\cdot)_{,H} \qquad \rho_o = J\rho^o. \tag{3.9}$$

Ostatecznie nierówność residualna w analizowanym problemie ma następujący kształt:

$$\begin{gathered} -\rho_o\dot{U} + T\rho_o\dot{S} + \mathbf{t}:\dot{\mathbf{e}} + \sum_\alpha \rho_o\dot{c}^\alpha M^\alpha - \frac{1}{T}\mathbf{Q}\cdot\mathrm{Grad}T - \sum_\alpha \mathbf{j}^\alpha \mathrm{Grad}M^\alpha \geq 0, \\ -\frac{1}{T}\mathbf{Q}\cdot\mathrm{Grad}T - \sum_\alpha \mathbf{j}^\alpha \mathrm{Grad}M^\alpha \geq 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Z nierówności (3.10) wynikają ograniczenia dla przepływów cieplno-dyfuzyjnych.

Wyprowadzając równania bilansów w konfiguracji B korzystaliśmy z następujących formuł (por. [4]):

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{KLM}x_{j,L}x_{k,M} = 2JX_{K,i}, \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}, \\ \left(J^{-1}x_{i,K}\right)_{,i} = 0, \ \overline{x_{i,K}} = v_{i,j}x_{j,K}, \\ x_{k,K}X_{K,l} = \delta_{kl}, \ X_{K,k}x_{k,L} = \delta_{KL}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

W dalszych rozważaniach oprócz energii wewnętrznej właściwej wprowadzimy nową wielkość określoną relacją

$$\rho_o K = \rho_o U - \rho_o ST. \tag{3.12}$$

Nierówność residualna przyjmie wówczas postać:

$$-\rho_o\dot{K} - \rho_o S\dot{T} + \mathbf{t}:\dot{\mathbf{e}} + \sum_\alpha \rho_o\dot{c}^\alpha M^\alpha - \frac{1}{T}\mathbf{Q}\mathrm{Grad}T - \sum_\alpha \mathbf{j}^\alpha \mathrm{Grad}M^\alpha \geq 0. \tag{3.13}$$

Z nierówności tej otrzymamy podstawowy układ równań konstytutywnych omawianego procesu, obejmujący entropię $\rho_o S$, tensor naprężeń $\mathbf{t}$, potencjał chemiczny M^α oraz wyrażenia dla strumienia ciepła i masy.

4. Materiały typu różniczkowo-całkowego

Obecnie przedstawimy równania tworzące, zawierające w jawnej postaci zależność poszukiwanych pól od prędkości zmiennych niezależnych. Skorzystamy przy tym z pojęcia uogólnionego potencjału dysypacyjnego, podanego w pracach [3, 9].

Zakładamy dalej, że potencjał K jest funkcją zmiennych $\boldsymbol{L} = (\mathbf{e},T,c^1,...,c^n)$, zaś pozostałe wielkości pola$(\mathbf{t},S,M^1,...,M^n,\mathbf{Q},\mathbf{j}^1,...,\mathbf{j}^n)$ zależą od $\boldsymbol{L}$ i od pochodnych $\dot{\boldsymbol{L}}$.

Zachodzi zatem

$$\begin{aligned} &K = K(\boldsymbol{L}),\\ &\mathbf{t} = \mathbf{t}(\boldsymbol{L},\dot{\boldsymbol{L}},\boldsymbol{G}),\ S = S(\boldsymbol{L},\dot{\boldsymbol{L}},\boldsymbol{G}),\\ &M^\alpha = M^\alpha(\boldsymbol{L},\dot{\boldsymbol{L}},\boldsymbol{G}),\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{L},\dot{\boldsymbol{L}},\boldsymbol{G}),\\ &\mathbf{j}^\alpha = \mathbf{j}^\alpha(\boldsymbol{L},\dot{\boldsymbol{L}},\boldsymbol{G}),\ \alpha = 1,...,n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L} = (\mathbf{e},T,c^1,...,c^n), \dot{\boldsymbol{L}} = (\dot{\mathbf{e}},\dot{T},\dot{c}^1,...,\dot{c}^n),\\ &\boldsymbol{G} = (\mathrm{Grad}T,\mathrm{Grad}M^1,...,\mathrm{Grad}M^n). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Różniczkując $(4.1)_1$ po czasie i podstawiając uzyskaną pochodną do nierówności residualnej (3.13) otrzymamy:

$$\left(\mathbf{t} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{e}}\right):\dot{\mathbf{e}} - \left(\rho_o S + \frac{\partial K}{\partial T}\right)\dot{T} + \sum_\alpha\left(\rho_o M^\alpha - \frac{\partial K}{\partial c^\alpha}\right)\dot{c}^\alpha - \frac{1}{T}\mathbf{Q}\cdot \mathrm{Grad}T - \sum_\alpha \mathbf{j}^\alpha \mathrm{Grad}M^\alpha \geq 0. \tag{4.3}$$

Poszukiwane wielkości pola $(\mathbf{t},S,M^1,...,M^n,\mathbf{Q},\mathbf{j}^1,...,\mathbf{j}^n)$ powinny spełniać nierówność residualną (4.3) dla każdego wyboru zmiennych niezależnych.

Nierówność (4.3) zapiszemy w postaci wektorowej:

$$\boldsymbol{Z}\cdot \mathrm{Y}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}) \geq 0, \tag{4.4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Z} = \{\dot{\mathbf{e}},\dot{T},\dot{c}^1,...,\dot{c}^n,\mathrm{Grad}T,\mathrm{Grad}M^1,...,\mathrm{Grad}M^n\},\\ &\mathrm{Y} = \left\{\mathbf{t} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{e}},-\rho_o S - \frac{\partial K}{\partial T},\rho_o M^1 - \frac{\partial K}{\partial c^1},...,\rho_o M^n - \frac{\partial K}{\partial c^n},-\frac{1}{T}\mathbf{Q},-\mathbf{j}^1,...,-\mathbf{j}^n\right\},\\ &\boldsymbol{L} = (\mathbf{e},T,c^1,...,c^n). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Problem matematyczny:

- znaleźć wszystkie wektory $\mathrm{Y}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})$ spełniające nierówność

$$\boldsymbol{Z}\cdot \mathrm{Y}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}) \geq 0, \tag{4.6}$$

analizowany był w pracach [3,4].

Zgodnie z tymi pracami rozwiązanie nierówności (4.6) jest jednoznacznie określone relacją

$$\mathrm{Y} = \nabla_x \psi(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}) + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}), \tag{4.7}$$

gdzie $\psi(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})$ jest potencjałem dysypacyjnym, a $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})$ jest funkcją wektorową spełniającą warunki

$$\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{U}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}) = 0, \qquad \boldsymbol{U}(\mathbf{0},\boldsymbol{L}) = \mathbf{0}\,. \tag{4.8}$$

Funkcja $\psi(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})$ określona jest równaniem:

$$\psi(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{L}) + \int_0^1 \mathrm{p}(\lambda \boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{4.9}$$

gdzie $\mathrm{p}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})$ jest pewną funkcją skalarną klasy C^2 taką, że $\mathrm{p}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L}) \geq 0$ oraz $\mathrm{p}(\mathbf{0},\boldsymbol{L}) = 0$, por. [3, 4].

Podstawiając zależności (4.5) do (4.7) otrzymamy następującą postać równań konstytutywnych:

$$\begin{aligned} &\mathbf{t} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + \mathbf{U}^t, \rho_o S = -\frac{\partial K}{\partial T} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{T}} - U^s, \\ &\rho_o M^\alpha = \frac{\partial K}{\partial c^\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{c}^\alpha} + U^{M^\alpha}, \mathbf{j}^\alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Grad} M^\alpha} - \mathbf{U}^{j^\alpha}, \\ &\frac{1}{T}\mathbf{Q} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Grad} T} - \mathbf{U}^q, \alpha = 1,\dots,n, \end{aligned} \tag{4.10}$$

gdzie $\boldsymbol{U} = \left(\mathbf{U}^t, U^t, U^{M^\alpha}, \mathbf{U}^{j^\alpha}\right)$ spełnia warunek (4.8)

$$\begin{aligned} &\mathbf{e} : \mathbf{U}^t + \dot{T}U^S + \sum_\alpha \dot{c}^\alpha U^{M^\alpha} + \mathbf{U}^q \cdot \mathrm{Grad} T + \sum_\alpha \mathbf{U}^{j^\alpha} \cdot \mathrm{Grad} M^\alpha = 0, \\ &\alpha = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{4.11}$$

5. Liniowe równania konstytutywne dla materiałów lepkosprężystych typu Kelvina-Voighta

Podane w poprzednim punkcie ogólne rozważania dotyczące ograniczeń termodynamicznych nakładanych na równania konstytutywne zostaną zaprezentowane w przypadku liniowych materiałów lepkosprężystych typu Kelvina-Voighta. Mamy tu do czynienia z uogólnieniem klasycznych rozważań na przypadek opisu uwzględniającego wzajemne sprzężenie przepływów ciepła i masy. W trakcie analizy wykorzystamy rozwiązanie nierówności residualnej (3.13) przytoczone w punkcie 4, por.(4.10). Ograniczając się do składników liniowych i kwadratowych w wyrażeniu określającym $\rho_o K$ i ψ otrzymamy liniowe równania tworzące.

Przyjmujemy

$$\begin{aligned}&\rho_o K = K(\mathbf{e}, T, c^1,\dots,c^n),\ U = 0,\\ &\psi = \psi\left(\dot{\mathbf{e}}, \dot{T}, \dot{c}^1,\dots,\dot{c}^n, \mathrm{Grad}T, \mathrm{Grad}M^1,\dots,\mathrm{Grad}M^n\right)\end{aligned} \tag{5.1}$$

Zgodnie z (4.10) mamy:

$$\begin{aligned}&\mathbf{t} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\mathbf{e}}}, \rho_o S = -\frac{\partial K}{\partial T} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{T}}, \rho_o M^\alpha = \frac{\partial K}{\partial c^\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{c}^\alpha},\\ &\frac{1}{T}\mathbf{Q} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Grad}T}, \mathbf{j}^\alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Grad}M^\alpha}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{g}} = [g_j] = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}; T; c^1,\dots,c^n\}\\ &\tilde{\mathbf{Z}} = [Z_j] = \{\dot{e}_{11}, \dot{e}_{22}, \dot{e}_{33}, \dot{e}_{12}, \dot{e}_{13}, \dot{e}_{23}; \dot{T}; \dot{c}^1,\dots,\dot{c}^n;\\ &T_{,1}, T_{,2}, T_{,3}; M^1{}_{,1}, M^1{}_{,2}, M^1{}_{,3},\dots, M^n{}_{,1}, M^n{}_{,2}, M^n{}_{,3};\}\end{aligned} \tag{5.3}$$

W dalszych rozważaniach interesować nas będzie przypadek liniowych równań tworzących. Żądanie to określa postać potencjałów K i ψ. Przyjmujemy, por. (4.10):

$$K = \frac{1}{2} C_{ij} g_i g_j, \qquad i, j = 1,2,\dots,7+n, \tag{5.4}$$

$$p = D_{ij} Z_i Z_j, \qquad \psi = \int_0^1 D_{ij} \tau Z_i Z_j d\tau, \qquad i, j = 1,2,\dots,10+4n. \tag{5.5}$$

Biorąc pod uwagę (5.3) potencjały K i ψ przyjmą formę:

$$K = \frac{1}{2} C^{(e)}_{klij} e_{kl} e_{ij} + \frac{1}{2} C^T T^2 + \sum_\alpha \frac{1}{2} C^{c^\alpha} (c^\alpha)^2 + C^{eT}_{ij} e_{ij} T + \sum_\alpha C^{ec^\alpha}_{ij} e_{ij} c^\alpha + \sum_\alpha C^{Tc^\alpha} c^\alpha T, \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\psi =\ & \frac{1}{2} D^e_{klij} \dot{e}_{kl} \dot{e}_{ij} + \frac{1}{2} D^T (\dot{T})^2 + \sum_\alpha \frac{1}{2} D^{c^\alpha} (\dot{c}^\alpha)^2 +\\ & + D^{eT}_{ij} \dot{e}_{ij} \dot{T} + \sum_\alpha D^{ec^\alpha}_{ij} \dot{e}_{ij} \dot{c}^\alpha + \sum_\alpha D^{Tc^\alpha} \dot{c}^\alpha \dot{T} + \frac{1}{2} D^{qq}_{ij} T_{,i} T_{,j} +\\ & + \sum_\alpha D^{j^\alpha}_{ij} M^\alpha{}_{,i} M^\alpha{}_{,j} + D^{eq}_{ijk} \dot{e}_{ij} T_{,k} + D^{Tq}_j \dot{T} T_{,j} + \sum_\alpha D^{c^\alpha q}_i c^\alpha T_{,i} +\\ & + \sum_\alpha D^{ek^\alpha}_{ijk} \dot{e}_{ij} M^\alpha{}_{,k} + \sum_\alpha D^{Tj^\alpha}_j \dot{T} M^\alpha{}_{,j} + \sum_\alpha D^{cj^\alpha}_j \dot{c}^\alpha M^\alpha{}_{,j},\end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie i,j,k,l = 1,2,3.

W formie K uwzględnione zostały wszystkie możliwe sprzężenia występujące między współrzędnymi wektora $\tilde{\mathbf{g}}$. Natomiast w potencjale ψ pominięto sprzężenia gradientów, a więc wyrazy postaci $D^{qj^\alpha}_{ij} T_{,i} M^\alpha{}_{,j}, \dots, D^{c^\alpha j^\beta}_j c^\alpha M^\beta{}_{,j}$, $D^{j^\alpha j^\beta}_{ij} M^\alpha{}_{,i} M^\beta{}_{,j}$ oraz wyrazy $C^{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta$, $\alpha \neq \beta$.

Przyjęta postać potencjałów K i ψ prowadzi do liniowych równań konstytutywnych. Aby uwzględnić efekty nieliniowe należy rozszerzyć postać potencjałów o składniki zawierające potrójne i wyższe potęgi współrzędnych wektorów $\tilde{\mathbf{g}}$ i $\tilde{\mathbf{Z}}$.

Układy tensorów własności materiałowych $D^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ i $C^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ występujących w równaniach (5.6) i (5.7) posiadają określone symetrie wynikające między innymi z cech współrzędnych wektorów $\tilde{\mathbf{g}}$ i $\tilde{\mathbf{Z}}$.

Zachodzi

$$C^{(e)}_{klij} = C^{(e)}_{ijkl} = C^{(e)}_{jikl} = C^{(e)}_{lkij}, C^{eT}_{ij} = C^{eT}_{ji}, C^{ec}_{ij} = C^{ec}_{ji}. \tag{5.8}$$

Analogiczne symetrie posiadają też tensory materiałowe $D^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$, występujące we wzorze (5.7), określającym potencjał ψ.

Mając określone potencjały K i ψ możemy wyznaczyć równania konstytutywne. Otrzymamy je, podstawiając do wzorów (5.2) odpowiednie pochodne wyrażeń (5.6) i (5.7).

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C^{e}_{ijkl} e_{kl} + C^{eT}_{ij} T + \sum_{\alpha} C^{ec^{\alpha}}_{ij} c^{\alpha} + D^{e}_{ijkl} \dot{e}_{kl} + D^{eT}_{ij} \dot{T} + \\ &+ \sum_{\alpha} D^{ec^{\alpha}}_{ij} \dot{c}^{\alpha} + D^{eq}_{ijk} T_{,k} + \sum_{\alpha} D^{ej^{\alpha}}_{ijk} M^{\alpha}{}_{,k}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$-\rho_o S = C^{eT}_{ij} e_{ij} + C^{T} T + \sum_{\alpha} C^{Tc^{\alpha}} c^{\alpha} + D^{T} \dot{T} + \sum_{\alpha} T^{Tc^{\alpha}} \dot{C}^{\alpha} + D^{Tq}_{j} T_{,j} + \sum_{\alpha} D^{Tj^{\alpha}}_{j} M^{\alpha}{}_{,j}, \tag{5.10}$$

$$\rho_o M^{\alpha} = C^{ec^{\alpha}} e_{ij} + C^{Tc^{\alpha}} T + C^{c^{\alpha}} c^{\alpha} + D^{ec^{\alpha}}_{ij} \dot{e}_{ij} + D^{Tc^{\alpha}} \dot{T} + D^{c^{\alpha}} \dot{c}^{\alpha} + D^{qc^{\alpha}}_{j} T_{,j} + D^{jc^{\alpha}}_{i} M^{\alpha}{}_{,i}. \tag{5.11}$$

Kolejny układ równań dotyczy strumieni $\tilde{\mathbf{q}}$ i $\mathbf{j}^{\alpha}$. Mają one postać:

$$-\frac{1}{T} Q_i = D^{qq}_{ij} T_{,j} + D^{eq}_{ijk} \dot{e}_{kj} + D^{Tq}_{i} \dot{T} + \sum_{\alpha} D^{c^{\alpha}q}_{i} \dot{c}^{\alpha}, \tag{5.12}$$

$$-j^{\alpha}_{i} = D^{cj^{\alpha}}_{ij} M^{\alpha}{}_{,j} + D^{ej^{\alpha}}_{ijk} \dot{e}_{jk} + D^{Tj^{\alpha}}_{i} \dot{T} + D^{cj^{\alpha}}_{i} \dot{c}^{\alpha}. \tag{5.13}$$

W pierwszych (7 + n) równaniach tworzących, określających pola t_{ij}, S, M^{α}, można wydzielić trzy grupy wpływów zależnych od chwilowych wartości pól $\{\mathbf{e}, c^{\alpha}, T\}$, określających proces, ich prędkości oraz grupy składników powiązanych z gradientami $T_{,i}$, $M_{,i}$. W drugiej grupie równań, określających strumienie, możemy wydzielić dwie grupy wpływów. Do pierwszej zaliczamy klasyczne składniki, zależne od gradientów pól $T_{,j}$ oraz $M^{\alpha}{}_{,j}$, natomiast druga grupa składników zawiera wyrazy zależne od prędkości niezależnych pól determinujących proces. Warto zauważyć, że właśnie ta grupa składników odbiega od klasycznych wyników termomechanicznych, w których strumienie są powiązane jedynie z gradientami odpowiednich pól. Ponadto równanie (4.9) określające entropię S prowadzi do hiperbolicznych równań przewodnictwa cieplnego, por.[8]. Podobna uwaga dotyczy wyrażenia na potencjał chemiczny, które prowadzi również do hiperbolicznego równania dyfuzji.

Istotne uproszczenia uzyskamy pomijając w potencjale ψ wszystkie składniki, w których występują iloczyny mieszane gradientów pól T oraz M^α i prędkości $\dot{e}_{ij}, \dot{M}^\alpha, \dot{T}$.

Otrzymamy wówczas równania tworzące w postaci:

$$t_{ij} = \left(C^{e}_{ijkl} + D^{e}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)e_{kl} + \left(C^{eT}_{ij} + D^{eT}_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\right)T + \sum_{\alpha}\left(C^{ec}_{ij} + D^{ec^\alpha}_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\right)c^\alpha, \tag{5.14}$$

$$-\rho_o S = \left(C^{eT}_{ij} + D^{eT}_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\right)e_{ij} + \left(C^{T} + D^{T}\frac{\partial}{\partial t}\right)T + \sum_{\alpha}\left(C^{TC^\alpha} + D^{TC^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)c^\alpha, \tag{5.15}$$

$$\rho_o M^\alpha = \left(C^{ec^\alpha}_{ij} + D^{ec^\alpha}_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\right)e_{ij} + \left(C^{Tc^\alpha} + D^{Tc^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)T + \left(C^{c^\alpha} + D^{c^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)c^\alpha \tag{5.16}$$

oraz następujące wyrażenia określające strumienie:

$$-q_i = D^q_{ij}T,_j\,, \quad -j^\alpha_i = D^M_{ij}M^\alpha,_j\,, \qquad \alpha = 1,\dots,n. \tag{5.17}$$

Przytoczony tu szczególny układ równań konstytutywnych termodyfuzji lepkosprężystej może być podstawą uproszczonych ujęć wpływów reologicznych.

Przedstawione wyniki świadczą o dużych możliwościach zastosowania twierdzeń z prac [3, 4] w termomechanicznej analizie pól sprzężonych.

LITERATURA

1. Bowen R.M.: Incompressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures, Int. J.Engng. Sci. 18, 1980, s. 1129-1148.
2. Bowen R.M.: Diffusion Models Implied by the Theory of Mixtures in Rational Thermodynamics, ed. C. Truesdell, Springer-Verlag New York 1984.
3. Edelen D.G.: Primitive Thermodynamics: A new Look at the Clausius-Duhem Inequality, Int. J. Eng. Sci., 12, 1974, s. 121-141.
4. Edelen D.G.: Complete Solutions of Clausius-Duhem Inequality for Electromagnetic Interactions with Matter, Int. J. Eng. Sci., 3, 1975, s. 965-970.
5. Eringen A.C., Maugin G.A.: Electrodynamics of Continua I, II, Springer, New York 1990.

6. Kubik J.: Thermodiffusion in Viscoelastic Solids, Studia Geotechnica et Mechanica, 8, 2, 1986, s. 29-47.

7. Kubik J.: The Correspondence Between Equations of Thermodiffusion and Theory of Mixtures, Acta Mech. 70, 1987, s. 51-56.

8. Müller I., Ruggeri T.: Extended Thermodynamics, Springer Verlag, New York 1993.

9. Šilhavý M.: The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media, Springer, Berlin 1997.

10. Wilmański K.: Lagrangean Model of Two-Phase Porous Material, J..Non-Equilib. Thermodyn. 20, 1995, s. 51-77.

11. Wilmański K.: Porous Media at Finite Strains. The New Model with the Balance Equation for Porosity, Arch. Mech. 48, 4, 1996.

Recenzent: Dr hab inż Jerzy Wyrwał,
Prof. Pol. Opolskiej

Abstract

In the paper have been presented physical equations describing thermo-diffusive flows in viscoelastic medium whose mechanical model is the model of Kelvin - Voight. The relationships have been derived on the basis of the Edelen papers [3,4]. Also, the linear approximation of the equations has been presented.